第 19 卷 第 1 期　　自 动 化 学 报　　Vol. 19, No. 1
1993 年 1 月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　Jan., 1993

短 文

具有结构不确定性的线性反馈控制系统的鲁棒稳定性[1)]

顾冬梅
(中国科学院自动化研究所，北京 100080)

摘　　要

本文研究了具有结构不确定性 (Structured Uncertainty) 因素的反馈控制系统的鲁棒稳定性问题，对于一个普通的补偿器，给出了闭环系统鲁棒稳定的充要条件，当补偿器满足某些假设条件时，得出了闭环系统鲁棒稳定的有限检验的充分必要条件。

关键词：结构不确定性，系统综合，鲁棒稳定性。

一、介　　绍

考虑具有结构不确定性的线性反馈控制系统的鲁棒稳定性，闭环系统 (CLS) 如图 1 所示。

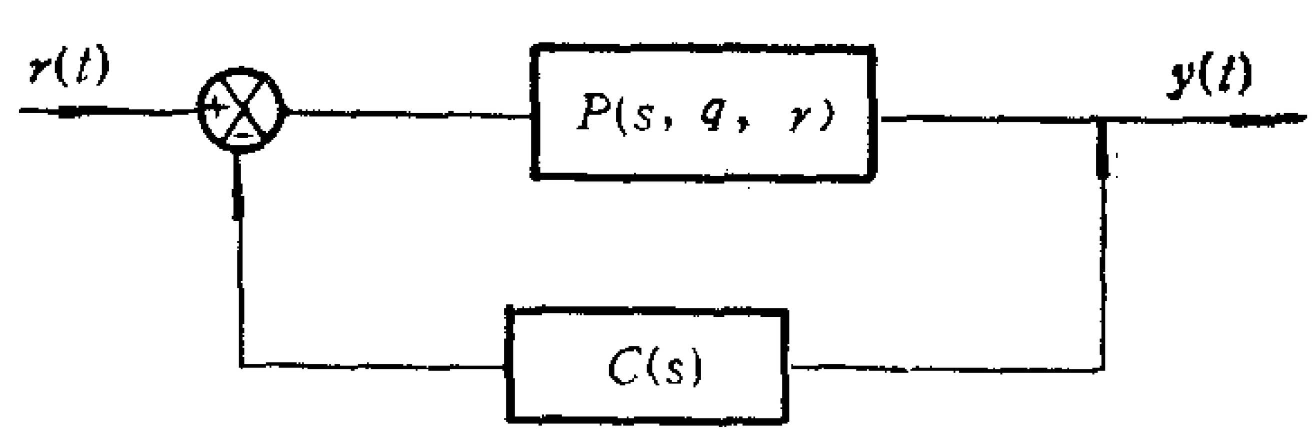

图 1

图中

$$P(s,q,r)=\frac{N_p(s,q)}{D_p(s,r)},q\in Q,r\in R, \tag{1.1}$$

$$C(s)=\frac{N_c(s)}{D_c(s)}. \tag{1.2}$$

多项式族 $D_p(s,r)$ 和 $N_p(s,q)$ 分别表示如下：

$$N_p(s,q)=q_0+q_1s+\cdots+q_ms^m, \tag{1.3}$$

$$D_p(s,r)=r_0+r_1s+\cdots+r_ns^n, \tag{1.4}$$

$$q\in Q=\{q:q_i\in[\alpha_i,\beta_i],\ i=0,1,\cdots m\}, \tag{1.5}$$

本文于 1991 年 4 月 24 日收到。
1) 本课题为国家自然科学基金资助课题。

$$r \in R = \{r : r_i \in [\xi_i, \eta_i], i = 0,1,\cdots,n\}. \tag{1.6}$$

为稳定 $P(s,q,r)$，补偿器 $C(s)$ 的分子 $N_c(s)$ 及分母 $D_c(s)$ 可表述为

$$N_c(s) = b_0 + b_1 s + \cdots + b_u s^u, \tag{1.7}$$

$$D_c(s) = a_0 + a_1 s + \cdots + a_v s^v. \tag{1.8}$$

在文献[2]中，$u = 1, v = 1$，即所谓的一阶补偿器.而文献[3]则要求 $N_c(s)$ 和 $D_c(s)$ 仅含偶次项或奇次项. 这无疑对补偿器 $C(s)$ 的要求过于严格. 对于具有结构不确定性的系统，若对 $C(s)$ 无任何限制，则无法得到具有一般意义的有限检验的充要条件[4].

二、假设条件及概念

假设 1（严格真）. 对于所有 $q \in Q, r \in R$ $P(s,q,r)$ 为严格真.

假设 2（补偿器）. 补偿器 $C(s)$ 满足如下条件:

i) $u + m < v + n$,

ii) $\sum\limits_{i+j=h} (i-j) b_{2i} b_{2j+1} (-1)^h \geqslant 0$,

iii) $\sum\limits_{i+j=f} (i-j) a_{2i} a_{2j+1} (-1)^f \geqslant 0$, (2.1)

$$h = 0,1,2,\cdots,m-1, f = 0,1,2,\cdots,n-1.$$

假设 3. 对于所有 $q \in Q, r \in R, N_p(s,q)$ 和 $D_p(s,r)$ 互质. $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{C}$ 分别表示实数和复数. N_k 和 D_i 分别表示多项式族 $N_p(s,q)$ 和 $D_p(s,r)$ 的 Kharitonov 多项式族 $(k, i = 1,2,3,4)$:

$$\left.\begin{aligned} N_1 &= \alpha_0 + \alpha_1 s + \beta_2 s^2 + \beta_3 s^3 + \cdots, \\ N_2 &= \alpha_0 + \beta_1 s + \beta_2 s^2 + \alpha_3 s^3 + \cdots, \\ N_3 &= \beta_0 + \beta_1 s + \alpha_2 s^2 + \alpha_3 s^3 + \cdots, \\ N_4 &= \beta_0 + \beta_1 s + \alpha_2 s^2 + \beta_3 s^3 + \cdots. \end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

$$\left.\begin{aligned} D_1 &= \xi_0 + \xi_1 s + \eta_2 s^2 + \eta_3 s^3 + \cdots, \\ D_2 &= \xi_0 + \eta_1 s + \eta_2 s^2 + \xi_3 s^3 + \cdots, \\ D_3 &= \eta_0 + \eta_1 s + \xi_2 s^2 + \xi_3 s^3 + \cdots, \\ D_4 &= \eta_0 + \xi_1 s + \xi_2 s^2 + \eta_3 s^3 + \cdots. \end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

令 $\mathbf{D}_p = D_c(s) D_p(s,r) + N_c(s) N_p(s,q), r \in R, q \in Q$. ED 表示 $\mathbf{D}_p$ 的边界，且

$$\begin{aligned} ED_{i,i',k,k'} = {} & D_c(s)[\lambda_i D_i(s) + (1-\lambda_i) D_i'(s)] + N_c(s)[l_k N_k(s) \\ & + (1-l_k) N_k'(s)], \lambda_i, l_k \in [0,1], i,k,i',k' = 1,2,3,4. \end{aligned} \tag{2.4}$$

$\mathbf{D}_p$ 的 16 个顶点多项式 $TD_{i,k}$ 表示如下:

$$TD_{i,k} = D_c D_i(s) + N_c(s) N_k(s), i, k = 1,2,3,4. \tag{2.5}$$

三、主 要 结 果

定理. 补偿器 $C(s)$ 为(1.2)式所给定，则

1) $C(s)$ 镇定 $P(s,q,r)$ 的充要条件是 $C(s)$ 镇定 $\mathbb{D}_p$ 的所有边界对象.

2) 若 $C(s)$ 满足假设 2，则 $C(s)$ 镇定 $P(s,q,r)$ 的充要条件是 $C(s)$ 镇定 $N_k(s)/D_i(s)$; k, $i=1,2,3,4$.

3) 若 $C(s)$ 不满足假设 2,则 2)中的充分性不成立.

引理 1. 考虑一个实系数多项式 $p(s)$ 如下:

$$p(s)=h(s^2)+sg(s^2), \tag{3.1}$$

式中 $h(\cdot),g(\cdot)$ 都是多项式,且假定 $p(s)$ 仅含正系数,则 $p(s)$ 为 Hurwitz 的充要条件是

$$p_1(s)=h(js)+jg(js) \tag{3.2}$$

及
$$p_2(s)=h(-js)+sg(-js) \tag{3.3}$$

是 Hurwitz. 本引理的证明见文献[5].

引理 2. 若 $N_c(s)$ 满足假设 2 中的 ii),则函数 $d(\omega)=T_1(\omega)/T_2(\omega)$ 在 $\omega:0\to+\infty$ 内单调减,其中

$$T_1(\omega)=b_1-b_3\omega+b_5\omega^2-b_7\omega^3+\cdots, \tag{3.4}$$

$$T_2(\omega)=b_0-b_2\omega+b_4\omega^2-b_6\omega^3+\cdots. \tag{3.5}$$

引理 3. 令多项式 $p_1(s),p_2(s)$ 的阶分别是 n 和 $k(k<n-u)$,且 $p_2(s)$ 仅含奇次或偶次项,则任给一 u 阶多项式 $X(s)$,多项式

$$p(s,\lambda)=p_1(s)+\lambda X(s)p_2(s), \tag{3.6}$$

当 $\lambda\in[0,1]$ 时,$p(s,\lambda)$ 为 Hurwitz 的充要条件是 $p(s,0),p(s,1)$ 为 Hurwitz（这里 $X(s)$ 满足假设 2）.

证明. 参照文献[2]及引理 1,2 的结果. 本引理的证明是显然的.

由上述 3 个引理，可给出定理的证明. 定理中的必要性是显然的. 故仅需给出其充分性的证明. 先给出一基本事实如下.

若 $\mathbf{Z}_1,\mathbf{Z}_2\subset\mathbf{C}$ 分别为复平面上的凸组合,z_1 和 z_2 为 2 个固定的复数,则

$$E[z_1\mathbf{Z}_1+z_2\mathbf{Z}_2]\subseteq z_1E[\mathbf{Z}_1]+z_2E[\mathbf{Z}_2]. \tag{3.7}$$

现设
$$\begin{gathered}0\in\mathbb{D}_p(j\omega),\text{ 但 } 0\notin ED_{i,i',k,k'}=D_c(j\omega)[(1-\lambda_i)D_i(j\omega)\\ +\lambda_iD_i'(j\omega)]+N_c(j\omega)[(1-l_k)N_k(j\omega)+l_kN_k'(j\omega)],\\ l_k,\lambda_i\in[0,1],\ i,i',k,k'=1,2,3,4,\omega\in\mathbb{R}.\end{gathered} \tag{3.8}$$

由文献[6,7]有

$$D_p(j\omega,r)=\sum_{i=0}^{4}\lambda_iD_i(j\omega),\quad N_p(j\omega,q)=\sum_{k=0}^{4}l_kN_k(j\omega),$$

所以

$$0\in D_c(j\omega)\sum_{i=0}^{4}\lambda_iD_i(j\omega)+N_c(j\omega)\sum_{k=0}^{4}l_kN_k(j\omega). \tag{3.9}$$

不失一般性,令 $l_3=l_4=0,\lambda_3=\lambda_4=0$,由于 $\sum_{i=0}^{4}\lambda_i=1,0\leqslant\lambda_i\leqslant1,\sum_{k=0}^{4}l_k=1$, $0\leqslant l_k\leqslant1$,故(3.8)式与(3.9)式相矛盾,定理的第一部分证毕.

因为
$$\mathbb{D}_p(j\omega)=\operatorname{conv}\{TD_{i,k}(j\omega);i,k=1,2,3,4\}, \tag{3.10}$$

设

$$0 \in \mathbb{D}_p(j\omega),\ \ \omega \in \mathbb{R},$$

则存在 $\omega^* \in \mathbb{R}$,有 (3.11)

$$0 \in ED_{i,i',k,k'}(j\omega^*), \tag{3.12}$$

或

$$0 \in D_c(j\omega^*)[\lambda_i D_i(j\omega^*) + (1-\lambda_i)D_i'(j\omega^*)] + N_c(j\omega^*)[l_k N_k(j\omega^*) + (1-l_k)N_k'(j\omega^*)], \tag{3.13}$$

$$\lambda_i, l_k \in [0,1], i, i', k, k' = 1,2,3,4.$$

不失一般性，令 $i=2, i'=3, k=1, k'=2$ 和 $l_1 \in [0,1], \lambda_2 = 0$，则(4.13)式可表示为

$$D_c(j\omega^*)D_3(j\omega^*) + N_c(j\omega^*)[l_1 N_1(j\omega^*) + (1-l_1)N_2(j\omega^*)] = 0,$$

即

$$TD_{3.2} + l_1 N_c(j\omega^*)[N_1(j\omega^*) - N_2(j\omega^*)] = 0. \tag{3.14}$$

显然，当 $l_1 = 0$ 时，(3.14)式左端为 $TD_{3.2}$，当 $l_1 = 1$ 时，(6.14)式左端为 $TD_{3.1}$，而 $TD_{3.2}$，$TD_{3,1}$ 均为 Hurwitz.

由引理 3 可知，(3.14)式不成立，故定理第二部分的充分性证明完毕.

定理的第三部分可由文献[4]的反例给出其证明，故定理的证明完毕.

结语

文献[1]和文献[3]是本文结果中的特例. 文中给的 $C(s)$ 的限制是充分的，因此，对补偿器$C(s)$的限制的充要条件是否存在仍是控制界的一个开放课题.

致谢. 感谢中国科学院系统所鲁棒控制研讨班上的同事们对本文的帮助，也感谢 S. P. Bhattacharyya 教授向作者介绍 Box Theorem 的背景.

参　考　文　献

[1] Hollot, C. H. et al, Extreme Point Results for Robust Stabilization of Linear Plants with First Order Compensator, Proc. of the American Control Conference, San Diego, 1990.

[2] Chapellat, H. and Bhattacharyya, S. P., A Generalization of Kharitonov's Theorem: Robust Stability of Interval Plants, *IEEE Trans. on Automatic Control*, 34(1989), 3, 306—311.

[3] Hollot, C. H. and Yang F., Robust Stabilization of Interval Plants Using Lead or Lag Compensator, *Systems and Control Letters*, 14(1990), 9—12.

[4] Jury, E. I., Inners and Stability of Dynamic Systems, Wiley, New York, 1974.

[5] Kharitonov, V. L., Asympototic Stability of an Equilibrium Position of a Family of Systems of Linear Differential Equations, *Differential'nye Uraveniya*, 14(1978), 1483—1485.

[6] Barmish, B. R., A Generalization of Kharitonov's Four-ploynomial Concept for Robust Stability Problem with Linear Coefficient Perturbations, *IEEE Trans. on Automatic Control*, 34(1989)3, 157—165.

ROBUST STABILITY OF FEEDBACK CONTROL FOR LINEAR SYSTEMS WITH STRUCTURED UNCERTAINTY*

GU DONGMEI

(Institute of Automation, Academia Sinica, Beijing 100080)

ABSTRACT

The synthesis for structured uncertain systems is an important research area of robust control. This paper deals with robust stability of feedback control of linear systems with structured uncertainty. We present a necessary and sufficient condition of closed-loop systems for a general compens a tor, and if the compensator satisfies some assumptions, a finite checking for robust stability of closed-loop systems is obtained.

Key words: Structured uncertainty; synthesis of control systems; robust stability.

*) Supported by the NNSF of China.