一种非递推系统辨识算法的探讨

谢新民　陈伯成　李英杰
（清　华　大　学）

摘　要

本文提出一种称为“信息压缩阵”的新的辨识算法，可用于最小二乘类非递推的辨识. 由于这种算法能够同时给出参数的估计值和损失函数，所以计算量小于其它算法. 仿真实例表明，这种辨识算法的性能满足要求.

一、信息压缩阵的定义和特性

单输入-单输出线性定常系统的差分方程可表示为

$$A(q^{-1})y_k = B(q^{-1})U_k + e_k. \tag{1-1}$$

其中 $A(q^{-1}) = 1 + a_1q^{-1} + a_2q^{-2} + \cdots + a_nq^{-n}, B(q^{-1}) = b_0 + b_1q^{-1} + \cdots + b_nq^{-n}$. q^{-1} 为迟延算子；$a_i(i = 1, 2, \cdots n), b_j(j = 0, 1, 2, \cdots n)$ 为系统的参数；n 为系统的阶次；y_k, u_k, e_k 分别是 k 时刻的输出、输入和噪声. 式(1-1)的矩阵形式为

$$Z_{n+1} = H_n\theta_n + W_{n+1}. \tag{1-2}$$

其中 $Z_{n+1} = (y_{n+1}, y_{n+2}, \cdots, y_{n+1+N})^\tau$, $H_n = (U_1, Z_1, U_2, Z_2 \cdots U_n, Z_n, U_{n+1})$, $U_i = (u_i, u_{i+1}, \cdots, u_{i+N-1})^\tau$, $i = 1, 2 \cdots, n+1$, $W_{n+1} = (e_{n+1}, e_{n+2}, \cdots e_{n+N})^\tau$, $\theta_n = (b_n, -a_n, b_{n-1}, -a_{n-1}, \cdots, b_1, -a_1, b_0)^\tau$, N为行数与数据长度有关. 如果 e_i 为白噪声序列，式(1-2)的最小二乘解为

$$\hat{\theta}_n = (H_n^\tau H_n)^{-1}H_n^\tau Z_{n+1}. \tag{1-3}$$

这时损失函数 J_n 为最小，用式(1-4)表示

$$J_n = \tilde{Z}_{n+1}^\tau \tilde{Z}_{n+1} = Z_{n+1}^\tau Z_{n+1} - Z_{n+1}^\tau H_n(H_n^\tau H_n)^{-1}H_n^\tau Z_{n+1}. \tag{1-4}$$

现我们把符号定义改动一下，令 $h'_{i-1} = (u_{i-n}, y_{i-n}, \cdots y_{i-1}, u_i)^\tau$, $H_n = (h'_n, h'_{n+1}, \cdots, h'_{n+N-1})^\tau = [X_{n-1} \vdots U_{n+1}]$, $X_n = [H_n \vdots Z_{n+1}]$, $S_n = X_n^\tau X_n$, $S_{nu} = H_n^\tau H_n$，可得

$$S_n = \begin{bmatrix} S_{nu} & H_n^\tau Z_{n+1} \\ Z_{n+1}^\tau H_n & Z_{n+1}^\tau Z_{n+1} \end{bmatrix}, \qquad S_{nu} = \begin{bmatrix} S_{n-1} & X_{n-1}^\tau U_{n+1} \\ U_{n+1}^\tau X_{n-1} & U_{n+1}^\tau U_{n+1} \end{bmatrix}. \quad (1\text{-}5),(1\text{-}6)$$

把式(1-5)和式(1-6)代入式(1-3)和式(1-4)中得

$$\hat{\theta}_n = S_{nu}^{-1}H_n^\tau Z_{n+1}, \tag{1-7}$$

$$J_n = Z_{n+1}^\tau Z_{n+1} - Z_{n+1}^\tau H_n S_{nu}^{-1} H_n^\tau Z_{n+1}. \tag{1-8}$$

本文原稿于1985年9月3日收到.

如果 S_n 阵可逆，其逆矩阵为

$$S_n^{-1}=(X_n^\tau X_n)^{-1}=\begin{bmatrix} S_{nu} & H_n^\tau Z_{n+1} \\ Z_{n+1}^\tau H_n & Z_{n+1}^\tau Z_{n+1}\end{bmatrix}^{-1}. \tag{1-9}$$

利用分块矩阵求逆公式，式(1-9)进一步可得

$$S_n^{-1}=\begin{bmatrix} S_{nu}^{-1} & 0 \\ -J_n^{-1}\hat{\theta}_n^\tau & J_n^{-1}\end{bmatrix}. \tag{1-10}$$

仿最小二乘定义作以下记号：$\hat{\theta}_{nu}=(X_{n-1}^\tau X_{n-1})^{-1}X_{n-1}^\tau U_{n+1}$，$\widetilde{U}_{n+1}=U_{n+1}-x_{n-1}\hat{\theta}_{nu}$，$J_{nu}=\widetilde{U}_{n+1}^\tau\widetilde{U}_{n+1}=U_{n+1}^\tau U_{n+1}-U_{n+1}^\tau x_{n-1}(x_{n-1}^\tau x_{n-1})^{-1}x_{n-1}^\tau U_{n+1}$，以及

$$S_{nu}^{-1}=\begin{bmatrix} S_{n-1}^{-1} & 0 \\ -J_{nu}^{-1}\hat{\theta}_{nu} & J_{nu}^{-1}\end{bmatrix}, \tag{1-11}$$

我们称 S_n 阵为信息压缩阵．它含有 S_{nu} 阵和 $H_n^\tau Z_{n+1}$ 向量，具有计算 n 阶及 n 阶以下各阶的参数和损失函数的全部信息，故称 S_n 为信息压缩阵．由式(1-5)知

$$S_n=X_n^\tau X_n=\begin{bmatrix} S_{nu} & H_n^\tau Z_{n+1} \\ Z_{n+1}^\tau H_n & Z_{n+1}^\tau Z_{n+1}\end{bmatrix}.$$

经过初等变换可得

$$S_n=\begin{bmatrix} S_{nu} & H_n^\tau Z_{n+1} \\ 0 & J_n\end{bmatrix},$$

而 S_{nu} 由式(1-6)经过初等变换可得

$$S_{nu}=\begin{bmatrix} S_{n-1} & X_{n-1}^\tau U_{n+1} \\ 0 & J_{nu}\end{bmatrix},$$

并代人 S_n 的式中，然后又求 S_{n-1} 和 $S_{n-1,u}$，一直变换下去，最后可将 S_n 阵化为一上三角阵．

$$S_n=\begin{bmatrix} J_{0u} & \cdots & \cdots & \cdots \\ & J_0 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & J_{nu} & \\ & & & J_n\end{bmatrix}. \tag{1-12}$$

这样，由 S_n 阵的对角线得到了 n 及 n 阶以下各阶的损失函数 $(J_0, J_1, \cdots J_n)$，系统的判阶就解决了，其中跃变较大的损失函数的阶次就是系统的阶次．另外，从理论上避免了矩阵求逆的病态问题，因为当 S_n 阵中第 i 阶发生奇异，则 $J_i\approx 0$，所以由 S_n 的上三角阵可以判定是否奇异．如上面 S_n 的变换一样，可将式(1-10)的 S_n^{-1} 化为下三角阵

$$S_n^{-1}=\begin{bmatrix} J_{0u}^{-1} & & & & 0 \\ & J_0^{-1} & & & \\ -J_{1u}^{-1}\hat{\theta}_{1u}^\tau & & J_{1u}^{-1} & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ & & & J_{nu}^{-1} & \\ -J_n^{-1}\hat{\theta}_n^\tau & & & & J_n^{-1}\end{bmatrix}. \tag{1-13}$$

由式(1-13)按行可提出各阶的参数估计值 $\hat{\theta}_1\cdots\hat{\theta}_n$ 和损失函数值．对应于给定的一批实验数据，其各阶参数估计值和损失函数是确定的，它们之间关系可由式(1-13)一次给出．因此，系统定阶和参数辨识的计算量要比其它辨识算法小．仿真实验表明，这种一次性辨识算法计算量甚至比递推算法小．

二、仿 真 实 例

若模型差分方程为

$$y_{k+1}=1.5y_k-0.7y_{k-1}+u_k+0.5u_{k-1}+e_k,$$

采用数据长度为 400，e_k 为方差是 0.2 的白噪声，一次性辨识算法结果如表 1 所示.

表 1

		$-a_1$	b_1	$-a_2$	b_2	$-a_3$	b_3	$-a_4$	b_4	J	
实际	参数	1.5	1	−0.7	0.5						
一阶	$\hat{\theta}_1$	0.901	1.006							1131.50	J_1
二阶	$\hat{\theta}_2$	1.508	1.017	−0.703	0.503					14.17	J_2
三阶	$\hat{\theta}_3$	1.579	1.016	−0.807	0.430	0.047	−0.0467			14.68	J_3
四阶	$\hat{\theta}_4$	1.578	1.016	−0.785	0.431	0.0164	−0.0675	0.0135	−0.0143	14.68	J_4

由表 1 可知，S_n^{-1} 的下三角阵同时给出一至四阶参数估计值和损失函数. 损失函数跃变值为 J_2，所以判定系统为二阶的和实际系统一致，而且二阶参数估计值和参数真值很接近. 说明信息压缩阵的辨识算法可用，性能完全符合要求.

ON A NEW "ONE SHOT" IDENTIFICATION ALGORITHM

Xie Xinmin　Chen Bocheng　Li Yingjie

(*Tsinghua University*)

Abstract

A new identification algorithm named "Information-Compression-Matrix" is presented in this paper. It can be applied to the "one shot" identification technique based on the least squares identification. Because the new algorithm is able to give us estimations of the parameters and loss functions simultaneously, its computing time is less than that of other algorithms. And some simulation examples have shown that the performance is quite satisfactory.