广义系统的 H_2 最优控制[1)]

杨冬梅　张庆灵　沙成满
(东北大学理学院　沈阳　110006)
(E-mail: neuress@mail.sy.ln.cn)

摘　要　研究连续广义系统的标准 H_2 最优控制器的设计问题. 利用线性分式变换方法给出该系统的所有稳定化控制器的参数化形式,从而借助于两个广义 H_2 代数 Riccati 方程和两个广义 Lyapunov 方程,分别给出该系统的一个标准 H_2 最优控制器的设计及最优 H_2 范数的计算. 最后用一个算例进一步说明设计方法.

关键词　广义系统, H_2 最优控制, H_2 代数 Riccati 方程, H_2 范数
中图分类号　TP13

H_2 OPTIMAL CONTROL FOR DESCRIPTOR SYSTEMS

YANG Dong-Mei　ZHANG Qing-Ling　SHA Cheng-Man
(*College of Science, Northeastern University, Shenyang*　110006)
(E-mail: neuress@mail.sy.ln.cn)

Abstract　The problem of design of standard H_2 optimal controller for continous-time descriptor systems is studied. Parameterization of all stabilizing controller of the system is given using the method of linear fractional transformation. Furthermore, By means of two H_2 generalized algebraic Riccati equations and two generalized Lyapunov equations respectively, a design of standard H_2 optimal controller and the calculation of optimal H_2 norm are presented. Finally, a numerical example is given to illustrate the design method.

Key words　Descriptor system, H_2 optimal control, H_2 algebraic Riccati equation, H_2 norm

1　引言

H_2 最优控制问题就是控制器的设计不仅要使系统稳定,还要使系统的 H_2 范数达到最小. 近年来,关于正常系统的 H_2 最优控制理论已有了详尽的研究[1,2],而广义系统 H_2 控制理论的研究却远远地滞后,其中,Takaba 等人基于模型配比方法进行了广义系统 H_2 最优

1) 辽宁省教育科学基金(991121118)和高等学校骨干教师资助计划资助
收稿日期　2001-01-02　　收修改稿日期　2001-04-28

输出反馈控制器的研究[3],但未从分析到控制完整地给出设计.本文采用更为直接的线性分式变换(LFT)方法,得到不同于文献[3]的连续广义系统的所有动态输出稳定化控制器的参数化形式;根据广义 H_2 代数 Riccati 方程(H_2-GARE)的解,给出了 H_2 最优控制器的状态空间形式;根据广义 Lyapunov 方程的解,给出了计算闭环系统的最优 H_2 范数的状态空间方法.本文从最优控制器到 H_2 范数计算完整地给出设计方法,得到的最优控制器较文献[3]形式更为简便且容易实现.

2 系统描述及预备结果

考虑如下广义系统

$$\begin{aligned} E\dot{\boldsymbol{x}}(t) &= A\boldsymbol{x}(t) + B_1\boldsymbol{w}(t) + B_2\boldsymbol{u}(t) \\ \boldsymbol{z}(t) &= C_1\boldsymbol{x}(t) + D_{11}\boldsymbol{w}(t) + D_{12}\boldsymbol{u}(t) \\ \boldsymbol{y}(t) &= C_2\boldsymbol{x}(t) + D_{21}\boldsymbol{w}(t) + D_{22}\boldsymbol{u}(t) \end{aligned} \tag{1}$$

其中,$\boldsymbol{x}\in R^n$;$\boldsymbol{w}\in R^r$, $\boldsymbol{u}\in R^p$; $\boldsymbol{z}\in R^m$, $\boldsymbol{y}\in R^q$ 分别为状态;输入;输出. $E\in R^{n\times n}$,$A\in R^{n\times n}$,B_i,C_j,$D_{ij}(i,j=1,2)$为常数矩阵. E 通常为奇异阵,假定 rank $E=q\leqslant n$.

标准 H_2 控制问题:寻找一个动态输出反馈控制器 $\boldsymbol{u}=K(s)\boldsymbol{y}(s)$,使得系统(1)内部稳定且从 $\boldsymbol{w}$ 到 $\boldsymbol{z}$ 的闭环传递函数 T_{zw}的 H_2 范数 $\|T_{zw}\|_2$ 为最小.

在本节的所有控制问题,假设如下条件成立.

A1) (E,A)正则;

A2) (E,A,B_2)有限动态可稳定且脉冲能控;

A3) (E,A,C_2)有限动态可检测且脉冲能观;

A4) $R_1=D_{12}^{\mathrm{T}}D_{12}>0$ 且 $R_2=D_{21}D_{21}^{\mathrm{T}}>0$;

A5) $\begin{bmatrix} A-jwE & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix}$对任意 $\boldsymbol{w}$ 都列满秩;

A6) $\begin{bmatrix} A-jwE & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix}$对任意 $\boldsymbol{w}$ 都行满秩.

在假设 A1)下,传递函数为 $G(s)=\left\{E,\left[\begin{array}{c:cc} A & B_1 & B_2 \\ \hdashline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array}\right]\right\}=\begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix}$; 假设 A2)和 A3)保证 F 和 L 存在使$(E,A+B_2F)$和$(E,A+LC_2)$是容许的,即正则、稳定且无脉冲.

考虑广义系统

$$E\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}(t) + B\boldsymbol{u}(t), \quad \boldsymbol{y}(t) = C\boldsymbol{x}(t) \tag{2}$$

其传递函数记为 $M(s)$. 记 $\hat{E}=\begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & E^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$, $H=\begin{bmatrix} A & -BB^{\mathrm{T}} \\ -C^{\mathrm{T}}C & -A^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$.

定义 1. 设 $\lambda\in C$. 如果 $\det(\lambda\hat{E}-H)=0$,则称 λ 为$(\hat{E},H)$的一个广义特征值.

定义 2[2]. 记 $N^{\sim}(s)=N^{\mathrm{T}}(-s)$. 则传递函数 N 称为内矩阵(外矩阵),如果 $N\in RH_\infty$且 $N^{\sim}N=I(NN^{\sim}=I)$.

在(E,A)正则且无脉冲的条件下,存在可逆矩阵 P 和 Q 使得

$$PEQ = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad PAQ = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_r \end{bmatrix} \tag{3}$$

记 $\hat{C}=CQP$，$\hat{B}=QPB$. 相似于文献[4]中定理 2 的证明，有如下性质.

引理 1. 如果系统(2)是容许的且 R-能观(或 R-能控)，$M(s)$是严格真的，则

$$\| M(s) \|_2^2 = \mathrm{tr}\{B^{\mathrm{T}}VB\}(\text{或} = \mathrm{tr}\{CVC^{\mathrm{T}}\}) \tag{4}$$

其中，V 是如下广义 Lyapunov 方程

$$A^{\mathrm{T}}VE + E^{\mathrm{T}}VA = - E^{\mathrm{T}}\hat{C}^{\mathrm{T}}\hat{C}E(\text{或 } AVE^{\mathrm{T}} + EVA^{\mathrm{T}} = - E\hat{B}\hat{B}^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}}) \tag{5}$$

满足 $\mathrm{rank}(V)=\deg\det(sE-A)=r$ 的唯一半正定解.

引理 2[5]. 设系统(2)正则且无脉冲，(E,A,B)是可稳定的，$(\hat{E},H)$在虚轴上没有特征值. 则存在矩阵 X 满足如下 H_2-GARE

$$A^{\mathrm{T}}X + X^{\mathrm{T}}A - X^{\mathrm{T}}BB^{\mathrm{T}}X + C^{\mathrm{T}}C = 0,\quad E^{\mathrm{T}}X = X^{\mathrm{T}}E \geqslant 0 \tag{6}$$

且$(E,A-BB^{\mathrm{T}}X)$是容许的.

考虑广义系统

$$E\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}(t) + B\boldsymbol{u}(t),\quad \boldsymbol{y}(t) = C\boldsymbol{x}(t) + D\boldsymbol{u}(t) \tag{7}$$

记 $\hat{H}=\begin{bmatrix} A-BR^{-1}D^{\mathrm{T}}C & -BR^{-1}B^{\mathrm{T}} \\ -C^{\mathrm{T}}(I-DR^{-1}D^{\mathrm{T}})C & -(A-BR^{-1}D^{\mathrm{T}}C)^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$.

引理 3[5]. 设(E,A)正则，(E,A,B)可稳定，$R=D^{\mathrm{T}}D>0$，$\begin{bmatrix} A-j\boldsymbol{w}E & B \\ C & D \end{bmatrix}$对任意 $\boldsymbol{w}$ 都列满秩. 则

1) $(E,A-BR^{-1}D^{\mathrm{T}}C,BP)$可稳定，其中 P 非奇异且满足 $PP^{\mathrm{T}}=R^{-1}$；

2) $(\hat{E},\hat{H})$在虚轴上没有特征值.

由引理 3 知，条件 A1)～A6)保证了如下两个 Hamilton 矩阵

$$H_2 = \begin{bmatrix} A - B_2R_1^{-1}D_{12}^{\mathrm{T}}C_1 & - B_2R_1^{-1}B_2^{\mathrm{T}} \\ - C_1^{\mathrm{T}}(I - D_{12}R_1^{-1}D_{12}^{\mathrm{T}})C_1 & - (A - B_2R_1^{-1}D_{12}^{\mathrm{T}}C_1)^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$$

$$J_2 = \begin{bmatrix} (A - B_1D_{21}^{\mathrm{T}}R_2^{-1}C_2)^{\mathrm{T}} & - C_2^{\mathrm{T}}R_2^{-1}C_2 \\ - B_1(I - D_{21}^{\mathrm{T}}R_2^{-1}D_{21})B_1^{\mathrm{T}} & - (A - B_1D_{21}^{\mathrm{T}}R_2^{-1}C_2) \end{bmatrix}$$

在虚轴上没有广义特征值，$(E,A-B_2R_1^{-1}D_{12}^{\mathrm{T}}C_1,B_2R_1^{-\frac{1}{2}})$可稳定且$(E,A-B_1D_{21}^{\mathrm{T}}R_2^{-1}C_2,R_2^{-\frac{1}{2}}C_2)$可检测. 又$(E,A-B_2R_1^{-1}D_{12}^{\mathrm{T}}C_1)$和$(E,A-B_1D_{21}^{\mathrm{T}}R_2^{-1}C_2)$正则且无脉冲[6]，因此由引理 2 可知，存在矩阵 X_2 和 Y_2 满足

$$A_0^{\mathrm{T}}X_2 + X_2^{\mathrm{T}}A_0 - X_2^{\mathrm{T}}B_0B_0^{\mathrm{T}}X_2 + C_0^{\mathrm{T}}C_0 = 0,\quad E^{\mathrm{T}}X_2 = X_2^{\mathrm{T}}E \geqslant 0 \tag{8a}$$

$$\overline{A}_0Y_2 + Y_2^{\mathrm{T}}\overline{A}_0^{\mathrm{T}} - Y_2^{\mathrm{T}}\overline{C}_0^{\mathrm{T}}\overline{C}_0Y_2 + \overline{B}_0\overline{B}_0^{\mathrm{T}} = 0,\quad EY_2 = Y_2^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}} \geqslant 0 \tag{8b}$$

其中，$A_0=A-B_2R_1^{-1}D_{12}^{\mathrm{T}}C_1$，$C_0^{\mathrm{T}}C_0=C_1^{\mathrm{T}}(I-D_{12}R_1^{-1}D_{12}^{\mathrm{T}})C_1$，$B_0B_0^{\mathrm{T}}=B_2R_1^{-1}B_2^{\mathrm{T}}$，$\overline{A}_0=A-B_1D_{21}^{\mathrm{T}}R_2^{-1}C_2$，$\overline{B}_0\overline{B}_0^{\mathrm{T}}=B_1(I-D_{21}^{\mathrm{T}}R_2^{-1}D_{21})B_1^{\mathrm{T}}$，$\overline{C}_0^{\mathrm{T}}\overline{C}_0=C_2^{\mathrm{T}}R_2^{-1}C_2$. 且$(E,A_0-B_0B_0^{\mathrm{T}}X_2)$和$(E,\overline{A}_0-Y_2^{\mathrm{T}}\overline{C}_0^{\mathrm{T}}\overline{C}_0)$是容许的. 记

$$F_2 = - R_1^{-1}(D_{12}^{\mathrm{T}}C_1 + B_2^{\mathrm{T}}X_2),\quad L_2 = - (B_1D_{21}^{\mathrm{T}} + Y_2^{\mathrm{T}}C_2^{\mathrm{T}})R_2^{-1}$$

$$A_{F_2} = A + B_2F_2,\ C_{1F_2} = C_1 + D_{12}F_2,\quad A_{L_2} = A + L_2C_2,\ B_{1L_2} = B_1 + L_2D_{21}$$

则(E,A_{F_2})和(E,A_{L_2})是容许的且方程(8a)，(8b)分别等价于

$$A_{F_2}^{\mathrm{T}}X_2 + X_2^{\mathrm{T}}A_{F_2} + C_{1F_2}^{\mathrm{T}}C_{1F_2} = 0,\quad E^{\mathrm{T}}X_2 = X_2^{\mathrm{T}}E \geqslant 0 \tag{9a}$$

$$A_{L_2}Y_2 + Y_2^{\mathrm{T}}A_{L_2}^{\mathrm{T}} + B_{1L_2}B_{1L_2}^{\mathrm{T}} = 0,\quad EY_2 = Y_2^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}} \geqslant 0 \tag{9b}$$

考虑系统(1)，容易证明下面几个引理.

引理 4. $u=K(s)y(s)$ 使 G 内部稳定的充要条件是该控制器使 G_{22} 内部稳定.

引理 5. 设控制器为 $K(s)$ 且 $(I-G_{22}K)^{-1}$ 存在. 则从 w 到 z 的闭环传递函数为

$$T_{zw}(s)=F_l(G,K)=G_{11}+G_{12}K(I-G_{22}K)^{-1}G_{21}$$

其中，$F_l(G,K)$ 为 G 和 K 的 LFT. 若控制器 $K(s)$ 的状态空间实现为 $\left\{E,\left[\begin{array}{c:c}A_k & B_k\\ \hdashline C_k & D_k\end{array}\right]\right\}$，则从 w 到 z 的闭环传递函数 $T_{zw}(s)$ 为

$$\left\{\begin{bmatrix}E & 0\\ 0 & E\end{bmatrix},\left[\begin{array}{cc:c}A+B_2F_LD_kC_2 & B_2F_LC_k & B_1+B_2F_LD_kD_{21}\\ B_kE_LC_2 & A_k+B_kE_LD_{22}C_k & B_kE_LD_{21}\\ \hdashline C_1+D_{12}F_LD_kC_2 & D_{12}F_LC_k & D_{11}+D_{12}F_LD_kD_{21}\end{array}\right]\right\}$$

其中，$E_L=(I-D_{22}D_k)^{-1}$，$F_L=(I-D_kD_{22})^{-1}$.

记 $G_c(s)=\left\{E,\left[\begin{array}{c:c}A_{F_2} & I\\ \hdashline C_{1F_2} & 0\end{array}\right]\right\}$，$G_f(s)=\left\{E,\left[\begin{array}{c:c}A_{L_2} & B_{1L_2}\\ \hdashline I & 0\end{array}\right]\right\}$.

引理 6. 在假设 A1)～A6)的条件下，设 $U,V\in RH^\infty$ 且有如下定义

$$U=\left\{E,\left[\begin{array}{c:c}A_{F_2} & B_2R_1^{-\frac{1}{2}}\\ \hdashline C_{1F_2} & D_{12}R_1^{-\frac{1}{2}}\end{array}\right]\right\},\quad V=\left\{E,\left[\begin{array}{c:c}A_{L_2} & B_{1L_2}\\ \hdashline R_2^{-\frac{1}{2}}C_2 & R_2^{-\frac{1}{2}}D_{21}\end{array}\right]\right\}$$

则 U 是内矩阵，V 是外矩阵，$U^{\sim}G_c\in RH_2^{\perp}$ 且 $G_fV^{\sim}\in RH_2^{\perp}$.

3　主要结果

定理 1. 假设 A1)～A6)成立. 设存在 F 和 L 使得 $(E,A+B_2F)$ 和 $(E,A+LC_2)$ 是容许的，$(E,A+B_2F+LC_2+LD_{22}F)$ 正则. 则使得 G 内部稳定的所有控制器可表示为从 y 到 u 的传递矩阵 $K(s)=F_l(J,Q)$

其中
$$J=\left\{E,\left[\begin{array}{c:cc}A+B_2F+LC_2+LD_{22}F & -L & B_2+LD_{22}\\ \hdashline F & 0 & I\\ -(C_2+D_{22}F) & I & -D_{22}\end{array}\right]\right\}$$

而 $Q\in RH_\infty$ 且 $I+D_{22}Q(\infty)$ 非奇异. 进一步地，所有从 w 到 z 的闭环传递矩阵为

$$F_l(T,Q)=\{T_{11}+T_{12}QT_{21}:Q\in RH_\infty,\ I+D_{22}Q(\infty)\ \text{非奇异}\}$$

其中 T 由下式给出

$$T=\begin{bmatrix}T_{11} & T_{12}\\ T_{21} & T_{22}\end{bmatrix}=\left\{\begin{bmatrix}E & 0\\ 0 & E\end{bmatrix},\left[\begin{array}{cc:cc}A+B_2F & -B_2F & B_1 & B_2\\ 0 & A+LC_2 & B_1+LD_{21} & 0\\ \hdashline C_1+D_{12}F & -D_{12}F & D_{11} & D_{12}\\ 0 & C_2 & D_{21} & 0\end{array}\right]\right\}$$

证明. 设控制器 $K=F_l(J,Q)$ 且 $Q=\left\{E,\left[\begin{array}{c:c}A_q & B_q\\ \hdashline C_q & D_q\end{array}\right]\right\}\in RH_\infty$. 对由引理 5 所得的闭环系统作相似变换并化简得

$$T_{zw}=\left\{\begin{bmatrix}E&0&0\\0&E&0\\0&0&E\end{bmatrix},\left[\begin{array}{ccc:c}A+B_2F&B_2(D_qC_2-F)&B_2C_q&B_1+B_2D_qD_{21}\\0&A+LC_2&0&B_1+LD_{21}\\0&B_qC_2&A_q&B_qD_{21}\\\hdashline C_1+D_{12}F&D_{12}(D_qC_2-F)&D_{12}C_q&D_{11}+D_{12}D_qD_{21}\end{array}\right]\right\}=$$

$$F_l(T,Q)=T_{11}+T_{12}Q(I-T_{22}Q)^{-1}T_{21}=T_{11}+T_{12}QT_{21}$$

于是，闭环系统矩阵为$\begin{bmatrix}A+B_2F&B_2(D_qC_2-F)&B_2C_q\\0&A+LC_2&0\\0&B_qC_2&A_q\end{bmatrix}$，则$G$内部稳定.

其次，设$K(s)$是G的任意稳定化控制器且

$$\hat{J}=\left\{E,\left[\begin{array}{c:cc}A&-L&B_2\\\hdashline -F&0&I\\C_2&I&D_{22}\end{array}\right]\right\}=\begin{bmatrix}M_{11}(s)&M_{12}(s)\\M_{21}(s)&M_{22}(s)\end{bmatrix}$$

由引理4知K使$G_{22}(=M_{22}(s))$内部稳定，从而使$\hat{J}$内部稳定，即$F_l(\hat{J},K)\in RH_\infty$.

设$Q_0=F_l(\hat{J},K)\in RH_\infty$，$K=\left\{E,\left[\begin{array}{c:c}A_k&B_k\\\hdashline C_k&D_k\end{array}\right]\right\}$，则同样由引理5得

$$F_l(J,Q_0)=\left\{\begin{bmatrix}E&0&0\\0&E&0\\0&0&E\end{bmatrix},\left[\begin{array}{ccc:c}A+LC_2&\tilde{A}_{13}&\tilde{A}_{12}&\tilde{B}_1\\0&A_k&\tilde{A}_{32}&B_k\\0&0&A+B_2F&0\\\hdashline 0&C_k&\tilde{C}_2&D_k\end{array}\right]\right\}=\left\{E,\left[\begin{array}{c:c}A_k&B_k\\\hdashline C_k&D_k\end{array}\right]\right\}=K$$

由此表明，任意稳定控制器都可表示为形如$F_l(J,Q_0)$，$Q_0\in RH_\infty$. 证毕.

现在考虑如下广义系统

$$G(s)=\left\{E,\left[\begin{array}{c:cc}A&B_1&B_2\\\hdashline C_1&0&D_{12}\\C_2&D_{21}&0\end{array}\right]\right\}\tag{10}$$

设可逆矩阵P_F,Q_F和P_L,Q_L分别使系统(E,A_{F_2})和(E,A_{L_2})受限等价于形如(3)的分解形式. 记$\hat{A}_2=A+B_2F_2+L_2C_2$，$\hat{C}_{1F_2}=C_{1F_2}Q_FP_F$，$\hat{B}_{1L_2}=Q_LP_LB_{1L_2}$.

定理2. 在假设A1)～A6)的条件下，设$(E,\hat{A}_2)$是正则的，且G_c和G_f都是严格真的. 则存在唯一的最优控制器

$$K_{opt}(s)=\left\{E,\left[\begin{array}{c:c}\hat{A}_2&-L_2\\\hdashline F_2&0\end{array}\right]\right\}\tag{11}$$

进而，若$(E,A_{F_2},C_{1F_2})R$-能观且$(E,A_{L_2},B_{1L_2})R$-能控，则

$$\min\|T_{zw}\|_2^2=\mathrm{tr}(B_1^{\mathrm{T}}V_FB_1)+\mathrm{tr}(R_1F_2V_LF_2^{\mathrm{T}})\tag{12}$$

其中$V_F\geqslant 0$和$V_L\geqslant 0$分别是如下Lyapunov方程

$$A_{F_2}^{\mathrm{T}}V_FE+E^{\mathrm{T}}V_FA_{F_2}=-E^{\mathrm{T}}\hat{C}_{1F_2}^{\mathrm{T}}\hat{C}_{1F_2}E\tag{13a}$$

$$A_{L_2}V_LE^{\mathrm{T}}+EV_LA_{L_2}^{\mathrm{T}}=-E\hat{B}_{1L_2}\hat{B}_{1L_2}^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}}\tag{13b}$$

满足$\mathrm{rank}(V_F)=\deg\det(sE-A_{F_2})$和$\mathrm{rank}(V_L)=\deg\det(sE-A_{L_2})$的唯一半正定解.

证明. 由定理1得，系统(10)的所有稳定化控制器为$K(s)=F_l(M_2,Q)$，$Q\in RH_\infty$且$T_{zw}=F_l(N,Q)$，其中

$$M_2(s)=\left\{E,\begin{bmatrix}\hat{A}_2 & -L_2 & B_2\\ F_2 & 0 & I\\ -C_2 & I & 0\end{bmatrix}\right\},\ N=\left\{\begin{bmatrix}E & 0\\ 0 & E\end{bmatrix},\begin{bmatrix}A_{F_2} & -B_2F_2 & B_1 & B_2\\ 0 & A_{L_2} & B_{1L_2} & 0\\ C_{1F_2} & -D_{12}F_2 & 0 & D_{12}\\ 0 & C_2 & D_{21} & 0\end{bmatrix}\right\}$$

注意到

$$N_{11}(s)=G_cB_1-G_cB_2F_2G_f-D_{12}F_2G_f=G_cB_1-UR_1^{\frac{1}{2}}F_2G_f$$

$$N_{12}(s)=G_cB_2+D_{12}=UR_1^{\frac{1}{2}},\quad N_{21}(s)=C_2G_f+D_{21}=R_2^{\frac{1}{2}}V$$

则

$$T_{zw}=N_{11}(s)+N_{12}(s)QN_{21}(s)=G_cB_1-UR_1^{\frac{1}{2}}F_2G_f+UR_1^{\frac{1}{2}}QR_2^{\frac{1}{2}}V$$

由引理 6 知 G_cB_1 和 U 是正交的且 G_f 和 V 也是正交的,于是

$$\| T_{zw}\|_2^2=\|G_cB_1\|_2^2+\|R_1^{\frac{1}{2}}F_2G_f\|_2^2+\|R_1^{\frac{1}{2}}QR_2^{\frac{1}{2}}\|$$

因此当 $Q=0$ 时控制器为最优,即式(11)是唯一的最优控制器.

若(E,A_{F_2},C_{1F_2})是 R-能观的且(E,A_{L_2},B_{1L_2})是 R-能控的,进而由引理 1 得

$$\min\|T_{zw}\|_2^2=\mathrm{tr}(B_1^{\mathrm{T}}V_FB_1)+\mathrm{tr}(R_1F_2V_LF_2^{\mathrm{T}})$$ 证毕.

注 1[2]. 定理 2 考虑了 $D_{11}=0$ 且 $D_{22}=0$. $D_{11}=0$ 使得 H_2 问题适定; $D_{22}=0$ 的假设不失一般性,若 $D_{22}\neq0$,只需将控制器 K 替换为 $K_D=K(I+D_{22}K)^{-1}$即可.

4 仿真算例

考虑满足定理 2 条件的如下系统

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&1&2\end{bmatrix},\quad E=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\quad B_1=\begin{bmatrix}1&-1\\0&0\\0&0\end{bmatrix},\quad B_2=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$C_1=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\end{bmatrix},\quad C_2=\begin{bmatrix}1&0&1\end{bmatrix},\quad D_{12}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\quad D_{21}=\begin{bmatrix}0&1\end{bmatrix}$$

根据文献[5]算法,计算得

$$X_2=\begin{bmatrix}8.472&0&0\\-1&-0.5&0\\-4.236&0&0\end{bmatrix},\quad Y_2=\begin{bmatrix}4.236&0&0\\0&0&0\\-4.472&0&4\end{bmatrix}$$

分别为(8a)和(8b)的解.于是有

$$F_2=\begin{bmatrix}-4.236&-1&0\end{bmatrix},\quad L_2=\begin{bmatrix}1.236&0&-4\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$A_{F_2}=\begin{bmatrix}-3.236&0&1\\0&1&0\\-4.236&0&2\end{bmatrix},\quad A_{L_2}=\begin{bmatrix}2.236&1&2.236\\0&1&0\\-4&1&-2\end{bmatrix}$$

$$C_{1F_2}=\begin{bmatrix}1&1&0\\-4.236&0&0\end{bmatrix},\quad B_{1L_2}=\begin{bmatrix}1&0.236\\0&0\\0&-4\end{bmatrix},\quad \hat{A}_2=\begin{bmatrix}-2&0&2.236\\0&1&0\\-8.236&0&-2\end{bmatrix}$$

则最优控制器为

$$K_{opt}(s)=\left\{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\ \left[\begin{array}{ccc:c}-2&0&2.236&-1.236\\0&1&0&0\\-8.236&0&-2&4\\\hdashline -4.236&-1&0&0\end{array}\right]\right\}$$

进一步计算得

$$V_F=\begin{bmatrix}8.472&0&-4.236\\0&0&0\\-4.236&0&2.118\end{bmatrix},\quad V_L=\begin{bmatrix}4.236&0&-8.472\\0&0&0\\-8.472&0&16.944\end{bmatrix}$$

分别为(13a)和(13b)满足条件的解. 则有

$$\min\|T_{zw}\|_2^2=\mathrm{tr}(B_1^{\mathrm{T}}V_FB_1)+\mathrm{tr}(R_1F_2V_LF_2^{\mathrm{T}})=92.957$$

5 结束语

本文主要研究连续广义系统的标准 H_2 最优控制器的设计问题. 利用线性分式变换方法给出所有稳定化控制器的 LFT 形式,借助于 H_2-GARE 给出标准 H_2 最优控制器的设计,并给出计算最优 H_2 范数的状态空间方法. 本文从分析到控制给出了完整的设计.

参 考 文 献

1 Saberi A, Sannuti P, Chen B M. H_2 Optimal Control. London: Prentice Hall, 1995. 67～88

2 Zhou K M, Doyle J C. Essentials of Robust Control. New Jersey: Prentice Hall, 1998. 165～267

3 Takaba K. H_2 output feedback control for descriptor systems. *Automatica*, 1998, **34**(7): 841～850

4 杨冬梅, 张庆灵, 陈跃鹏. 广义线性系统的 H_2 性能分析. 控制与决策, 2001, **16**(6): 962～964

5 Yang D M, Zhang Q L, Zhang G F. H_2 algebraic Riccati equation for descriptor systems. In: Arlington: 2001 American Control Conference, 2001, 2937～2942

6 Wang H S, Yung C F, Chang F R. Boundedreal lemma and H_2 control for descriptor systems. *IEE Proceedings of Control Theory and Application*, 1998, **145**(3): 316～322

7 Zhang Q L, Lam J, Zhang L Q. Generalized Lyapunov equations for analyzing the stability of descriptor systems. In: 14th Triennial World Congress of IFAC, 1999, 19～24

杨冬梅 分别于 1988 年和 1996 年在天津大学和东北大学获学士和硕士学位,现为东北大学信息科学与工程学院博士研究生,副教授. 研究领域为广义系统,H_2/H_∞控制理论及应用.

张庆灵 1995 年在东北大学获博士学位,1997 年完成西北工业大学博士后工作,现为东北大学理学院院长,教授,博士生导师. 研究领域为广义系统,鲁棒控制,分散控制,H_2/H_∞控制等.

沙成满 1988 年在长春地质学院获硕士学位,现为东北大学博士研究生,副教授. 研究领域为结构控制,H_2/H_∞控制.