第6卷 第4期 自动化学报 Vol. 6, No. 4
1980年10月 ACTA AUTOMATICA SINICA Oct., 1980

人口发展的双线性最优控制*

宋 健

摘　要

本文根据我国的实际情况,建立了人口发展过程的动态模型,定义了各种函数关系,指出了连续模型和离散模型之间的转换关系.以育龄妇女平均生育率作为控制量,找到了为实现理想的人口发展过程的最优控制所应满足的必要条件,从而得到了关于控制量受限制情况下,双线性最优控制的计算方法.

对人口发展的研究,已成为整个人类社会所密切关心的问题.定量研究我国人口发展的控制问题,尤为我国现代化所急需.和一切其它社会现象一样,人口发展过程是一种物质的运动过程,它是可以定量描述的,是可以计算和模拟的,也是可以控制的.人口发展过程是一个真正的动态过程,可以用微分方程来描述,这已为实践所证明.本文的目的是应用控制论的方法讨论人口发展过程的最优控制问题.首先,我们在前人工作的基础上[1-3],建立了一个比较适合我国具体情况的数学模型,作为人口预报和人口控制的基础.如果把人口发展过程看成是一种社会现象,那么我们将试图把控制论的方法应用到社会现象的研究上去.事实证明,控制论的方法能够为人口理论提供新的工具和新的观点,从而得到传统人口统计学中所难以得到的关于人口发展的数据和信息.

本文的第一节中,我们简述人口发展问题的命题和人口发展方程式的转换,离散方程式的基本形式和变量定义等.第二节中讨论人口发展过程最优控制的命题.第三节将讨论双线性最优控制问题的必要条件和计算方法.

一、人口发展方程

我们沿用[4]中的符号,令 r 表示年龄, t 表示时间(年代),用 $p(r,t)$ 表示一个社会(国家,省市或地区)中 t 时刻的人口年龄密度函数,用 $\mu(r,t)$ 表示相对死亡率, $f(r,t)$ 表示移民率.一个社会中,如果包含的人口数足够多,人口发展规律满足下列一阶线性偏微分方程及初始条件和边界条件:

$$\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{\partial p}{\partial r}=-\mu(r,t)p+f(r,t),\quad t>0,\quad r>0$$

$$p(r,0)=p_0(r),$$

$$p(0,t)=\varphi(t)=u(t)N(t) \tag{1.1}$$

* 本文修改稿于5月27日收到.

式内

$$N(t)=\int_0^{\infty}p(r,t)\,dr \tag{1.2}$$

是 t 时刻社会人口总数，$u(t)$ 是人口相对出生率，$\varphi(t)$ 是人口绝对出生率，$p_0(r)$ 是 $t=0$ 时刻社会人口年龄分布密度,是由人口调查得到的统计初值.

定义函数 $K(r,t)$ 为 t 时刻社会中 r 岁的妇女人口数占该岁人口总数的比例. 用 $l(r,t)$ 表示社会中 r 岁的妇女全体所生婴儿总数与前者的比. 那么，t 时刻单位时间内社会全体妇女生育的婴儿总数为

$$\varphi(t)=\int_{r_1}^{r_2}l(r,t)\,K(r,t)\,p(r,t)\,dr, \tag{1.3}$$

式内 $[r_1,r_2]$ 为育龄妇女的生育年龄区间. 再定义规格化函数

$$h(r,t)=\frac{l(r,t)}{\int_{r_1}^{r_2}l(r,t)dr},\quad \beta(t)=\int_{r_1}^{r_2}l(r,t)\,dr. \tag{1.4}$$

$h(r,t)$ 称为 t 时刻社会妇女生育模式，$\beta(t)$ 表示 t 时刻的社会条件下,一个妇女(一生)平均生育胎数,在人口统计学中有时称为比生育率. 这样,(1.3)式可以改写成为

$$\varphi(t)=\beta(t)\int_{r_1}^{r_2}K(r,t)\,h(r,t)\,p(r,t)\,dr. \tag{1.5}$$

方程式(1.1)和(1.5)联立起来就构成一个完整的人口发展方程组.

不难理解,为了控制人口的发展,主要的办法是控制妇女平均生育率 $\beta(t)$. 人口状态的变迁,主要取决于死亡率和出生率,对于一个人口足够多的社会,移民率 $f(r,t)$ 对人口发展过程的影响极小. 从控制论的观点来看,人口发展方程(1.1)和(1.5)是一个具有正反馈的系统,控制参数 B(t) 是系统的反馈放大系数.

为了数字计算的方便,现将上述方程离散化,便得到人口发展方程的离散模型. 用整数 $i=0,1,2,\cdots,m$ 表示周岁数,记

$$x_i(t)=\int_i^{i+1}p(r,t)dr,\ i=0,1,\cdots,m,\ t=0,1,2,\cdots, \tag{1.6}$$

它表示社会中年满 i 周岁但不足 $i+1$ 周岁的人口组中的人口数,用 m 表示社会人口中所能活到的最大年龄. 再令

$$f_i(t)=\int_i^{i+1}f(r,t)\,dr,\ i=0,1,2,\cdots,m, \tag{1.7}$$

表示 t 年代移民中(迁出或迁入)年满 i 周岁人数. 再定义 $\mu_i(t)$ 为

$$\Delta t\cdot\int_i^{i+1}\mu(r,t)\,p(r,t)\,dr=\mu_i(t)\,x_i(t),\ i=0,1,\cdots,m, \tag{1.8}$$

式内 Δt 取一年.

注意到在(1.1)式中 r 和 t 是两个变化率相同的变量,即

$$\frac{dr}{dt}=1. \tag{1.9}$$

对(1.1)中第一式两端乘以 Δt 后有

$$p(r+\Delta r,t+\Delta t)-p(r,t)=-\mu(r,t)\,p(r,t)\,\Delta t+f(r,t)\,\Delta t,$$

全式对 r 在区间 $[i,i+1)$ 中积分后有（取 $\Delta t=\Delta r=1$ 年）

$$x_{i+1}(t+1)-x_i(t)=-\mu_i(t)\,x_i(t)+f_i(t),\ i=0,1,\cdots,m.\ \ t=0,1,\cdots. \tag{1.10}$$

在不考虑移民项时，即令 $f_i(t)=0$，按龄死亡率 $\mu_i(t)$ 的定义可改写为

$$\mu_i(t)=\frac{x_i(t)-x_{i+1}(t+1)}{x_i(t)},\ i=0,1,2,\cdots,m-1,\ \mu_m(t)=1. \tag{1.11}$$

这样定义的死亡率称为前向按龄死亡率。在人口统计学中还有另外两种死亡率 $\eta_i(t)$ 和 $\zeta_i(t)$，分别称作后向按龄死亡率和年中按龄死亡率：

$$\eta_{i+1}(t)=\frac{x_i(t)-x_{i+1}(t+1)}{x_{i+1}(t+1)},\ \zeta_i(t)=\frac{x_i(t)-x_{i+1}(t+1)}{\frac{1}{2}(x_i(t)+x_{i+1}(t+1))}.$$

不难证明，三种死亡率的关系是

$$\mu_i(t)=\frac{\eta_{i+1}(t)}{1+\eta_{i+1}(t)},\ \ \zeta_i(t)=\frac{2\eta_{i+1}(t)}{2+\eta_{i+1}(t)}. \tag{1.12}$$

在用（1.10）式作人口发展过程计算时，需要用前向按龄死亡率 $\mu_i(t)$，而不是 $\eta_i(t)$ 或 $\zeta_i(t)$。

为了建立完整的离散模型，还必须考虑婴儿死亡率对人口发展过程的影响．设 $\mu_{00}(t)$ 表示 t 年代（在标准统计时刻）婴儿死亡率，到年底存活下来的满周岁的婴儿总数记为 $x_0(t)$，

则有

$$x_0(t)=(1-\mu_{00}(t))\,\psi(t), \tag{1.13}$$

其中

$$\psi(t)=\int_{t-1}^{t}\varphi(\tau)d\tau.$$

不难推知，

$$\mu_{00}(t)=\frac{\eta_0(t)}{1+\eta_0(t)}, \tag{1.14}$$

$\eta_0(t)$ 是以存活到 t 年底婴儿总数为基数的婴儿死亡率。

归纳上述，再把(1.5)式也写成离散形式，即得到完整的离散方程组：

$$x_{i+1}(t+1)=(1-\mu_i(t))\,x_i(t)+f_i(t),\ i=0,1,\cdots m.\quad t=0,1,2,\cdots.$$

$$x_0(t)=(1-\mu_{00}(t))\beta(t)\sum_{i=r_1}^{r_2}K_i(t)\,h_i(t)\,x_i(t). \tag{1.15}$$

这就是人口学中熟知的 Leslie 模型。

为了书写方便，引进向量记法。定义向量

$$\boldsymbol{x}(t)=\{x_1(t),x_2(t),\cdots,x_m(t)\},\ \boldsymbol{f}(t)=\{f_0(t),f_1(t),\cdots,f_{m-1}(t)\}.$$

在方程组(1.15)中消去 $x_0(t)$ 后，则得向量方程式

$$\boldsymbol{x}(t+1)=A(t)\,\boldsymbol{x}(t)+\beta(t)\,B(t)\,\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{f}(t),\ \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0, \tag{1.16}$$

式内 $A(t),B(t)$ 为 $m\times m$ 阶矩阵

$$A(t)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1-\mu_1(t) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1-\mu_2(t) & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1-\mu_{m-1}(t) & 0 \end{pmatrix}$$

$$B(t)=\begin{pmatrix} b_1(t) & b_2(t) & \cdots & \cdots & b_m(t) \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$b_i(t)=(1-\mu_{00}(t))(1-\mu_0(t))K_i(t)\,h_i(t),\ i=1,2,\cdots,m \tag{1.17}$$

由于所有 $x_i(t)$ 都不小于零,矩阵 $A(t)$, $B(t)$ 的所有元也都不小于零, 故(1.16)式右端第二项可以看成是对人口状态的正反馈, 而妇女平均生育数 $\beta(t)$ 正是反馈的增益系数.

应用方程组 (1.1)—(1.5), 或者(1.15)式, 当给定妇女平均生育数 $\beta(t)$ 后,即可进行人口预报. 当然, 这时需要对死亡率 $\mu_i(t)$ 以及其它函数 $K_i(t)$, $h_i(t)$ 作某些适合我国实际情况的假定,并且还要给出 $t=0$ 时刻的人口初始状态,作为求解(1.16)的初始条件. 这样,我们证明了第一节中的连续模型和本节中的离散模型是等价的.

二、最优控制问题的实际意义

根据人口发展方程(1.1)—(1.5)或离散方程(1.15), 利用我国人口统计数据作初始条件, 我们曾对我国人口发展作了预报[4,5]. 为了使我国人口在 20 年内不超过 11 亿, 最优的控制方案将是在 20 年内普遍实行全国育龄妇女只生育一个孩子. 即便我们能在短期内实现这个目标,我国人口还将持续增长 25 年, 只有到 2005 年左右, 自然增长率才能降为零. 从这一观点来看, 20 年内最优控制 $\mathring{\beta}(t)$ 应为

$$\mathring{\beta}(t)=1.\quad 1980\text{ 年}\leqslant t\leqslant 2000\text{ 年}. \tag{2.1}$$

社会所能接受的妇女平均生育胎数应该不小于某一 β_0. 所以, 对控制量 $\beta(t)$ 的限制条件应为

$$\beta_0\leqslant\beta(t)\leqslant\beta_{cr} \tag{2.2}$$

其中 β_{cr} 是临界妇女生育率,当 $\beta(t)>\beta_{cr}$ 时, 人口总数 $N(t)$ 随着 t 的增大而无限增大[6]. 满足条件(2.2)的 $\beta(t)$ 的可能取值的全体记为

$$U=[\beta_0,\beta_{cr}]. \tag{2.3}$$

在人口发展问题中,我们不仅要注意人口总数的限制,还要注意到其它人口学中的指标不能超过某一限制. 例如, 社会抚养指数 $\rho(t)$ (每个劳动力平均抚养的非劳动力人数), 社会老化指数 $\omega(t)$ (即平均年龄与平均寿命之比) 等等. 这些指数的详细定义请参看文献[5]. 重要的是所有这些社会人口指数都是人口状态 $p(r,t)$ 或 $\boldsymbol{x}(t)$ 的线性或非线性函数. 一切满足人口指数限制的人口状态函数的全体记为 $\Omega(\boldsymbol{x}(t))=\Omega(t)$,

对人口状态变量的限制条件可记为

$$p(r,t)\in Q(t),$$

或

$$\boldsymbol{x}(t)\in Q(t). \tag{2.4}$$

为了使今后的人口发展能按照人们的计划进行，我们应该制定一种人口规划或称为人口目标，实际的人口发展过程应尽量接近这一人口目标．用 $p^*(r,t)$ 和 $\boldsymbol{x}^*(t)$ 表示理想的规划人口状态，与此相应的希望的人口总数记作 $N^*(t)$．于是系统的性能指标可写成

$$J(T)=\int_0^T\int_0^m(p(r,t)-p^*(r,t))^2\,dr\,dt, \tag{2.5}$$

或者

$$J(T)=\sum_{t=0}^{T-1}(\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}^*(t),\ \boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}^*(t)), \tag{2.6}$$

其中符号 $(\cdot,\cdot)$ 表示两个 m 维向量的内积．所谓人口发展过程的最优控制，就是求出一种妇女平均生育率 $\mathring{\beta}(t)$，$0\leqslant t\leqslant T$，它满足条件(2.3)，并使人口状态 $\mathring{p}(r,t)$ 或 $\mathring{x}(t)$ 满足条件(2.4)，同时使式(2.5)或(2.6)取极小值．这样的 $\mathring{\beta}(t)$ 就是人口系统的最优控制．

为了使上述命题具有准确的数学意义，还必须定义理想人口状态 $p^*(r,t)$ 或 $\boldsymbol{x}^*(t)$ 的具体形式．为此，我们采用人口学中“稳态社会”的人口分布作为理想目标[8]，在这种社会中，每年出生人数等于死亡人数(现在已有 26 个国家接近这种状态)，人口状态 $p(r,t)$ 已不随 t 而变化，记 $p(r,t)=p_s(r)$，相应的人口总数保持为一常数，$N_s(t)=\text{Const.}$，显然此时 $p_s(r)$ 满足以下方程

$$\frac{dp_s(r)}{dr}+\mu(r)p_s(r)=0,$$

它的解是

$$p_s(r)=p_0e^{-\int_0^r\mu(\rho)d\rho},$$

人口总数 $N_s(t)$ 为

$$N_s(t)=\int_0^{r_m}p_s(r)dr=p_0\int_0^{r_m}e^{-\int_0^r\mu(\rho)d\rho}dr.$$

右端积分恰是社会人口平均寿命 S[5]，由此得到

$$P_s(r)=\frac{N_s(t)}{S}e^{-\int_0^r\mu(\rho)d\rho}. \tag{2.7}$$

根据(2.7)式，我们取理想的规划人口状态 $p^*(r,t)$ 为

$$p^*(r,t)=\frac{N^*(t)}{S(t)}e^{-\int_0^r\mu(\rho)d\rho}. \tag{2.8}$$

依照(1.6)式的定义，离散的理想规划人口状态 $\boldsymbol{x}^*(t)$ 的每一分量 $x_i^*(t)$ 为

$$x_i^*(t)=\int_i^{i+1}p^*(r,t)\,dr,\ i=0,1,\cdots,m. \tag{2.9}$$

在没有状态约束和控制约束的条件下，这个问题的研究，在文献[9]中基本得到了解

决. 下一节我们将用离散模型研究控制有约束情况下的最优控制问题.

三、控制受约束情况下的最优控制

为了便于计算，我们以离散模型为基础，只考虑妇女平均生育率 $\beta(t)$ 的限制条件(2.3),讨论最优控制 $\mathring{\beta}(t)$ (在(2.6)取极小值的意义下)所应满足的必要条件,从而为数值计算提供一种具体方法. 现将命题重述如下:

在 $[0, T]$ 时间内,根据人口规划 $\boldsymbol{x}^*(t)$, 求出最优平均生育率 $\mathring{\beta}(t)\in U$, 在 $\mathring{\beta}(t)$ 的控制作用下,使实际的人口状态 $\mathring{\boldsymbol{x}}(t)$ 满足人口发展方程

$$\mathring{\boldsymbol{x}}(t+1)=[A(t)+\mathring{\beta}(t)B(t)]\mathring{\boldsymbol{x}}(t), \ \mathring{\boldsymbol{x}}(0)=\boldsymbol{x}_0, \tag{3.1}$$

并使系统指标(2.6)取极小值,即

$$\mathring{J}(T)=\min_{\beta(t)\in U}\sum_{t=0}^{T-1}(\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}^*(t),\ \boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}^*(t))$$

$$=\min_{\beta(t)\in U}\sum_{t=0}^{T-1}(\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}^*(t))^\tau(\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}^*(t)) \tag{3.2}$$

其中 τ 表示向量的转置.

可以看出,这是一个典型的双线性最优控制问题. 在控制没有约束的情况下,可以用普通变分法解决. 下面我们将讨论控制有约束的情况.

引进新的变量 $\tilde{x}_0(t)=J(t)$,

$$\tilde{x}_0(t+1)=J(t+1)=\tilde{x}_0(t)+(\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}^*(t),\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}^*(t)), \tag{3.3}$$

把上式和(3.1)式联立起来. 设 $\{\mathring{\boldsymbol{x}}(t),\mathring{J}(t),\mathring{\beta}(t)\}$ 是上述问题的最优解. 现对 $\mathring{\beta}(t)$ 在 $t=t_j-1$ 处作微小的变化:

$$\beta(t)=\begin{cases}\mathring{\beta}(t), & t\neq t_j-1\\ \mathring{\beta}(t)+\varepsilon,\ (\mathring{\beta}(t)+\varepsilon)\in U, & t=t_j-1\end{cases} \tag{3.4}$$

用这样定义的 $\beta(t)$ 代入(3.1)式, $\mathring{\boldsymbol{x}}(t)$ 将变为 $\boldsymbol{x}(t)=\mathring{\boldsymbol{x}}(t)+\delta\boldsymbol{x}(t)$, 其中 $\delta\boldsymbol{x}(t)$ 满足下述方程式

$$\begin{aligned}&\delta\boldsymbol{x}(t+1)=[A(t)+\mathring{\beta}(t)B(t)]\delta\boldsymbol{x}(t),\ t\geqslant t_j\\ &\delta\boldsymbol{x}(t_j)=\varepsilon B(t_j-1)\mathring{\boldsymbol{x}}(t_j-1)\\ &\delta\boldsymbol{x}(t)=0,\forall t<t_j\end{aligned} \tag{3.5}$$

$\mathring{\beta}(t)$ 在 $t=t_j-1$ 点上的变分相当于 $t=t_j$ 时刻对最优状态 $\mathring{\boldsymbol{x}}(t_j)$ 赋予一个增量(3.5). 此时(3.3)式的变化是

$$\delta\tilde{x}_0(t+1)=\delta\tilde{x}_0(t)+2(\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}^*(t))^\tau\delta\boldsymbol{x}(t),\ \forall t\geqslant t_j. \tag{3.6}$$

再记 $\tilde{\boldsymbol{x}}(t)=\{\tilde{x}_0(t),x_1(t),\cdots,x_m(t)\}$, 则(3.5)和(3.6)式可写成

$$\delta\tilde{\boldsymbol{x}}'(t+1)=H(t)\,\delta\tilde{\boldsymbol{x}}(t) \tag{3.7}$$

其中

$$H(t)=\begin{pmatrix}1 & 2(\mathring{\boldsymbol{x}}(t)-\boldsymbol{x}^*(t))^\tau\\ 0 & A(t)+\mathring{\beta}(t)B(t)\end{pmatrix}.$$

引进共轭向量函数 $\tilde{\boldsymbol{\psi}}(t)=\{\psi_0(t),\psi_1(t),\cdots,\psi_m(t)\}$, 它是下述共轭方程式的某一解:

$$\tilde{\boldsymbol{\psi}}(t) = H^{\tau}(t)\,\tilde{\boldsymbol{\psi}}(t+1) \tag{3.8}$$

其中 $H^{\tau}(t)$ 是矩阵 $H(t)$ 的转置矩阵，

$$H^{\tau}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2(\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}^{*}(t)) & A^{\tau}(t)+\mathring{\beta}(t)B^{\tau}(t) \end{pmatrix}$$

容易检查,对任何时间 t，下述恒等式成立:

$$(\tilde{\boldsymbol{\psi}}(t+1), \delta\tilde{\boldsymbol{x}}(t+1)) = (\tilde{\boldsymbol{\psi}}(t), \delta\tilde{\boldsymbol{x}}(t)) \tag{3.9}$$

我们注意到由 (3.5) 式所确定的在 t_j-1 时刻状态向量 $\mathring{\boldsymbol{x}}(t)$ 的变化 $\delta\tilde{\boldsymbol{x}}(t)$ 的全体是一个凸集,因而当 $t=T$ 时，$\delta\tilde{\boldsymbol{x}}(T)$ 也是一个凸集,记为 V. 既然 $\mathring{\beta}(t)$，$\mathring{\boldsymbol{x}}(t)$ 是最优的控制和状态使 $J(T)$ 达到最小,那么在 $t=t_j-1$ 时刻对 $\mathring{\beta}(t)$ 的所有改变都应使 $J(T)$ 增大. 这就是说存在一个超平面通过点 $\{\mathring{J}(T), \mathring{\boldsymbol{x}}(T)\}$，它把凸集 V 完全隔在一边,而超平面的外法向量 $\tilde{\boldsymbol{y}}$ 的第一个分量必是小于零的数，$y_0<0$. 现令(3.8)中的变量在 $t=T$ 时刻等于 $\tilde{\boldsymbol{y}}$，即 $\tilde{\boldsymbol{\psi}}(T)=\boldsymbol{y}$. 又因为(3.8)是齐次方程组，无妨取 $\psi_0(T)=-1$，而其它分量尚须确定: $\tilde{\boldsymbol{\psi}}(T)=\{-1,\psi_1(T),\cdots,\psi_m(T)\}$. 由于 $\tilde{\boldsymbol{\psi}}(T)$ 所决定的通过点 $\{\mathring{J}(T),\mathring{\boldsymbol{x}}(T)\}$ 的超平面可以完全隔开 $\tilde{\boldsymbol{\psi}}(T)$ 和 V，所以有

$$(\tilde{\boldsymbol{\psi}}(T), \delta\tilde{\boldsymbol{x}}(T)) \leqslant 0. \tag{3.10}$$

根据恒等式(3.9),对任何时刻 t，$t\geqslant t_j$，均应有

$$(\tilde{\boldsymbol{\psi}}(t), \delta\tilde{\boldsymbol{x}}(t)) \leqslant 0,\ t\geqslant t_j,\ \psi_0(t)=-1.$$

于是，

$$(\tilde{\boldsymbol{\psi}}(t_j), \mathring{\tilde{\boldsymbol{x}}}(t_j)) \geqslant (\tilde{\boldsymbol{\psi}}(t_j), \tilde{\boldsymbol{x}}(t_j)),$$

或者,考虑到 $\psi_0(t)=-1$，则上式又可写成

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{\psi}(t_j), [A(t_j-1)+\mathring{\beta}(t_j-1)B(t_j-1)]\mathring{\boldsymbol{x}}(t_j-1))-\mathring{J}(t_j)\\ &\quad\geqslant(\boldsymbol{\psi}(t_j), [A(t_j-1)+\beta(t_j-1)B(t_j-1)]\mathring{\boldsymbol{x}}(t_j-1))-J(t_j),\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{\psi}(t)=\{\psi_1(t),\psi_2(t),\cdots,\psi_m(t)\}$. 注意到 $J(t)$ 只依赖于 $\boldsymbol{x}(t-1)$，$\boldsymbol{x}(t-2),\cdots$，则有 $J(t_j)=\mathring{J}(t_j)$. 上式最后变成

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{\psi}(t_j), [A(t_j-1)+\mathring{\beta}(t_j-1)B(t_j-1)]\mathring{\boldsymbol{x}}(t_j-1))\\ &\quad=\max_{\beta\in U}(\boldsymbol{\psi}(t_j), [A(t_j-1)+\beta(t_j-1)B(t_j-1)]\mathring{\boldsymbol{x}}(t_j-1)).\end{aligned} \tag{3.11}$$

既然 $t=t_j$ 时刻是任意选定的，所以上式对任何时刻 $t\in[0, T-1]$ 都成立. 消掉上式两端的相同项后,便得到最优控制 $\mathring{\beta}(t)$ 应满足的条件是

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\psi}(t), \mathring{\beta}(t-1)B(t-1)\mathring{\boldsymbol{x}}(t-1)) = \max_{\beta\in U}(\boldsymbol{\psi}(t),\\ B(t-1)\mathring{\boldsymbol{x}}(t-1))\beta(t-1).\end{aligned} \tag{3.12}$$

依设 $U=[\beta_0; \beta_{cr}]$，由上式可求出

$$\mathring{\beta}(t-1)=\begin{cases}\beta_{cr}, & 若\ (\boldsymbol{\psi}(t), B(t-1)\mathring{\boldsymbol{x}}(t-1))>0\\ \beta_0, & 若\ (\boldsymbol{\psi}(t), B(t-1)\mathring{\boldsymbol{x}}(t-1))<0\\ 不定, & 若\ (\boldsymbol{\psi}(t), B(t-1)\mathring{\boldsymbol{x}}(t-1))=0\end{cases} \tag{3.13}$$

由于(3.2)式确定的指标函数 $J(T)$ 的特殊形式,所以出现了上式中的第三种可能性. 这类问题叫作奇异问题.

最后,重复上述证明过程，可以得到关于非奇异情况的表达式. 设在指标 (2.6) 中再

加上婴儿数目的规划项 $x_0^*(t)$，则指标 $J(T)$ 变为

$$J(T)=\sum_{t=0}^{T-1}[(\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}^*(t))^\tau(\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}^*(t))+(x_0(t)-x_0^*(t))^2],\tag{3.14}$$

式内

$$\begin{aligned}
&x_0(t)=\beta(t)\boldsymbol{c}^\tau(t)\boldsymbol{x}(t),\\
&\boldsymbol{c}^\tau(t)=(c_1(t),c_2(t),\cdots,c_m(t)),\\
&c_i(t)=(1-\mu_0(t))(1-\mu_{00}(t))K_i(t)\,h_i(t).
\end{aligned}\tag{3.15}$$

注意到

$$\begin{aligned}
\delta J(t)=&\,\delta J(t-1)+2(\boldsymbol{x}(t-1)-\boldsymbol{x}^*(t-1))^\tau\delta\boldsymbol{x}(t-1)\\
&+2(\beta(t-1)\boldsymbol{c}^\tau(t-1)\boldsymbol{x}(t-1)-x_0^*(t-1))\beta(t-1)\boldsymbol{c}^\tau(t-1)\delta\boldsymbol{x}(t-1).
\end{aligned}$$

引进 $m+1$ 维向量 $\tilde{\boldsymbol{x}}$ 和 $\tilde{\boldsymbol{\psi}}$，象前面作过的那样，把矩阵 $H(t)$ 的右上角换成

$$\begin{aligned}
&2[(\mathring{\boldsymbol{x}}(t-1)-\boldsymbol{x}^*(t-1))^\tau\\
&\quad+\mathring{\beta}(t-1)(\mathring{\beta}(t-1)\boldsymbol{c}^\tau(t-1)\mathring{\boldsymbol{x}}(t-1)-x_0^*(t-1))\boldsymbol{c}^\tau(t-1)].
\end{aligned}$$

重复前面的讨论，立即可以得到最优控制 $\mathring{\beta}(t)$ 在任何时刻应满足条件

$$(\tilde{\boldsymbol{\psi}}(t),\mathring{\tilde{\boldsymbol{x}}}(t))\geqslant(\tilde{\boldsymbol{\psi}}(t),\tilde{\boldsymbol{x}}(t)),$$

也就是

$$\begin{aligned}
&(\boldsymbol{\phi}(t),[A(t-1)+\mathring{\beta}(t-1)B(t-1)]\mathring{\boldsymbol{x}}(t-1))-\mathring{J}(t)\\
&\quad=\max_{\beta\in U}\{(\boldsymbol{\phi}(t),[A(t-1)+\beta(t-1)B(t-1)]\mathring{\boldsymbol{x}}(t-1))-\mathring{J}(t-1)\\
&\quad+(\beta(t-1)\boldsymbol{c}^\tau(t-1)\mathring{\boldsymbol{x}}(t-1)-x_0^*(t-1))^2\}.
\end{aligned}\tag{3.16}$$

显然，如果最优控制 $\mathring{\beta}(t)$ 是 U 的内点，则

$$\mathring{\beta}(t)=\frac{2x_0^*(t)\,\boldsymbol{c}^\tau(t)\,\mathring{\boldsymbol{x}}(t)-(\boldsymbol{\phi}(t+1),B(t)\mathring{\boldsymbol{x}}(t))}{2(\boldsymbol{c}^\tau(t)\mathring{\boldsymbol{x}}(t))^2},\quad t=0,1,\cdots,T-1.\tag{3.17}$$

对两种不同的指标，寻求最优控制都需要求解两点边值问题，它们分别满足(3.13)和(3.17)

关于利用这里得到的必要条件，寻求我国人口发展的最优平均生育率函数的具体计算，我们将另行报告.

参 考 文 献

[1] H. L. Langhaar, General Population Theory in the Age-Time Continuum, *J. of the Franklin Inst.*, 293, (1973), 3, 199—214.

[2] P. H. Leslie, The Use of Matrices in Certain Population Mathematics. *Biometrics*, 33, (1945), 183—212.

[3] E. C. Pielou, Ecological Mathematics. John-Wiley, (1977).

[4] 宋健、于景元、李广元，人口发展过程的预测. 中国科学，第9期，1980年.

[5] 宋健、李广元，关于人口发展的定量研究. 经济研究，1980年第2期.

[6] 宋健、于景元，关于人口系统稳定性和妇女临界生育率的注记. 科学通报，第25卷23期，1980年.

[7] 宋健、王浣尘、于景元、李广元，人口系统的结构和控制. 系统工程学会论文集，科学出版社. 1980年.

[8] L. H. Day, What will a *ZPG* Society be like? A Publication of the Population Reference Bureau, *Inc.*, 33(1978), No. 3.

[9] K. N. Swamy and T. J. Tarn, Optimal Control of Discrete Bilinear Systems. Geometric Methods in System Theory. Edited by D. Q. Mayne and R. W. Brocket, Dordrecht-Holland, (1973).

BILINEAR OPTIMAL CONTROL WITH CONSTRAINTS IN POPULATION SYSTEMS

SONG JIAN

ABSTRACT

The relationship between continuous and discrete models describing population evolution processes has been established. To accommodate the population policy being held in China we introduce a set of new definitions of quantities and functions and take the specific fertility rate to be the control parameter with psychological and stability constraints. An optimization problem to achieve desired population state is formulated, and a necessary condition for optimality has been proved by means of maximum principle, thus a computational method is provided for numerical study of planned population evolution processes that is needed in working out long term population policy.