

# 多变量自寻优极点配置自校正控制器<sup>1)</sup>

陶守林

舒迪前

(中国科学院电工研究所, 北京 100080) (北京科技大学自动化系, 100083)

## 摘 要

本文提出了一种多变量自寻优闭环移动极点极点配置自校正控制算法, 其基本策略是: 在控制过程中, 以多变量广义最小方差为目标自动移动闭环极点, 且在控制量允许的范围内, 使闭环极点处于理想位置上. 理论与仿真表明: 本文给出的算法避免了预先确定闭环极点位置所带来的种种不利现象, 不仅能实现最优控制, 且仍具有极点配置的鲁棒性.

**关键词:** 多变量系统, 自寻优, 闭环移动极点, 极点配置.

## 一、引 言

多变量极点配置问题, 已有许多学者做了工作. 众所周知, 极点配置方法不是最优化设计方法, 而是一种经典综合方法, 它具有实现的简易性与直观性. 在极点配置方法中, 闭环极点常常被配置在预定的位置上, 所需控制量在某种程度上和设置的闭环极点与原开环极点的距离成反比例. 如果闭环极点的位置选择不当, 可导致控制量过大, 甚至使系统失稳, 特别是在系统传递函数先验知识不足时, 更易发生上述情况. Ghosh<sup>[1]</sup> 等人提出了一种极点移动自校正控制算法, 其基本思想就是选择一个合适的极点移动因子  $\alpha$ , 使闭环极点沿径向朝  $z$  平面原点移动, 从而获得一个稳定的控制器. 但要选择一个合适的极点移动因子  $\alpha$ , 并非易事, 这往往依赖于系统运行条件. 一般来说, 在稳态条件下,  $\alpha$  可接近零, 即极点非常靠近原点; 在动态条件下,  $\alpha$  不能太小, 否则所需控制量太大, 从而受客观实际的约束. 为此 Chengshi-Jie<sup>[2]</sup> 和 A. Chandra<sup>[3]</sup> 等人相继提出了自寻极点的控制思想. 本文在文献[2,3]的基础上, 并根据实际对象的要求, 将这种思想推广到多变量系统.

## 二、多变量广义最小方差控制策略

Clark 和 Gawthrop<sup>[4]</sup> 在 1975 年就提出了广义最小方差控制策略. 其基本思想是构造一个辅助输出系统, 并以输出误差和控制分别加权的性能指标为最小来设计控制器.

本文于 1991 年 6 月 14 日收到.

1) 国家自然科学基金资助项目. 本文曾在全国冶金自动化学术年会(北戴河)上宣读.

这样不仅可克服自校正调节器的主要缺点,且保留了它的简易性。

### 1) 被控对象.

设被控过程可用一 CARMA 模型来描述

$$A_{(z^{-1})}\mathbf{y}_{(k)} = B_{(z^{-1})}\mathbf{u}_{(k-d)} + C_{(z^{-1})}\mathbf{e}_{(k)}, \quad (1)$$

式中  $\mathbf{y}_{(k)} \in \mathbb{R}^p$ 、 $\mathbf{u}_{(k)} \in \mathbb{R}^q$  和  $\mathbf{e}_{(k)} \in \mathbb{R}^p$  分别为过程输出、控制输入和均值为零,方差为  $R_e$  的白噪声向量序列,  $d$  为系统的最小延时,  $A_{(z^{-1})} \in \mathbb{R}_{(z^{-1})}^{p \times p}$ ,  $B_{(z^{-1})} \in \mathbb{R}_{(z^{-1})}^{p \times q}$ ,  $C_{(z^{-1})} \in \mathbb{R}_{(z^{-1})}^{p \times p}$ , 且

$$\text{有 } A_{(z^{-1})} = I + \sum_{i=1}^{n_a} A_i z^{-i}, \quad B_{(z^{-1})} = \sum_{i=0}^{n_b} B_i z^{-i}, \quad C_{(z^{-1})} = I + \sum_{i=1}^{n_c} c_i z^{-i}.$$

### 2) 性能指标.

$$J = E\{\|P_{(z^{-1})}\mathbf{y}_{(k+d)} - R_{(z^{-1})}\mathbf{w}_{(k)}\|^2 + \|Q'_{(z^{-1})}\mathbf{u}_{(k)}\|^2\}, \quad (2)$$

其中  $\mathbf{w}_{(k)} \in \mathbb{R}^p$  是已知参考信号向量, 可为时变,  $P_{(z^{-1})} \in \mathbb{R}^{p \times p}$ ,  $R_{(z^{-1})} \in \mathbb{R}_{(z^{-1})}^{p \times p}$ ,  $Q'_{(z^{-1})} \in$

$\mathbb{R}_{(z^{-1})}^{q \times q}$ , 是加权多项式阵, 且有  $P_{(z^{-1})} = \sum_{i=0}^{n_p} P_i z^{-i}$ ,  $Q'_{(z^{-1})} = \sum_{i=0}^{n_q} Q'_i z^{-i}$ ,  $R_{(z^{-1})} =$

$\sum_{i=0}^r R_i z^{-i}$ . 要求  $P_0 P_{(z^{-1})}$  均为非奇异, 最优控制律  $\mathbf{u}_{(k)}$  可通过使性能指标  $J$  为极小求得.

### 3) 辅助系统输出及 $d$ 步向前最优预报器<sup>[5]</sup>.

定义辅助输出

$$\boldsymbol{\phi}_{(k)} = P_{(z^{-1})}\mathbf{y}_{(k)}, \quad (3)$$

引入矩阵变换  $\bar{P}_{(z^{-1})}A_{(z^{-1})} = \bar{A}_{(z^{-1})}P_{(z^{-1})}$ , 且定义  $\bar{C}_{(z^{-1})} \triangleq \bar{P}_{(z^{-1})}C_{(z^{-1})}$ ,  $\bar{B}_{(z^{-1})} \triangleq \bar{P}_{(z^{-1})}B_{(z^{-1})}$ , 并要求  $P_{(z^{-1})}$ ,  $A_{(z^{-1})}$  右互质, 且满足  $\det \bar{A}_{(z^{-1})} = \det A_{(z^{-1})}$ ,  $\bar{A}_{(0)} = I_p$ ;  $\bar{P}_{(z^{-1})}$ ,  $A_{(z^{-1})} \in$

$\mathbb{R}_{(z^{-1})}^{p \times p}$  左互质, 存在不唯一, 且有  $\bar{A}_{(z^{-1})} = I + \sum_{i=1}^{n_a} \bar{A}_i z^{-i}$ ,  $\bar{B}_{(z^{-1})} = \sum_{i=0}^{n_p+n_b} \bar{B}_i z^{-i}$ ,  $\bar{C}_{(z^{-1})} =$

$\sum_{i=0}^{n_c+n_p} \bar{C}_i z^{-i}$ . 再引入多项式矩阵恒等式.

$$\bar{C}_{(z^{-1})} = \bar{A}_{(z^{-1})}F_{(z^{-1})} + z^{-d}G_{(z^{-1})}, \quad (4)$$

由于  $\bar{A}_{(0)} = I_p$  非奇异, 所以由(4)式确定的  $F_{(z^{-1})}$  和  $G_{(z^{-1})}$  是唯一的. 定义  $\bar{F}_{(z^{-1})} \triangleq F_{(z^{-1})}P_0^{-1}$ ,  $\bar{G}_{(z^{-1})} \triangleq G_{(z^{-1})}P_0^{-1}$ , 则有

$$\tilde{F}_{(z^{-1})}\bar{G}_{(z^{-1})} = \tilde{G}_{(z^{-1})}\bar{F}_{(z^{-1})}, \quad (5)$$

其中  $\tilde{F}_{(z^{-1})}$ ,  $\tilde{G}_{(z^{-1})} \in \mathbb{R}_{(z^{-1})}^{p \times p}$  左互质, 满足  $\det \tilde{F}_{(z^{-1})} = \det \bar{F}_{(z^{-1})}$ ,  $\tilde{F}_0 = \bar{F}_0 = I_p$ . 用  $P_0^{-1}$  右乘(4)式两端, 结合(5)式有

$$\tilde{C}_{(z^{-1})} = \tilde{F}_{(z^{-1})}\bar{A}_{(z^{-1})} + z^{-d}\tilde{G}_{(z^{-1})},$$

其中  $\tilde{C}_{(z^{-1})} \in \mathbb{R}_{(z^{-1})}^{p \times p}$ , 且  $\tilde{C}_{(z^{-1})} = I_p + \sum_{j=1}^{n_p+n_c} \tilde{C}_j z^{-j}$  可进一步推得辅助输出的最优(最小方差意义的)  $d$  步向前预报器为  $\boldsymbol{\phi}_{(k+d|k)}^* = \tilde{C}_{(z^{-1})}^{-1}[\tilde{F}_{(z^{-1})}\bar{B}_{(z^{-1})} + \tilde{G}_{(z^{-1})}\boldsymbol{\phi}_{(k)}]$ . 预报误差为

$$\tilde{\boldsymbol{\phi}}_{(k+d)} = \boldsymbol{\phi}_{(k+d)} - \boldsymbol{\phi}_{(k+d|k)}^* = F_{(z^{-1})}\mathbf{e}_{(k+d)}. \quad (6)$$

### 4) 多变量广义最小方差控制器.

令  $\partial J / \partial \mathbf{u}_{(k)} = 0$  可推得

$$\bar{B}_0^T[\boldsymbol{\phi}_{(k+d|k)}^* - R_{(z^{-1})}\mathbf{w}_{(k)}] + Q_{(z^{-1})}\mathbf{u}_{(k)} = 0. \quad (7)$$

因  $\bar{B}_0 \in \mathbb{R}_{(z^{-1})}^{p \times q}$ ,  $p \leq q$ , 所以  $p < q$  时,  $\bar{B}_0$  为非方阵, 对  $\bar{B}_0$  求逆可用广义逆来求解. 为了获得控制律  $u_{(k)}$  的显式形式, 可采用矩阵和多项式矩阵的交换, 使控制信号从(7)式中分离出来. 定义一广义输出预报  $\phi_{(k+d|k)}^* \in \mathbb{R}^q$

$$\phi_{(k+d|k)}^* \triangleq \bar{B}_0^T [\phi_{(k+d|k)}^* - R_{(z^{-1})} w_{(k)}] + Q_{(z^{-1})} u_{(k)},$$

则广义输出相应地定义为

$$\phi_{(k+d)} \triangleq \bar{B}_0^T [\phi_{(k+d)} - R_{(z^{-1})} w_{(k)}] + Q_{(z^{-1})} u_{(k)}, \tag{8}$$

由(6)式,(8)式可知, 最优控制律  $u_{(k)}$  满足  $\phi_{(k+d|k)}^* = 0$ , 因此性能指标(2)式和下列性能指标  $J_1 = E \{ \|\phi_{(k+d)}\|^2 \}$  所确定的最优控制律是一致的. 引入变换  $\bar{B}_0^T \tilde{C}_{(z^{-1})}^{-1} = \bar{C}_{(z^{-1})}^{-1} \bar{B}_0^T$ , 式中  $\bar{C}_{(z^{-1})} \in \mathbb{R}_{(z^{-1})}^{q \times q}$ ,  $\bar{B}_0 \in \mathbb{R}^{p \times q}$  且满足  $\det \bar{C}_{(z^{-1})} = \det \tilde{C}_{(z^{-1})}$ ,  $\bar{C}_0 = I_q$ , 可推得

$$M_{(z^{-1})} \phi_{(k)} + H_{(z^{-1})} u_{(k)} + N_{(z^{-1})} w_{(k)} = 0, \tag{9}$$

其中  $M_{(z^{-1})} \in \mathbb{R}_{(z^{-1})}^{q \times p}$ ,  $N_{(z^{-1})} \in \mathbb{R}_{(z^{-1})}^{q \times p}$ ,  $H_{(z^{-1})} \in \mathbb{R}_{(z^{-1})}^{q \times q}$ ,

$$\begin{cases} M_{(z^{-1})} = \bar{B}_0^T \tilde{G}_{(z^{-1})}, \\ H_{(z^{-1})} = \bar{B}_0^T \tilde{F}_{(z^{-1})} \bar{B}_{(z^{-1})} + \bar{C}_{(z^{-1})} Q_{(z^{-1})}, \\ N_{(z^{-1})} = -\bar{C}_{(z^{-1})} \bar{B}_0^T R_{(z^{-1})}, \end{cases} \tag{10}$$

且  $\deg M_{(z^{-1})} = n_m = n_g$ ,  $n_h = \deg H_{(z^{-1})} = \max[n_b + n_p + d - 1, n_c + n_p + n_q]$ ,  $n_n = \deg N_{(z^{-1})} = n_c + n_p + n_r$ .

由(9)式可得最优控制律的显式形式

$$u_{(k)} = -H_{(z^{-1})}^{-1} [M_{(z^{-1})} \phi_{(k)} + H_{(z^{-1})}^* u_{(k-1)} + N_{(z^{-1})} w_{(k)}], \tag{11}$$

其中  $z^{-1} H_{(z^{-1})}^* = H_{(z^{-1})} - H_0$ .

### 5) 闭环系统方程.

闭环系统方程用系统阵来表示可写成

$$\left[ \begin{array}{cc|cc} A_{(z^{-1})} & z^{-d} B_{(z^{-1})} & C_{(z^{-1})} & 0 \\ -M_{(z^{-1})} P_{(z^{-1})} & H_{(z^{-1})} & 0 & N_{(z^{-1})} \\ \hline I_p & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} y_{(z)} \\ -u_{(z)} \\ \epsilon_{(z)} \\ w_{(z)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ y_{(z)} \end{bmatrix}, \tag{12}$$

其特征阵

$$\Delta = \begin{bmatrix} A_{(z^{-1})} & z^{-d} B_{(z^{-1})} \\ -M_{(z^{-1})} P_{(z^{-1})} & H_{(z^{-1})} \end{bmatrix}_{(p+q)(p+q)}$$

特征方程为

$$\det \Delta = \det A_{(z^{-1})} \cdot \det [H_{(z^{-1})} + z^{-d} M_{(z^{-1})} P_{(z^{-1})} A_{(z^{-1})} B_{(z^{-1})}],$$

变换后可简化成

$$\det \Delta = \det \bar{C}_{(z^{-1})} \det [B_0^T P_0 P_{(z^{-1})} \tilde{B}_{(z^{-1})} + Q_{(z^{-1})} \tilde{A}_{(z^{-1})}], \tag{13}$$

式中  $A_{(z^{-1})} B_{(z^{-1})} = \tilde{B}_{(z^{-1})} \tilde{A}_{(z^{-1})}$  且  $\tilde{A}_{(z^{-1})} \in \mathbb{R}^{q \times q}$ ,  $\tilde{B}_{(z^{-1})} \in \mathbb{R}^{p \times q}$ . 从上式可看出,  $P_{(z^{-1})}$ ,  $Q_{(z^{-1})}$  对闭环系统的稳定性起着一定的作用.

## 三、自寻优极点配置自校正控制策略

自寻优极点配置控制思想, 就是在控制过程中, 以广义最小方差为目标, 在控制量允许的范围内, 使闭环极点沿径向朝  $z$  平面原点移动, 且能使闭环极点始终处于最佳位置上.

所谓使闭环极点沿径向朝  $z$  平面原点移动, 即闭环特征多项式阵  $T_{(z^{-1})}$  具有下列形式

$$T_{(\beta z^{-1})} = I_q + \beta T_1 z^{-1} + \beta^2 T_2 z^{-2} + \cdots + \beta^{n_t} T_{n_t} z^{-n_t}, \quad (14)$$

式中 对角阵  $\beta \in \mathbb{R}^{q \times q}$  为极点移动因子阵, 即  $\text{diag} \beta = [\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_q]$ ,  $0 < \alpha_i < 1 (i = 1, 2, \cdots, q)$ . 在极点移动过程中, 还要保证使损失函数  $J = E\{\|\phi_{(t+d)}\|^2\}$  极小.

$$\therefore \phi_{(k+d)} = \bar{B}_0^T [\phi_{(k+d)} - R_{(z^{-1})} w_{(k)}] + Q_{(z^{-1})} u_{(k)}, \quad (15)$$

$$\therefore \Delta \phi_{(k)} = \partial \phi / \partial \alpha \cdot \Delta \alpha + \partial \phi / \partial u \cdot \Delta u.$$

其中  $\alpha = [\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_q]$  为极点移动因子矢量, 而  $\Delta \alpha = [\Delta \alpha_1 \Delta \alpha_2 \cdots \Delta \alpha_q]$  为极点移动修正因子矢量.

$$\therefore \partial u / \partial \alpha = -[\partial \phi / \partial \alpha] \cdot [\partial \phi / \partial u]^{-1}.$$

由广义输出方程可知

$$\phi_{(k)} = [f_{1(\alpha_1, \cdots, \alpha_q, k)} \cdots f_{q(\alpha_1, \cdots, \alpha_q, k)}]^T,$$

所以

$$\frac{\partial \phi}{\partial \alpha} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \alpha_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial \alpha_q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_q}{\partial \alpha_1} & \cdots & \frac{\partial f_q}{\partial \alpha_q} \end{bmatrix}_{q \times q}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial u} = f_0,$$

$f_0 \in \mathbb{R}^{q \times q}$  的常数阵. 令控制量为  $u_{\min} \leq u \leq u_{\max}$ , 极点移动修正因子矢量  $\Delta \alpha$  可由下式求出:

$$\Delta \alpha = -k[\partial u / \partial \alpha]^{-1} \Delta u, \quad (16)$$

其中  $k$  为一个正常数方阵, 其目的避免  $\alpha(t)$  变化过大. 因此, 变极点因子  $\alpha_{(k)}$  为

$$\alpha_{(k)} = \alpha_{(k-1)} + \Delta \alpha, \quad (17)$$

求出每个采样时刻的  $\alpha(t)$ , 即可确定该时刻闭环极点位置, 从而实现了在  $u(t)$  允许范围内的广义最小方差控制.

## 四、自寻优极点配置自校正控制算法

### 1. 加权多项式阵 $P_{(z^{-1})}$ 、 $Q_{(z^{-1})}$ 、 $R_{(z^{-1})}$ 的确定

由极点配置方程及伪交换方程  $A_{(z^{-1})} \tilde{B}_{(z^{-1})} = B_{(z^{-1})} \tilde{A}_{(z^{-1})}$  及  $B_0^T P_0^T P_{(z^{-1})} \tilde{B}_{(z^{-1})} + Q_{(z^{-1})} \tilde{A}_{(z^{-1})} = T_{(\beta z^{-1})}$  可求得  $P_{(z^{-1})}$ 、 $Q_{(z^{-1})}$  及  $n_p = \deg P_{(z^{-1})} = n_t - n_b$ ,  $n_q = \deg Q_{(z^{-1})} = n_t - n_a$ . 由稳态跟踪偏差为零可求得  $R_{(z^{-1})}$ . 显然, 它们均是极点移动因子  $\alpha_{(k)} = [\alpha_{1(k)} \cdots \alpha_{q(k)}]$  的函数.

### 2. 闭环极点的确定

闭环极点应避免配置在左半圆内, 其最佳位置在单位圆内正实轴上, 并靠近原点, 此时系统响应迅速, 过程单调. 考虑到波动的影响, 极点应距原点有一定距离好. 一般按系统设计指标要求确定  $T_{(z^{-1})} \in \mathbb{R}_{(z^{-1})}^{q \times q}$ .

### 3. 估计参数方程

结合(8),(9),(10)式可得

$$\bar{C}_{(z^{-1})} \phi_{(k+d)} = M_{(z^{-1})} \phi_{(k)} + H_{(z^{-1})} u_{(k)} + N_{(z^{-1})} w_{(k)} + \epsilon_{(k+d)}, \quad (18)$$

为了得到实用的估计参数方程,讨论  $\bar{C}_{(z^{-1})}$

$$1) \quad \bar{C}_{(z^{-1})} = I_q \quad (\text{即 } C_{(z^{-1})} = I_q, P_{(z^{-1})} = P_0 \text{ 时}),$$

(18)式可写为

$$\phi_{(k+d)} = \Theta^T \varphi_k + \varepsilon_{(k+d)}, \quad (19)$$

其中

$$\Theta = [\theta_1 \theta_2 \cdots \theta_q] = [M_0 M_1 \cdots; H_0 H_1 \cdots; N_0 N_1 \cdots]^T,$$

$$\varphi_k^T = [\psi_{(k)}^T \psi_{(k-1)}^T \cdots; u_{(k)}^T u_{(k-1)}^T \cdots; w_{(k)}^T w_{(k-1)}^T \cdots],$$

根据(19)式可估计出  $\hat{M}_0, \hat{M}_1, \cdots; \hat{H}_0, \hat{H}_1, \cdots; \hat{N}_0, \hat{N}_1, \cdots$ , 从而可求出控制律  $u_{(k)}$ , 显然因  $\phi_{(k)}$  与  $a_{(k)}$  有关, 所以  $u_{(k)}$  也与  $a_{(k)}$  有关.

$$2) \quad \bar{C}_{(z^{-1})} \neq I_q \quad (\text{即 } C_{(z^{-1})} \neq I_p \text{ 或 } P_{(z^{-1})} \neq P_0) \text{ 时, (18)式可写成}$$

$$\begin{aligned} \phi_{(k+d)} &= M_{(z^{-1})} \phi_{(k)} + H_{(z^{-1})} u_{(k)} + N_{(z^{-1})} w_{(k)} + \varepsilon_{(k+d)} \\ &\quad - \bar{C}^* [\phi_{(k+d-1)} - \varepsilon_{(k+d-1)}], \end{aligned} \quad (20)$$

式中  $z^{-1} \bar{C}_{(z^{-1})}^* = \bar{C}_{(z^{-1})} - I_q$ , 因最优控制律将使  $\phi_{(k+d|k)}^* = 0$  即在  $k+d$  时刻已有  $\phi_{(k+d-1|k-1)}^* = \phi_{(k+d-2|k-2)}^* = \cdots = 0$ , 则(20)式可统一到(19)式得

$$\phi_{(k+d)} = \bar{\Theta} \bar{\varphi}_{(k)} + \varepsilon_{(k+d)}, \quad (21)$$

式中  $\bar{\Theta}^T = [\Theta^T; \bar{C}_1 \bar{C}_2 \cdots]$ ,  $\bar{\varphi}_{(k)}^T = [\varphi_k^T; -\phi_{(k+d-1|k-1)}^*; -\phi_{(k+d-2|k-2)}^* \cdots]$ .

#### 4. 计算步骤

- 1) 采入新( $k$ 时刻)时刻系统输出向量  $y_{(k)}$  和参考信号向量  $w_{(k)}$ .
- 2) 由极点配置方程与伪交换方程求出  $P_{(z^{-1})} Q_{(z^{-1})}$  由稳态跟踪偏差为零求得  $R_{(z^{-1})}$ .
- 3) 根据(3), (15)式计算辅助输出  $\phi_{(k)}$  及广义输出  $\phi_{(k+d)}$ .
- 4) 由  $k-d$  时刻及以前的输入、输出、参考信号量测值组成向量  $\varphi_{(k-d)}$  (或  $\bar{\varphi}_{(k-d)}$ ).
- 5) 根据参数估计方程估计  $\hat{\Theta}_{(k)}$ , 并分离出  $\hat{H}_0, \hat{H}^*, \hat{M}, \hat{N}$ .
- 6) 计算新时刻( $k$ 时刻)控制输入向量  $u_{(k)}$ .
- 7) 求  $\partial u / \partial a$ .

$$8) \quad \text{求 } \Delta u = \begin{cases} u_{\max} - u & u \geq 0; \\ u - u_{\min} & u < 0. \end{cases}$$

9) 计算极点移动因子修正值  $\Delta a$ .

10) 计算新时刻( $k$ 时刻)极点移动因子

$$a_{(k)} = a_{(k-1)} + \Delta a.$$

11)  $k+1 \Rightarrow k$  重复 1) — 10).

## 五、仿 真 研 究

例. 设有一开环不稳定的非最小相位系统

$$y_{(k)} + A_1 y_{(k-1)} = B_0 u_{(k-1)} + B_1 u_{(k-2)} + \varepsilon_{(k)},$$

其中

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.9 & 0.1 \\ 0.5 & -0.2 \end{bmatrix}, \quad B_0 = \begin{bmatrix} 0.2 & 1.0 \\ 0.25 & 0.2 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 \end{bmatrix},$$

$$Re = E\{\varepsilon_{(k)} \cdot \varepsilon_{(k)}^T\} = \text{diag}(0.1, 0.1).$$

因为  $\det A_{(z^{-1})} = 0$  的根为  $z_1 = 1.1603$ ,  $z_2 = -0.0603$ ,  $\det B_{(z^{-1})} = 0$  的根为  $z_1 = 3.3333$ ,  $z_2 = -1.4286$ , 所以该系统是开环不稳定的非最小相位系统. 给定期望闭环系统多项式阵为

$$T_{(\beta z^{-1})} = I_2 + \beta T_1 z^{-1} = \begin{bmatrix} 1 - 0.1\alpha_1 z^{-1} & 0 \\ 0 & 1 - 0.2\alpha_2 z^{-1} \end{bmatrix},$$

$\beta = \text{diag}(\alpha_1, \alpha_2)$  即当  $\beta = I_2$  时, 配置闭环系统极点为  $z_1 = 0.1$ ,  $z_2 = 0.2$ , 由极点配置方程可确定  $P_{(z^{-1})}, Q_{(z^{-1})}$ ,

$$P_{(z^{-1})}\tilde{B}_{(z^{-1})} + Q_{(z^{-1})}\tilde{A}_{(z^{-1})} = T_{(\beta z^{-1})}.$$

因  $n_b = 1$ ,  $n_a = 1$ , 取  $n_p = 0$ ,  $n_q = 0$ . 可计算出

$$P_{(z^{-1})} = P_0 = \begin{bmatrix} 1.4532 - 0.08857\alpha_1 & -0.7053 + 0.1312\alpha_1 \\ -0.7914 - 0.0164\alpha_2 & 0.3051 - 0.3460\alpha_2 \end{bmatrix},$$

$$Q_{(z^{-1})} = Q_0 = \begin{bmatrix} 0.8857 - 0.01509\alpha_1 & -1.3121 + 0.06233\alpha_1 \\ 0.082 + 0.0898\alpha_2 & 1.7304 + 0.0856\alpha_2 \end{bmatrix}.$$

$R_{(z^{-1})}$  可根据稳态跟踪偏差  $e_{(\infty)}^*$  为零求得, 设参考信号为单位阶跃信号, 即  $w(z) = (1 - z^{-1})I$ , 其中  $I$  表示元素为 1 的列向量, 则有  $e_{(\infty)}^* = \lim_{z \rightarrow 1} G_{e(z^{-1})}I$  在  $z \rightarrow 1$  时, 取

$$G_{e(z^{-1})} \xrightarrow{z \rightarrow 1} (1 - z^{-d})I_p,$$

而  $E_{(z)} \triangleq y_{(z)} - w_{(z)} = G_{e(z^{-1})}w_{(z)} - w_{(z)}$ ,

其中  $G_{e(z^{-1})} = I_p - z^{-d}\tilde{B}_{(z^{-1})}[P_{(z^{-1})}\tilde{B}_{(z^{-1})} + Q_{(z^{-1})}\tilde{A}_{(z^{-1})}]^{-1}R_{(z^{-1})}$   
 $= I_p - z^{-d}\tilde{B}_{(z^{-1})}T_{(z^{-1})}^{-1}R_{(z^{-1})}$ ,

$$T_{(z^{-1})} \triangleq P_{(z^{-1})}\tilde{B}_{(z^{-1})} + Q_{(z^{-1})}\tilde{A}_{(z^{-1})},$$

当  $e_{(\infty)}^* \rightarrow 0$ , 有  $\tilde{B}_{(1)}T_{(\beta \times 1)}^{-1}R_{(1)} = I_p$ . 取  $R_{(z^{-1})} = R_0 \triangleq T_{(\beta \times 1)}\tilde{B}_{(1)}^{-1}$  得

$$R_{(z^{-1})} = R_0 = \begin{bmatrix} 0.5360 - 0.0536\alpha_1 & 1.7750 - 0.1775\alpha_1 \\ 0.0185 - 0.0037\alpha_2 & 1.7555 - 0.3511\alpha_2 \end{bmatrix},$$

由(10)式得

$$M_{(z^{-1})} = M_0 = \begin{bmatrix} 1.48005 - 0.12112\alpha_1 & 0.44383 - 0.02465\alpha_1 \\ -0.77834 + 0.1073\alpha_2 & -0.24385 - 0.01464\alpha_2 \end{bmatrix},$$

$$H_{(z^{-1})} = H_0 + H_1 z^{-1},$$

$$H_0 = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}, \quad H_1 = \begin{bmatrix} 1.4532 - 0.08857\alpha_1 & -0.7053 + 0.13121\alpha_1 \\ -0.7914 - 0.0164\alpha_2 & 0.3051 - 0.34608\alpha_2 \end{bmatrix},$$

$$N_{(z^{-1})} = N_0 = \begin{bmatrix} -0.5360 + 0.0536\alpha_1 & -1.7750 + 0.1775\alpha_1 \\ -0.0185 + 0.0037\alpha_2 & -1.7555 + 0.3511\alpha_2 \end{bmatrix}.$$

因为  $C_{(z^{-1})} = I_2$ ,  $P_{(z^{-1})} = P_0$ , 又由(15)式, 所以  $\tilde{C}_{(z^{-1})} = I_p$ . 再由(10)式及极点配置方程可推得

$$\phi_{(k+d)} = H_{(z^{-1})}u_{(k)} + M_{(z^{-1})}y_{(k)} - R_{(z^{-1})}w_{(k)},$$

由上式可求偏导数  $\partial \phi_{(k)} / \partial u_{(k-d)} = H_0$ ,

$$\frac{\partial u_{(k)}}{\partial \alpha_{(k)}} = - \left[ \frac{\partial \phi_{(k)}}{\partial \alpha_{(k)}} \right] / \left[ \frac{\partial \phi_{(k)}}{\partial u_{(k-d)}} \cdot z^{-d} \right] = -z^d \left[ \frac{\partial \phi_{(k)}}{\partial \alpha_{(k)}} \right] / \left[ \frac{\partial \phi_{(k)}}{\partial u_{(k-d)}} \right],$$

因  $\phi_{(k)} \in R^{2 \times 1}$ ,  $a_{(k)} \in R^{2 \times 1}$ , 所以  $[\partial \phi_{(k)} / \partial a_{(k)}] \in R^{2 \times 2}$ ,  $[\partial \phi_{(k)} / \partial u_{(k-d)}] \in R^{2 \times 2}$ , 可求得

$$\Delta a_{(k)} = -k[\partial u_{(k)} / \partial a_{(k)}]^{-1} \Delta u_{(k)}.$$

若  $a_{(k)}$  的初值取为  $\{0.8, 0.85\}$ , 遗忘因子取为 0.995 参考输入  $w_{1(k)}$ 、 $w_{2(k)}$  幅度为 10, 间隔为 50 个采样周期的方波信号. 仿真输出曲线见图 1, 控制律见图 2, 极点移动因子变化曲线见图 3.

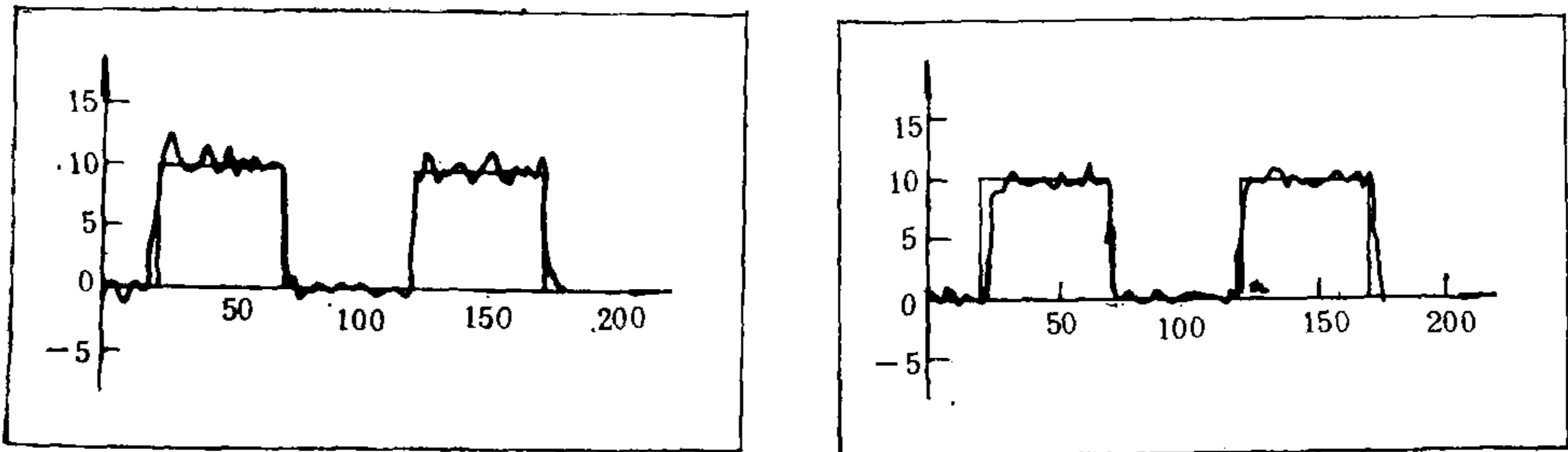


图 1 输出、参考仿真曲线  $y(t)$ 、 $w(t)$

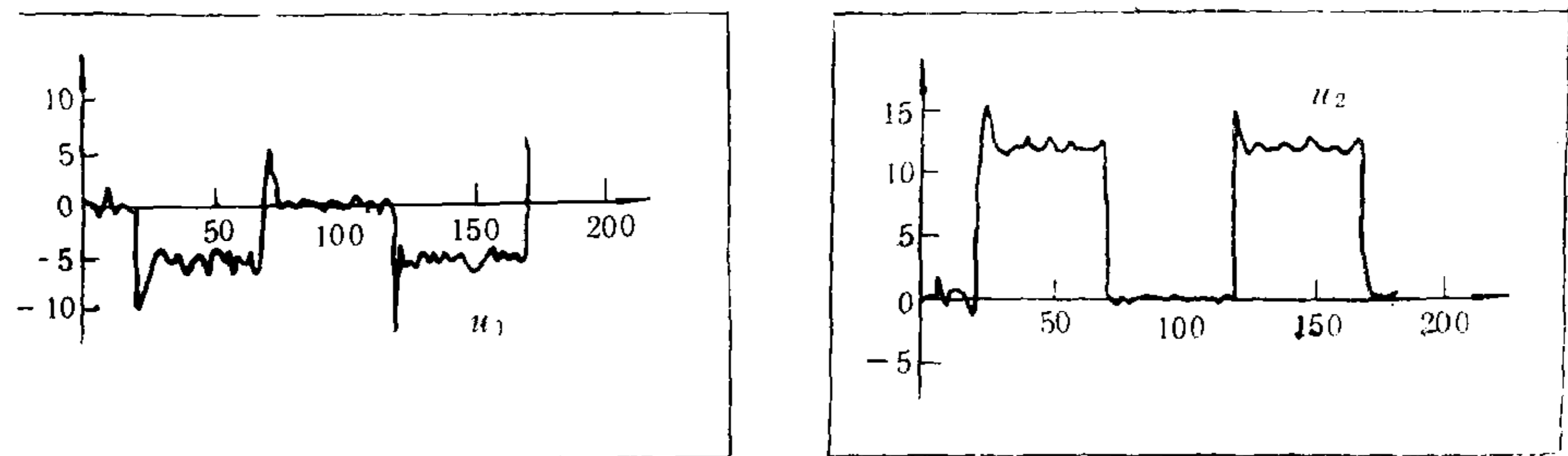


图 2 输入控制律  $u(t)$

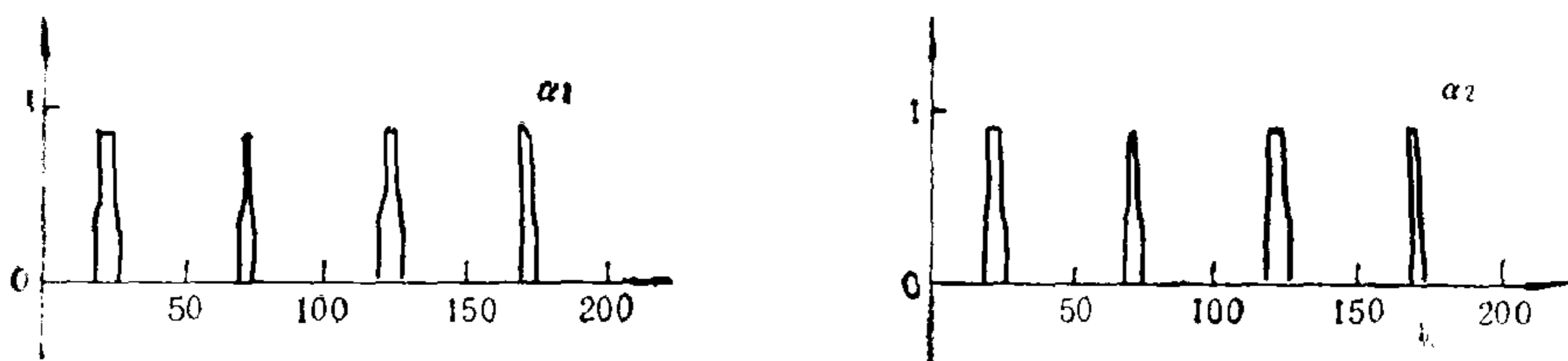


图 3 极点移动因子变化曲线  $\alpha(t)$

本文介绍的自寻优极点配置自校正控制算法, 避免了预先确定闭环极点位置所带来的种种不利现象, 且能实现最优控制, 是一种有应用前景的新算法.

### 参 考 文 献

- [ 1 ] Ghosh, A., Ledwich, G., Malik, O. P. and Hope, G. S., Power System Stabilizer Based on Adaptive Control Techniques, *IEEE Trans on Power Apparatus and Systems*, **PAS-130**(1984), 1983—1989.
- [ 2 ] Cheng shi-jie, Chow, Y. S., Malik, O. P. and Hope, G. S., An Adaptive Synchronous Machine Stabilizer, *IEEE/PES 1985 Joint Power Generation Conference*, TPGC601—0, 85.
- [ 3 ] Chandra, A., Malik, O. P. and Hope, G. S., Generalised Self-tuning Controller with Self Searching Pole

Shift, *IFAC 10th World Conference on Automatic Control*, 10(1987), 88—92.

- [4] Clark, D. W. and Gawthrop, P. J., Self-tuning Controller, *Proc IEE*, 122(1975), (9), 929—934.  
 [5] 舒迪前、刘宏才、尹怡欣, 具有通用性能指标的多变量自校正控制器, *控制理论与应用*, 4(1987), (1).



**陶守林** 1985年毕业于华东冶金学院自动化系并获学士学位。1991年1月毕业于北京科技大学自动化系并获工学硕士学位。曾在冶金工业部冶金设备研究所从事轧制、拉丝过程自动化研制。现在中国科学院电工研究所主要从事电子束技术的研究。



**舒迪前** 1927年生, 湖南湘潭市人, 1951年毕业于南京大学工学院电机系。北京科技大学自动化系教授。长期从事工业自动化、自动控制及计算机应用等方面的教学和科研工作。主要研究方向为生产过程的建模、自适应控制和智能控制, 曾获得多项科研成果与奖励。主编及参加编写了《自适应控制》、《计算机控制系统——理论与应用》等书, 发表过学术论文数十篇。

## A MULTIVARIABLE SELF-OPTIMIZATION POLE ASSIGNMENT SELF-TUNING CONTROLLER

TAO SHOULIN

(Institute of Electrical Engineering, Academia Sinica, Beijing 100080)

SHU DIQIAN

(Dept. of Automation, Beijing Univ. of Science and Technology)

### ABSTRACT

This paper presents a multivariable self-optimization pole assignment self-tuning control algorithm. It can automatically search closed-loop poles and be located on appropriate positions in the allowable scale of control measure. This algorithm not only avoids the pre-determination of the closed-loop pole position, but also implements optimization control while keeping robustness of the pole placement.

**Key words:** Multivariable system; self-optimization; close-loop move pole; pole assignments.