第 19 卷 第 1 期　　自 动 化 学 报　　Vol. 19, No. 1
1993 年 1 月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　Jan., 1993

短 文

线性奇异摄动系统的特征结构配置[1)]

黄 一　　许可康
(中国科学院系统科学所，北京 100080)

摘　　要

本文利用奇异摄动系统快、慢时间尺度特性和组合控制方法，将线性定常奇异摄动系统的特征结构配置问题等价地转化为由慢、快变子系统各自的特征结构配置问题来解决，并在各阶精度上进行了近似结果的研究.

关键词： 奇异摄动系统，组合控制，特征结构配置.

一、引　　言

70 年代后期以来，在多变量线性控制系统的设计中，为了使闭环系统具有较好的鲁棒性，提出了特征结构配置问题. 在状态反馈的特征结构配置中，即利用状态反馈阵中的自由度，除配置闭环系统的特征值，还对其特征向量(或广义特征向量链)进行配置.

对含有小参数 ε 的线性奇异摄动控制系统，也可以用状态反馈来对其进行特征结构配置. 本文利用奇异摄动系统的特性，将上述问题化为两个低阶系统的近似特征结构配置问题，并利用奇异摄动控制系统中的组合控制，来达到对整个闭环系统的具有所需要的任意阶精度的近似特征结构配置.

二、预 备 知 识

本文讨论奇异摄动控制系统

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}} = A_{11}\boldsymbol{x} + A_{12}\boldsymbol{z} + B_1\boldsymbol{u}, & \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n,\\ \varepsilon\dot{\boldsymbol{z}} = A_{21}\boldsymbol{x} + A_{22}\boldsymbol{z} + B_2\boldsymbol{u}, & \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{R}^m,\end{cases} \tag{1}$$

在状态反馈下的特征结构配置问题，这里，$0 < \varepsilon \ll 1$.

系统(1)在状态反馈

$$\boldsymbol{u} = G_1\boldsymbol{x} + G_2\boldsymbol{z} \tag{2}$$

下得闭环系统

本文于 1991 年 4 月 11 日收到.
1) 国家自然科学基金资助项目.

$$\begin{cases}\dot{x} = F_{11}x + F_{12}z, \\ \varepsilon\dot{z} = F_{21}x + F_{22}z,\end{cases} \tag{3}$$

这里

$$F_{ij} = A_{ij} + B_iG_j,\ i,j = 1,2.$$

在系统(1)强能控前提下，必有 G_2 存在，使 F_{22} 非异。

在 F_{22} 非异时，系统(3)可将慢、快变特性解耦. 即在变换

$$\begin{pmatrix}\xi \\ \eta\end{pmatrix} = \begin{bmatrix} I_n - \varepsilon HL & -\varepsilon H \\ L & I_m\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x \\ z\end{pmatrix} \tag{4}$$

下，系统(3)等价化为

$$\begin{pmatrix}\dot{\xi} \\ \varepsilon\dot{\eta}\end{pmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} - F_{12}L & 0 \\ 0 & F_{22} + \varepsilon LF_{12}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\xi \\ \eta\end{pmatrix}, \tag{5}$$

这里，L、H 满足方程

$$F_{22}L - \varepsilon LF_{11} + \varepsilon LF_{12}L - F_{21} = 0, \tag{6}$$

$$\varepsilon(F_{11} - F_{12}L)H - H(F_{22} + \varepsilon LF_{12}) + F_{12} = 0. \tag{7}$$

引理 1.[1] 设 F_{22} 非异. 记 $F_0 \triangleq F_{11} - F_{12}F_{22}^{-1}F_{21}$. 若

$$\sigma(F_0) = \{\lambda_{10}, \lambda_{20}, \cdots, \lambda_{n0}\},$$

$$\sigma(F_{22}) = \{\lambda_{n+1\,0}, \lambda_{n+2\,0}, \cdots, \lambda_{n+m\,0}\}.$$

则系统(3)(或(5))的特征值全体为 $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n, \lambda_{n+1}, \cdots, \lambda_{n+m}\}$ 有如下近似：

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \lambda_{i0} + \mathcal{O}(\varepsilon), \forall i \in \underline{n}, \\ \lambda_{n+j} &= (\lambda_{n+j\,0} + \mathcal{O}(\varepsilon))/\varepsilon,\ \forall j \in \underline{m}. \end{aligned} \tag{8}$$

引理 2.[1] 设 F_{22} 非异. 系统(3)的特征向量有

$$V_s = \begin{bmatrix} I_n \\ -L_0 \end{bmatrix} V_{\xi_0} + \mathcal{O}(\varepsilon),\quad V_f = \begin{bmatrix} 0 \\ I_m \end{bmatrix} V_{\eta_0} + \mathcal{O}(\varepsilon), \tag{9}$$

这里，V_{ξ_0} 是 F_0 的(广义)特征向量全体，V_{η_0} 是 F_{22} 的(广义)特征向量全体，$[V_s\, V_f]$ 是 $\begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21}/\varepsilon & F_{22}/\varepsilon\end{bmatrix}$ 的(广义)特征向量的全体，L_0 是 $\varepsilon = 0$ 时方程(6)的解.

类似地，可以得到奇异摄动系统(3)与它的慢、快变子系统的特征值与特征向量间的高阶近似关系式，写成引理形式如下：

引理 3. 设 F_{22} 非异，有

$$\lambda_i = \lambda_{i\,k} + \mathcal{O}(\varepsilon^{k+1}),\ \forall i \in \underline{n}, \forall k \geqslant 0,$$

$$\lambda_{n+j} = (\lambda_{n+jk} + \mathcal{O}(\varepsilon^{k+1}))/\varepsilon,\ \forall j \in \underline{m},\ \forall k \geqslant 0,$$

$$V_s = \begin{bmatrix} I_n \\ -L_k \end{bmatrix} V_{\xi_k} + \mathcal{O}(\varepsilon^{k+1}),\quad \forall k \geqslant 0,$$

$$V_f = \begin{bmatrix} \varepsilon H_{k-1} \\ I_m - \sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{k-1-i} L^{(i)}H^{(j)}\varepsilon^{i+j+1} \end{bmatrix} V_{\eta_k} + \mathcal{O}(\varepsilon^{k+1}),\quad \forall k \geqslant 0,$$

这里，(6)，(7)式的解为

$$L=\sum_{i=0}^{k}L^{(i)}\varepsilon^{i}+\mathscr{O}(\varepsilon^{k+1}),\quad H=\sum_{i=0}^{k}H^{(i)}\varepsilon^{i}+\mathscr{O}(\varepsilon^{k+1}),$$

$$L_k=\sum_{i=0}^{k}L^{(i)}\varepsilon^{i},\ H_k=\sum_{i=0}^{k}H^{(i)}\varepsilon^{i},$$

$$\lambda_{ik}\in\sigma(F_{11}-F_{12}L_k),\ \forall i\in\underline{n},$$

$$\lambda_{n+ik}\in\sigma(F_{22}+\varepsilon L_{k-1}F_{12}),\ \forall i\in\underline{m},$$

V_{ξ_k} 为 $(F_{11}-F_{12}L_k)$ 的(广义)特征向量全体，V_{η_k} 为 $(F_{22}+\varepsilon L_{k-1}F_{12})$ 的(广义)特征向量全体。

证。类似于文[1]内对引理 1、引理 2 的证明。

三、主 要 结 果

讨论系统(1)在状态反馈下的特征结构配置问题。不失一般性，假设 A_{22} 非异（由 (A_{22},B_2) 能控，必可用非异的 $(A_{22}+B_2K_2)$ 来代替 A_{22}，相应地用 $(A_{12}+B_1K_2)$ 代替 A_{12} 即可)。

设所需配置的特征结构为

$$\{\mu_i(\varepsilon):h_i,l_{ik}\,|\,i\in\underline{t_1+t_2},k\in\underline{h_i}\},\tag{10}$$

这里，$\mu_i(\varepsilon)(i\in\underline{t_1})$ 为“小”特征值，即为慢子系统所需配置的特征值，这一部分的特征结构为

$$\{\mu_i(\varepsilon):h_i,l_{ik}\,|\,i\in\underline{t_1}\},\tag{11}$$

其中，h_i 为特征值 $\mu_i(\varepsilon)$ 的几何重数，l_{ik} 为对应的阶数；类似地，快子系统所需配置的特征结构为

$$\{\mu_{t_1+j}(\varepsilon):h_{t_1+j},l_{t_1+j\,k}\,|\,j\in\underline{t_2}\}.\tag{12}$$

当仅需在 $\mathscr{O}(\varepsilon)$ 阶精度上，进行近似特征结构配置时，考察原系统(1)的慢、快变分解后的 $\mathscr{O}(\varepsilon)$ 近似系统

$$\begin{cases}\dot{x}=A_0x+B_0u_s,\\ \varepsilon\dot{z}=A_{22}z+B_2u_f,\end{cases}\tag{13}$$

这里

$$A_0=A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21},\quad B_0=B_1-A_{12}A_{22}^{-1}B_2.$$

设 (A_0,B_0) 的能控结构指数为 $\{\nu:n_1,n_2,\cdots,n_\nu\}$，$(A_{22},B_2)$ 的能控结构指数为 $\{\nu':n_1',n_2',\cdots,n_{\nu'}'\}$，则由文[2]知

定理 1. 设系统(1)强能控，则存在 G_0 与 G_2，使 $A_0+B_0G_0$ 及 $A_{22}+B_2G_2$ 分别具有特征结构(10)及 $\{\varepsilon\mu_{t_1+j}(\varepsilon):h_{t_1+j},l_{t_1+jk}\,|\,j\in\underline{t_2}\}$ 的零级近似的充要条件为

i) $\sum\limits_{i=1}^{t_1}\sum\limits_{k=1}^{h_i}l_{ik}=n,\ \sum\limits_{i=t_1+1}^{t_1+t_2}\sum\limits_{k=1}^{h_i}l_{ik}=m;$

ii) $h_i\leqslant n_1,\forall i\in\underline{t_1},h_{t_1+j}\leqslant n_1',\forall j\in\underline{t_2};$

$$\text{iii)}\ \sum_{i=1}^{t_1}\sum_{k=p}^{n_1} l_{ik} \leqslant \sum_{k=p}^{n_1} d_k,\ p = n_1, n_1-1, \cdots, 2, 1,$$

$$\sum_{i=t_1+1}^{t_1+t_2}\sum_{k=p}^{n_1'} l_{ik} \leqslant \sum_{k=p}^{n_1'} d_k',\quad p = n_1', n_1'-1, \cdots, 2, 1.$$

这里，规定 $$l_{ik} = 0,\quad \forall k \geqslant h_i + 1,$$
d_k、d_k' 分别是集 $\{n_1-k+1,\ n_2-k+1, \cdots, n_\nu-k+1\}$ 及集 $\{n_1'-k+1,\ n_2'-k+1, \cdots, n_{\nu'}'-k+1\}$ 中正整数的个数.

利用奇异摄动控制系统中的组合控制，可得

推论 1. 在定理 1 条件下，如果该定理的 i)—iii)满足. 则存在着某个 $\varepsilon^* > 0$，使系统(1)在控制

$$u_o = [(I + G_2A_{22}^{-1}B_2)G_0 + G_2A_{22}^{-1}A_{21}]x + G_2z \tag{14}$$

下，对一切 $\varepsilon\in(0,\varepsilon^*]$，闭环系统(3)具有特征结构

$$\{\mu_i(0)+0(\varepsilon): h_i, l_{ik} \mid i\in \underline{t_1}, k\in \underline{h_i}\},$$

$$\{\mu_{t_1+j}+0(1): h_i, l_{ik} \mid j\in \underline{t_2}, k\in \underline{h_i}\},$$

且对应的特征向量全体 $[V_i^c\ V_j^c]$ 有

$$V_i^c = \begin{bmatrix} I_n \\ -L_0 \end{bmatrix}\bar{V}_{\xi_0} + \mathcal{O}(\varepsilon),\quad V_j^c = \begin{bmatrix} 0 \\ I_m \end{bmatrix}\bar{V}_{\eta_0} + \mathcal{O}(\varepsilon),$$

这里，$\bar{V}_{\xi_0}$ 为 $(A_0 + B_0G_0)$ 的(广义)特征向量全体，$\bar{V}_{\eta_0}$ 是 $(A_{22} + B_2G_2)$ 的(广义)特征向量的全体.

为提高对闭环系统(3)的配置精度，考察相应各量的高阶近似.

由方程(6)，(7)知，$L^{(k)}$、$H^{(k)}$ 仅依赖于 $L^{(i)}$、$H^{(i)}(i=0,1,\cdots,k-1)$ 及 G_1、G_2 的选择. 构造组合控制时，选择

$$G_1 = G_s + G_2L. \tag{15}$$

方程(6)变为

$$A_{22}L - \varepsilon L(A_{11} + B_1G_s) + \varepsilon LA_{12}L - (A_{21} + B_2G_s) = 0. \tag{16}$$

即 L 仅与 G_s 有关. 设

$$G_s = \sum_{i=0}^{k} G^{(i)}\varepsilon^i + \mathcal{O}(\varepsilon^{k+1}),$$

记

$$G_{sk} = \sum_{i=0}^{k} G^{(i)}\varepsilon^i.$$

相应地有

$$L = L_k + \mathcal{O}(\varepsilon^{k+1}),\quad L_k = \sum_{i=0}^{k} L^{(i)}\varepsilon^i.$$

代入 $F_{11} - F_{12}L$ 的表达式得

$$F_{11} - F_{12}L = A_{11} - A_{12}L + B_1G_s = A_{11} - A_{12}L_k + B_1G_{sk} + \mathcal{O}(\varepsilon^{k+1}).$$

由(16)式知，$L^{(k)}$ 由 $L^{(i)}$、$G^{(i)}(i=0,1,\cdots,k-1)$ 及 $G^{(k)}$ 唯一确定

$$L^{(k)} = f_k(L^{(0)}, \cdots, L^{(k-1)}, G^{(0)}, \cdots, G^{(k-1)}) + A_{22}^{-1} B_2 G^{(k)}.$$

当在组合控制(14)下,系统慢变部分可表示为

$$F_{11} - F_{12}L = A_{11} - A_{12}L_{k-1} + B_1 G_{sk-1} - A_{12} f_k(L^{(0)}, \cdots, G^{(k-1)}) + B_0 G^{(k)} \varepsilon^k + \mathcal{O}(\varepsilon^{k+1}). \tag{17}$$

上式表明，当 $G^{(0)}, \cdots, G^{(k-1)}$ 选定，就可得到慢变部分的 $\mathcal{O}(\varepsilon^k)$ 级的精度近似，再加 $G^{(k)}\varepsilon^k$ 的反馈控制,就可得到更高一级的精度的近似. 类似地，对系统的快变部分，也可得到同样的结论,

$$F_{22} + \varepsilon L F_{12} = A_{22} + \varepsilon L A_{12} + (B_2 + \varepsilon L B_1) G_2$$
$$= A_{22} + \varepsilon L_{k-1} A_{12} + B_2 G_{2k-} + \varepsilon \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{k-1-i} L^{(i)} B_1 G_2^{(j)} \varepsilon^{i+j} + \mathcal{O}(\varepsilon^{k+1}). \tag{18}$$

定理 2. 设系统 (1)强能控，定理 1 的条件 i)—iii) 成立. 则存在 $G^{(0)}, \cdots, G^{(k)}$, $G_2^{(0)}, \cdots, G_2^{(k)}$. 使闭环系统(3)在组合控制(14)下，具有特征结构(10)及(11)的高阶精度的近似配置. 其中大特征值为 $\mathcal{O}(\varepsilon^k)$,其余为 $\mathcal{O}(\varepsilon^{k+1})$ 阶.

注. 条件 i)—iii)在定理 1 中是充要条件,而在定理 2 中是充分条件,原因在于在不同精度上,所对应的能控结构指数将发生变化,变化的结果使下列形式的值:

$$\operatorname{rank}[B\,AB \cdots A^{j-1}B\,A^jB] - \operatorname{rank}[B\,AB \cdots A^{j-1}B]$$

不减 ($\forall j \geqslant 1$).

参 考 文 献

[1] Kobotovic, P. V., Khalil, H. K. & O'Reilly, J., Singular Perturbation Methods in Control: Analysis and Design, Academic Press, London, 1986.

[2] 许可康、黄一,关于特征结构配置,科学通报 **36**(1991),(15),1121—1124.

[3] 何关钰、许可康,特征结构配置的多项式法,应用数学学报,**15**(1992),(1).

[4] 许可康,控制系统中的奇异摄动,科学出版社,北京,1986.

EIGENSTRUCTURE ASSIGNMENT OF LINEAR SINGULARLY PERTURBED SYSTEMS

HUANG YI XU KEKANG

(Institute of Systems Science, Academia Sinica, Beijing 100080)

ABSTRACT

Based on the two-time scale properties of singularly perturbed systems and the composite control method, this paper shows that eigenstructure assignment problems of the linear time-invariant singularly perturbed systems can be solved equivalently by assigning the eigenstructures of slow and fast subsystems respectively. This facilitates the development of an approximation of the problem to an arbitrary degree of accuracy.

Key words Singularly perturbed system; composite control; eigenstructure assignment.