第6卷 第4期 自 动 化 学 报 Vol. 6, No. 4
1980 年 10 月 ACTA AUTOMATICA SINICA Oct., 1980

人口模型的两种转化形式*

王浣尘　　万百五
（西安交通大学系统工程研究所）

摘　　要

本文为了人口状态设计和政策综合计算的需要而介绍离散型人口模型的两种转化型式，给出了它们的推导过程，并作了简短说明.

一、前　　言

人口控制的定量研究对于我国有着理论的和实际的意义，有着长远的和现实的意义. 在定量研究中，除了人口预测和分析的内容之外，很重要的一个方面是人口状态（即人口年龄构成或人口年龄分布）的设计和控制政策的综合（指综合法的定量计算）. 为了便于综合计算，需要建立模型的两种转化型式[1-2]. 本文就介绍这两种形式及其推导过程，并作了简短说明. 为了叙述和阅读的方便，将双线性形式的离散人口状态模型附于文后，并称之为离散模型的第一形式，而把本文所要推导的两种转化形式分别称为第二和第三形式.

二、第二形式的推导

离散型人口模型的第二形式是以每年出生的孩子数 $x_0(t)$ 作为控制量，而以人口状态 $\boldsymbol{x}(t)$ 作为被控制量的. 这里的 $x_0(t)$ 指的是第 t 年内生育而又自然地活到该年年底统计时刻的孩子数. 这第二形式可用方程式表示如下：

$$\boldsymbol{x}(t) = H_{\Pi}(t)\,\boldsymbol{x}_0^M(t) + H_{\Pi}(t) \sum_{t_w \leqslant t-1} V_{M+1}^{(t-t_w-1)} H_{\Pi}^{-1}(t_w)\,\boldsymbol{w}(t_w) \tag{2.1}$$

式中 $\boldsymbol{x}(t)$ 为人口状态向量，$\boldsymbol{x}_0^M$ 为人口出生状态向量(扣除当年自然死亡者)

$$\boldsymbol{x}_0^M(t) \triangleq \begin{bmatrix} x_0(t) \\ x_0(t-1) \\ \vdots \\ x_0(t-M) \end{bmatrix}$$

在此顺便指出，$\boldsymbol{x}(t)$ 中的元素 $x_0(t)$ 为扣除当年各种原因死亡和迁移者，含意同 $\boldsymbol{x}_0^M(t)$ 中的不同，为了简化符号，暂且不加辅助标记. 至于 V_{M+1} 为 $(M+1)\times(M+1)$ 阶的移位矩阵，

* 本文修改稿于5月26日收到.

$$V_{M+1}=\begin{bmatrix} 0 & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

而

$$H_{\Pi}(t)=\begin{bmatrix} \eta_{\Pi 0}(t) & & & 0 \\ & \eta_{\Pi 1}(t) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \eta_{\Pi M}(t) \end{bmatrix}$$

为累计留存矩阵,对角线上的元素为 $\eta_{\Pi a}(t)=\prod_{j=1}^{a}\eta_{a-j}(t-j)$, $a=0,1,\cdots,M$. 展开后有

$$\begin{aligned} &\eta_{\Pi 0}(t)=1 \\ &\eta_{\Pi 1}(t)=\eta_0(t-1) \\ &\eta_{\Pi 2}(t)=\eta_0(t-2)\,\eta_1(t-1) \\ &\eta_{\Pi 3}(t)=\eta_0(t-3)\,\eta_1(t-2)\,\eta_2(t-1) \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

这里 $\eta_{\Pi a}(t)$ 指的是 t 时刻为 a 岁的人口与在 $t-a$ 时刻为零岁的人口（只考虑自然死亡)之比,它和按龄留存率 $\eta_a(t)$ 不同,为此特称 $\eta_{\Pi a}(t)$ 为累计留存率.

在式(2.1)中, $\boldsymbol{x}_0^M$ 为控制向量, $\boldsymbol{w}(t)$ 为扰动向量, t_w 为扰动发生时间. 当 $\eta_{\Pi a}(t)>0$, $a=0,1,\cdots,M-1$. 逆矩阵 H_{Π}^{-1} 存在时,可考虑各种扰动影响,否则,这个公式只适用于人口的自然发展过程.

现在叙述式(2.1)的推导过程:

取定义 $\mathbf{c}\triangleq[c_0,c_1,\cdots,c_a,\cdots,c_M]^T$ 和 $\mathbf{c}_i\triangleq[0,\cdots,0,1,0,\cdots,0]^T$, 即 $\mathbf{c}$ 中的元素有

$$\begin{cases} c_a=0, & \text{当 } a\neq i \\ c_a=1, & \text{当 } a=i \end{cases}$$

按第一形式的式(0.1)［见附录］

$$\boldsymbol{x}(t+1)=G(t)\,\boldsymbol{x}(t)+F(t)\,\boldsymbol{w}(t)$$

即有

$$\mathbf{c}_i\,\mathbf{c}_i^T\,\boldsymbol{x}(t+1)=\mathbf{c}_i\,\mathbf{c}_i^T\,G(t)\,\boldsymbol{x}(t)+\mathbf{c}_i\,\mathbf{c}_i^T\,F(t)\,\boldsymbol{w}(t),\ i=0,1,\cdots,M$$

这时把式中右方同 $\mathbf{c}_i^T$ 有关部分展开,并把对 $\mathbf{c}_i$ 取 $i=0,1,\cdots,M$ 的共 $M+1$ 个式子相加,即有

$$\boldsymbol{x}(t)=\mathbf{c}_0\,x_0(t)+H(t-1)\,\boldsymbol{x}(t-1)+F(t-1)\,\boldsymbol{w}(t-1)$$

我们可以用展开法证明

$$H(t-1)=H_{\Pi}(t)\,V_{M+1}\,H_{\Pi}^{-1}(t-1)$$

于是有

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{c}_0 x_0(t) + H_\Pi(t) V_{M+1} H_\Pi^{-1}(t-1) \boldsymbol{x}(t-1) + F(t-1) \boldsymbol{w}(t-1)$$

进一步用 $\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{x}(t-1), \boldsymbol{x}(t-2), \cdots, \boldsymbol{x}(t-M)$ 连续迭代,可得:

$$\boldsymbol{x}(t) = \sum_{i=0}^{M} H_\Pi(t) \boldsymbol{c}_i x_0(t-i) + H_\Pi(t) V_{M+1}^{M+1} H_\Pi^{-1}(t-M-1) \boldsymbol{x}(t-M-1)$$
$$+ \sum_{t_w=t-1-M}^{t-1} H_\Pi(t) V_{M+1}^{(t-t_w-1)} H_\Pi^{-1}(t_w+1) F(t_w) \boldsymbol{w}(t_w)$$

式中

$$V_{M+1}^{i} = \begin{cases} \boldsymbol{o}, & \text{当 } i \geqslant M+1 \\ I, & \text{当 } i = 0 \end{cases}$$

$$V_{M+1}^{i} \boldsymbol{c}_0 = \boldsymbol{c}_i, \quad i = 0, 1, \cdots, M$$

经过整理,式中右端的第一项即 $H_\Pi(t) \boldsymbol{x}_0^M(t)$,第二项为零,第三项即

$$H_\Pi(t) \sum_{t_w \leqslant t-1} V_{M+1}^{(t-t_w-1)} H_\Pi^{-1}(t_w+1) F(t_w) \boldsymbol{w}(t_w)$$

由此即得式(2.1).

式(2.1)的另一种推导方法是先不考虑扰动项,然后再把扰动项经过折换算作假想的出生数量而迭加上去. 本文不予赘述.

三、第三形式的推导

在考虑有关决策的定量计算过程中,也即政策的综合过程中,往往就要在一定约束条件和给定的性能指标下,从某个人口状态 $\boldsymbol{x}(t_0)$ 出发寻求最优控制 $\beta(t)$. 这时就需要如下的递推公式,即人口离散模型的第三形式[2],当不考虑扰动项的作用时有

$$\boldsymbol{x}_0^M(t+1) = \Gamma(t) \boldsymbol{x}_0^M(t) \tag{3.1}$$

式中

$$\Gamma(t) = \begin{bmatrix} \gamma_0(t) & \gamma_1(t) \cdots & \gamma_M(t) \\ 1 & 0 & 0 \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

是出生人口转移矩阵, $\Gamma(t) = B(t) H_\Pi(t) + V_{M+1}$, 而

$$\gamma_a(t) = b_a(t) \eta_{\Pi a}(t) = k\beta(t) \lambda_a(t) \eta_{\Pi a}(t), \quad a = 0, 1, \cdots, M,$$

在育令区间 $[\theta, \zeta]$ 内,通常按令死亡率较小,故有 $\gamma_a(t) \approx b_a(t)$, $a \in [\theta, \zeta]$.

现在介绍式(3.1)的推导过程:

由第一形式的式(0.2)[见附录]在没有扰动时有

$$\boldsymbol{x}(t+1) = (H(t) + B(t)) \boldsymbol{x}(t)$$

由式(2.1)得

$$\boldsymbol{x}(t) = H_\Pi(t) \boldsymbol{x}_0^M(t)$$
$$\boldsymbol{x}(t+1) = H_\Pi(t+1) \boldsymbol{x}_0^M(t+1)$$

于是在 H_Π 的逆 H_Π^{-1} 存在的条件下有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_0^M(t+1) &= H_{\Pi}^{-1}(t+1)\,\boldsymbol{x}(t+1) \\ &= H_{\Pi}^{-1}(t+1)\,(H(t)+B(t))\,H_{\Pi}(t)\,\boldsymbol{x}_0^M(t) \end{aligned}$$

我们可以用展开法证明

$$H(t) = H_{\Pi}(t+1)\,V_{M+1}\,H_{\Pi}^{-1}(t)$$

和

$$H_{\Pi}^{-1}(t+1)\,B(t)\,H_{\Pi}(t) = B(t)\,H_{\Pi}(t)$$

于是即可得

$$\boldsymbol{x}_0^M(t+1) = (V_{M+1}+B(t)\,H_{\Pi}(t))\,\boldsymbol{x}_0^M(t)$$

即得式 (3.1).

如果 H_{Π} 中有 $\eta_a=0$，则可利用非标准分析法中无穷小量 ϵ 的概念． 取 $\eta_a=\epsilon_a$，避开 $\eta_a=0$ 的情况，这时同样可以导出式(3.1)．这样式(3.1)就不再需要 H_{Π} 的逆 H_{Π}^{-1} 存在的条件了．

四、几点说明

1. 本文中人口模型在数学上的不同形式将有其各自相应的物理意义．第二形式是以 $\boldsymbol{x}_0^M$ 本身作为控制输入，$\boldsymbol{x}(t)$ 为被控输出． 这在经典的控制理论中是一种基本的形式．在各式各样的人口控制方案中就是有一种以历年生育量本身作为控制量的方案． 显然，这是客观上的需要．至于更一般的应用那就更为广泛些了，文献[2]中的应用即是一例．

2. 进一步从年龄-时间这两个变量的角度上来看， $\boldsymbol{x}(t)$ 是年龄-时间双变量区域上的量，而 $\boldsymbol{x}_0^M(t)$ 是上述区域边界上的量，因而第二形式也就确立了由边界量控制区域量的关系式．这样，第二形式的重要性也就更加明显了．

此外，有了第二形式，第三形式的推导较为方便．

第三形式是以 $\Gamma(t)$ 作为控制量，显然还是一个双线性系统．它的特点是从边界量 $\boldsymbol{x}_0^M(t)$ 经过控制作用 $\Gamma(t)$ 而演化到边界量 $\boldsymbol{x}_0^M(t+1)$，因而第三形式确立了从边界量到边界量的关系式．

$\boldsymbol{x}(t)$ 是年龄-时间区域移近上的量值，所以第一形式所确立的关系是从区域量到区域量，其控制量是 $B(t)$ 或 $\beta(t)$ $\Lambda(t)$． 这种形式在综合法中有时就不太方便．今确立了区域控制和边界控制的关系，把区域上的问题转化成边界上的问题，就有利于控制综合法的应用．文献[2]即是一例．

3. 利用第二形式还可以看出，在每年等额生育量的情况下，$\boldsymbol{x}(t)$ 就是平缓型的人口状态．因此，H_{Π} 中的对角线元素就是平缓型人口状态中各年龄人口的相对值． 这为利用模型参数计算平均寿命提供了方便．这些已在另一篇文章中作了详尽的讨论，本文从略．

4. 第二形式中，当维数M取得较大，H_{Π} 中将出现小参数，如果按照普通的运算方法将有可能带来较大的误差．这个问题如果笼统的来谈，的确是难于躲过这个数学上的困难的．但是，针对人口的实际问题，H_{Π} 中的元素 $\eta_{\Pi a}$ 的大小是有规律的，即相对于年龄 a 是一个单调降函数．因此，在某些年龄的区间上可以选用适当的运算用比例尺因子，

比如说 ε. 这个 ε 可以不必直接参与中间过渡性的数字运算. 这样，在式(2.1)中扰动项内 H_{Π} 和 H_{Π}^{-1} 的两者将分别出现 ε 和 $1/\varepsilon$，又式中的移位矩阵 V_{M+1} 的方次 $(t-t_w-1)$ 总是大于等于零,因而在运算的结果中就不可能出现 $1/\varepsilon$ 的因子. 因此，这个数学上的困难也就被克服了. 再进一步看，维数M究竟要取到多大为合适，这是应该根据所要研究的实际问题来确定，并不是愈大愈好. 例如我国现有水平的平均寿命为 68.18 岁，有 $\eta_{\Pi70}=0.5866$，$\eta_{\Pi80}=0.2722$，$\eta_{\Pi90}=0.03453$，$\eta_{\Pi100}=0.4047\times10^{-3}$，同时人口统计原始数据本身误差也只能保证在千分之几的等级上,因此,这样的数量等级本身还都处在不难处理的范围之内.

5. 第 t 年的活产婴儿数 $y(0)_t$ 同存活到年底的婴儿数 $x_0(t)$ 是不一样的，有关系

$$x_0(t)=\eta_{0A}(t)\,y(0)_t=(1-d_{0A}(t))\,y(0)_t \tag{4.1}$$

式中 η_{0A} 称为婴儿当年留存率，它的定义就是以一年内活产婴儿数作分母而以其中存活到该年年底的婴儿数作分子所得的比率. d_{0A} 称为婴儿当年死亡率，其定义是以一年内活产婴儿数作分母而以其中在该年内死亡的婴儿数作分子所得的比率. 这不同于目前医学界和人口统计中所惯用的婴儿死亡率，是需要专门定义的. 作者在另一篇文章中作了详细的讨论[5],本文从略.

按照我国目前水平，$d_{0A}\approx 11‰$，即在百分之一的等级上. 同时，在我国人口控制过程中，新生婴儿如果还活不到当年的年底就已死亡，做父母的必然不把这一婴儿计数. 再有，在人口统计中，在人口普查中，活产婴儿数较难统计，而在统计时刻存活的且不到一岁的婴儿数较易统计. 因此，在讨论我国人口控制时，采用 $y(0)_t$ 或 $x_0(t)$ 都是可行的，是可以互相折算的，不过看来还是以直接应用 $x_0(t)$ 较为简便一些.

如果一定要直接应用 $y(0)_t$ 的活产婴儿数来进行讨论，则在式(2.1)或(3.1)中用 $H_{0A}(t)\,\boldsymbol{y}(0)_t^M$ 替代 $\boldsymbol{x}_0^M(t)$ 就行了，其中

$$H_{0A}(t)\triangleq\begin{bmatrix}\eta_{0A}(t) & & 0\\ & \eta_{0A}(t-1) & \\ & & \ddots \\ 0 & & \eta_{0A}(t-M)\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{y}(0)_t^M\triangleq\begin{bmatrix}y(0)_t\\ y(0)_{t-1}\\ \vdots\\ y(0)_{t-M}\end{bmatrix}$$

不过，这时所获得的公式就不及原式(2.1)和(3.1)那么简明.

附 录

在离散的人口模型中，年龄和时间(年)变量都只取离散值. 离散人口模型的第一形式可表述如下[1-2]:

$$\boldsymbol{x}(t+1)=G(t)\,\boldsymbol{x}(t)+F(t)\,\boldsymbol{w}(t) \tag{0.1}$$

或写成

$$\boldsymbol{x}(t+1)=H(t)\,\boldsymbol{x}(t)+B(t)\,\boldsymbol{x}(t)+F(t)\,\boldsymbol{w}(t) \tag{0.2}$$

其中 t 为离散变量，每一取值表示统计人口的约定时刻，譬如以年为间隔时可取年底12月31日24点整. $\boldsymbol{x}(t)$ 为人口状态向量，它的每一分量 $x_a\geqslant0$，$a=0,1,\cdots,M$，表示在 t 时刻实足年龄达到和超过 a 而

小于 $a+1$ 的人口总数. 在式(0.1)中

$$G(t)=\begin{bmatrix} b_0(t) & b_1(t)\cdots\cdots & b_M(t) \\ \eta_0(t) & \eta_1(t) \quad 0 & 0 \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & \eta_{M-1}(t) & 0 \end{bmatrix}$$

表示从 t 到 $t+1$ 年的人口状态转移矩阵;在式 (0.2) 中

$$H(t)=\begin{bmatrix} 0 & \cdots\cdots & 0 \\ \eta_0(t) & \eta_1(t) \quad 0 & \vdots \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & \eta_{M-1}(t) & 0 \end{bmatrix}$$

表示从 t 到 $t+1$ 的人口状态留存矩阵，也叫作生存矩阵或存活矩阵； $\eta_a(t)=1-d_a(t)$ 为从 t 到 $t+1$ 的按龄留存率，$0\leqslant\eta_a\leqslant 1$，$a=0,1,\cdots,M$. 而 $d_a(t)$ 是从 t 到 $t+1$ 的按龄死亡率,即在 $x_a(t)$ 中在 t 到 $t+1$ 之间死亡的人数与此 $x_a(t)$ 之比,而

$$B(t)=\begin{bmatrix} b_0(t) & b_1(t) & \cdots & b_M(t) \\ & & 0 & \end{bmatrix}$$

为从 t 到 $t+1$ 的人口状态增生矩阵,也可称为生育矩阵，其中 $b_a(t)$, $a=0,1,\cdots,M$，是按龄增生率，即从 t 到 $t+1$ 所增生的人口与相应的 $x_a(t)$ 之比. 当 a 在育龄区间内，$a=\theta$，$\theta+1$，$\cdots$，ξ 时,可理解为按龄生育率. $w(t)$ 为 m 维扰动向量，它的分量 $w_i(t)$ 代表从 t 到 $t+1$ 的第 i 种非自然生育和死亡的扰动人口（增加为正)，诸如迁移、天灾、战争等. 矩阵 $F(t)=[f_1(t)|f_2(t)|\cdots|f_m(t)]$ 表示从 t 到 $t+1$ 的人口状态扰动矩阵,其中 $f_i^T(t)=[f_{0(i)}(t),\ f_{1(i)}(t),\ \cdots,\ f_{M(i)}(t)]$ 为对应于 $w_i(t)$ 的按龄扰动向量.

从控制理论的观点来看,方程(0.2)是一个双线性系统,其中 $B(t)$ 是控制矩阵. 如果从 $B(t)$ 中提出一个标量 $\beta(t)$ 作为控制量,并称之为生育系数,它对应于人口学中的总和生育率,这时可写成

$$B(t)=k\beta(t)\Lambda(t) \tag{0.3}$$

式中 k 即年龄在 $[\theta,\xi]$ 生育区间的妇女总人数与相应区间内的总人口数的比例，也可简称为育龄妇女比率系数. 又

$$\Lambda(t)=\begin{bmatrix} \lambda_0(t) & \lambda_1(t) & \cdots & \lambda_M(t) \\ & & 0 & \end{bmatrix}$$

称为生育模式矩阵,而其中的 $\lambda_a(t)$, $a=0,1,\cdots,M$ 有关系

$$\lambda_a(t)=\frac{b_a(t)}{\sum\limits_{a=0}^{M} b_a(t)},\qquad \sum_{a=0}^{M}\lambda_a(t)=1,$$

因而有

$$k\beta(t)=\sum_{a=\theta}^{\xi} b_a(t)$$

由于在育龄区间内,死亡率很低,如果 $x_a(t)$ 在这个区间内变化又不大，那末 $k\beta$ 可以近似理解为男女每人平均一生中生育的孩子数,而生育系数 β 近似于一对夫妇一生中平均生育的孩子数.

这样,Λ 和 β 就可用来作为生育政策的定量描述. 换言之,“晚稀少”的政策可以定量地体现在 Λ 和 β 之中.

关于 $\beta(t)$ 的含义，在文献[3]中阐述了应用这个指标的目的是为说明平均一个妇女一生所生育的孩子数，本来应该观察一批妇女的整个生育期 $[\theta,\xi]$. 但是那样作为时过长，且不能说明某一年的情况. 现在是把同时存在的许多代人的生育率当作一代人的生育率来用. 因此在一般情况下，这是假想

一代人的总和生育率，而不是某个真正一代人的总和生育率.

在这里，我们需要说明的是，如果人口状态属于平缓型，则一般妇女在育龄区间的死亡率约为 1—3%[3]，在此区间各年龄人数只有 1—2% 的不同，这时生育系数 β 较能确切地代表一对夫妇平均一生所生育的孩子数. 如果人口状态是在平缓型的基础上带有峰谷的话，则只要所研究的时期足够长，能使峰谷全部移过育龄区间 $[\theta,\xi]$ 的话，则生育系数 β 还能代表一对夫妇平均一生所生育的孩子数. 如果实际情况接近上述两种情况，$\beta(t)$ 随着时间又无明显变动，那末生育系数 β 还能近似代表一对夫妇平均一生所生的孩子数. 否则生育系数 $\beta(t)$ 还是从其生育系数的本来意义上去理解较为妥当.

如果要考虑婴儿当年死亡率的情况，则可有多种办法. 其一是对计算结果进行折算，即直接利用式(4.1). 其二是把 $\boldsymbol{x}(t)$ 中的分量 $x_0(t)$ 改成 $y(0)_t$，$G(t)$ 和 $H(t)$ 中的 $\eta_0(t)$ 改成 $\eta_{0A}(t)\eta_0(t)$，对其有关的实际含义要作相应的理解. 其三是把 $\boldsymbol{x}(t)$，$G(t)$，$H(t)$，$B(t)$，$F(t)$ 和 $A(t)$ 等的维数增加一维，即在 $x_0(t)$ 前增加一项元素 $y(0)_t$，$\eta_0(t)$ 前增加一项元素 $\eta_{0A}(t)$，$f_{0(i)}(t)$ 前增加一项元素 $f_{0A(i)}(t)$，$b_0(t)$ 前增加一项元素 $b_{0A}(t)$，$\lambda_0(t)$ 前增加一项元素 $\lambda_{0A}(t)$ 等等. 这些办法，公式的结构都没有什么变化，因而讨论的方法完全一样.

参 考 文 献

[1] 王浣尘，人口状态和人口的动态过程，西安交大学报，**14** (1980)，1，1—11.

[2] 王浣尘，人口控制的大系统结构及其控制决策的综合，西安交大学报，**14** (1980)，1，13—24.

[3] 查瑞传，略论人口再生产，人口研究 1979，**2**，7—20.

TWO TRANSFORMED FORMS OF THE POPULATION MODELS

WANG HUAN-CHEN WAN BAI-WU

(Institute of System Engineering Xi'an Jiaotong University)

ABSTRACT

In this paper two transformed forms of discrete-time population models is introduced for the purpose of designing the population state and synthesizing the control policy. The derivation procedure of these forms and their brief explanation are given.