第19卷 第2期 自 动 化 学 报 Vol. 19, No. 2
1993年 3月 ACTA AUTOMATICA SINICA Mar., 1993

短文

状态和参数联合估计方法及其在飞行试验中的应用

史忠科
(西北工业大学自控系，西安 710072)

摘　　要

本文提出了一种有效的状态和参数的联合估计方法. 针对参数估计结果有偏或发散的问题，本文给出了一种参数向量可控性模型，并由此模型得到了噪声相关的一种状态和参数的估计方法. 运用状态和参数联合估计的新方法进行飞行状态和测量仪器的误差估计，仿真和实际飞行数据处理的结果表明；本文提出的方法可以给出飞行状态和仪器误差估计的满意结果，比普通推广 Kalman 滤波方法更有效.

关键词: Kalman 滤波，状态估计，参数估计，飞行试验，数值稳定性.

一、引　　言

60年代，当 Kalman 滤波器出现后，Jazwinsky 提出了将未知参数作为扩充状态与状态同时进行估计[1]的方法，很多人认为线性系统的状态和偏差估计问题就可以解决了. 然而，一经实践，人们发现这种方法对参数的估计常常是有偏或发散的. Ljung 于1979年给出了理论研究结果，证明了应用推广 Kalman 滤波对状态和未知参数同时估计时，必须满足一系列的条件才能准确地估计出状态和未知参数；对非线性系统进行状态和偏差估计时条件更为苛刻[2]. 1976年，Jonkers 将推广 Kalman 滤波用于飞行状态和测量仪器的误差估计后[3]，航空界当时认为这一方法比以前所用的回归分析法、最小二乘法和极大似然法都要准确. 因为只有推广 Kalman 滤波方法才考虑了系统噪声和量测噪声，而回归分析法、最小二乘法和极大似然法都不能考虑系统噪声. 大量的理论研究和实际应用都表明了推广 Kalman 滤波、极大似然法都必须对初值和噪声统计特性、飞机机动形状、噪声水平、数据长度作一定的限制后，方能得出合乎工程要求的结果[4]. 因此，给出一种有效的状态和偏差估计方法，对理论研究和实际应用都有积极的意义.

本文于1991年4月20日收到.

二、状态和参数的联合估计方法

设线性系统的状态方程为

$$\boldsymbol{x}_{k+1}=\phi_{k+1,k}\boldsymbol{x}_k+B_k\boldsymbol{b}_1+\Gamma_k\boldsymbol{w}_k, \tag{1}$$

观测方程为

$$\boldsymbol{y}_{k+1}=H_{x,k+1}\boldsymbol{x}_{k+1}+H_{b,k+1}\boldsymbol{b}_2+\boldsymbol{v}_{k+1}, \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{x}$ 为 n 维状态向量；$\boldsymbol{y}$ 为 m 维观测向量；$\boldsymbol{b}_1$，$\boldsymbol{b}_2$ 分别为系统偏差和测量偏差（或未知参数）；$\boldsymbol{w},\boldsymbol{v}$ 为互不相关的零均值白噪声序列，且方差分别为 Q 和 R.

设 $\boldsymbol{z}=[\boldsymbol{x}^T,\boldsymbol{b}_1^T,\boldsymbol{b}_2^T]^T$，代入(1)，(2)式中得

$$\boldsymbol{z}_{k+1}=A_k\boldsymbol{z}_k+E_k\boldsymbol{w}_k, \tag{3}$$

$$\boldsymbol{y}_{k+1}=H_{k+1}\boldsymbol{z}_{k+1}+\boldsymbol{v}_{k+1}. \tag{4}$$

式中

$$A=\begin{bmatrix}\phi_{k+1,k} & B_k & 0\\ 0 & I & 0\\ 0 & 0 & I\end{bmatrix},\ E_k=\begin{bmatrix}\Gamma_k\\ 0\\ 0\end{bmatrix},$$

$$H_{k+1}=[H_{x,k+1},0,H_{b,k+1}].$$

明显地，参数向量 $\boldsymbol{b}_1$，$\boldsymbol{b}_2$ 都不可控；当 $\boldsymbol{b}_1$ 的维数大于状态 $\boldsymbol{x}$ 维数、$\boldsymbol{b}_2$ 的维数大于 $\boldsymbol{y}$ 的维数时，$\boldsymbol{b}_1$，$\boldsymbol{b}_2$ 又不能完全可观测. 根据(3)、(4)式，利用推广 Kalman 滤波方法估计 $\boldsymbol{b}_1$，$\boldsymbol{b}_2$ 时，常常得到有偏或发散的结果. 为了解决这一问题，采用下述方法来处理.

设　$\boldsymbol{b}=[\boldsymbol{b}_1^T,\boldsymbol{b}_2^T]^T$，有

$$\boldsymbol{b}_{k+1}=\boldsymbol{b}_k+\bar{K}_{b,k}\boldsymbol{\eta}_k, \tag{5}$$

式中，$\boldsymbol{b}_k$ 为 $\boldsymbol{b}$ 的第 K 次迭代所得的估计值，$\boldsymbol{\eta}$ 为随机噪声，K_b 为噪声项的系数矩阵. 当 $\boldsymbol{b}_k$ 收敛于 $\boldsymbol{b}$ 时，$\boldsymbol{\eta}_k\approx 0$.

设

$$\boldsymbol{z}_k=[\boldsymbol{x}_k^T,\boldsymbol{b}_k^T]^T,\ G_k=[B_k,0],$$

可得

$$\boldsymbol{z}_{k+1}=A_k\boldsymbol{z}_k+E_k\boldsymbol{\xi}_k,\ \boldsymbol{y}_{k+1}=H_{k+1}\boldsymbol{z}_{k+1}+\boldsymbol{v}_{k+1}. \tag{6),(7}$$

式中

$$A_k=\begin{bmatrix}\phi_{k+1,k} & G_k\\ 0 & I\end{bmatrix},\ E_k=\begin{bmatrix}\Gamma_k & 0\\ 0 & \bar{K}_{b,k}\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\xi}_k=[\boldsymbol{w}_k^T,\boldsymbol{\eta}_k^T]^T,$$

(7)式与(4)式完全相同.

令

$$\boldsymbol{\eta}_k=\boldsymbol{y}_k-H_k\boldsymbol{z}_{k/k}.$$

根据对(1)，(2)式的假设可得

$$E\{\boldsymbol{v}_k\}=0,E\{\boldsymbol{\xi}_k\}=0.$$

$$E\{\boldsymbol{v}_j\boldsymbol{v}_k^T\}=R_k\delta_{kj},$$

$$E\{\boldsymbol{\eta}_k\boldsymbol{\eta}_j^T\}=(R_k+H_kP_{k/k}H_k^T)\delta_{kj}=\bar{R}_k\delta_{kj},$$

$$E\{\boldsymbol{\xi}_k\boldsymbol{\xi}_j^T\}=\begin{bmatrix}Q_k & 0\\ 0 & \bar{R}_k\end{bmatrix}\delta_{kj}=\bar{Q}_k\delta_{kj},$$

$$E\{\boldsymbol{\xi}_k \boldsymbol{v}_j^T\} = \begin{bmatrix} 0 \\ R_k \end{bmatrix} \delta_{kj} = C_k \delta_{kj},$$

$$\delta_{kj} = \begin{cases} 0 & k \neq j \\ 1 & k = j. \end{cases}$$

$P_{k/k}$ 为 $\boldsymbol{z}_k$ 的估计误差的方差阵.

显然，系统噪声与量测噪声是相关的. 在进行滤波时必须考虑它对最优增益阵和估计误差方差阵的影响.

最优估计的算法如下[1]:

时间更新

$$\boldsymbol{z}_{k+1/k} = A_k \boldsymbol{z}_{k/k} + E_k C_k (H_k P_{k/k-1} H_k^T + R_k)^{-1} (\boldsymbol{y}_{kk} - H_k \boldsymbol{z}_{k/k-1}), \tag{8}$$

$$\begin{aligned} P_{k+1/k} = {} & A_k P_{k/k} A_k^T + E_k \bar{Q}_k E_k^T \\ & - E_k C_k (H_k P_{k/k-1} H_k^T + R_k)^{-1} C_k^T E_k^T \\ & - A_k K_k C_k^T E_k^T - E_k C_k K_k^T A_k^T, \end{aligned} \tag{9}$$

测量更新

$$\boldsymbol{z}_{k+1/k+1} = \boldsymbol{z}_{k+1/k} + \boldsymbol{y}_{k+1}(Y_{k+1} - H_{k+1} \boldsymbol{z}_{k+1/k}), \tag{10}$$

$$P_{k+1/k+1} = (I - K_{k+1} H_{k+1}) P_{k+1/k}, \tag{11}$$

$$K_{k+1} = P_{k+1/k} H_{k+1}^T (H_{k+1} P_{k+1/k} H_{k+1}^T + R_{k+1})^{-1}, \tag{12}$$

式中，$K_k = [K_{x,k}^T, K_{b,k}^T]^T$; $K_{x,k}$ 代表对应的状态向量的最优估计增益阵，$K_{b,k}$ 代表对应的偏差向量的最优估计增益阵.

对于偏差估计问题,(8)式应改进如下:

$$\boldsymbol{z}_{k+1/k} = A_k \boldsymbol{z}_{k/k} + E_k C_k (H_k P_{k/k} H_k^T + R_k)^{-1} (\boldsymbol{y}_k - H_k \boldsymbol{z}_{k/k}),$$

或

$$\boldsymbol{x}_{k+1/k} = \phi_{k+1,k} \boldsymbol{x}_{k/k} + G_k \boldsymbol{b}_{k/k}, \tag{13}$$

$$\boldsymbol{b}_{k+1/k} = \boldsymbol{b}_{k/k} + \bar{K}_{b,k} (\boldsymbol{y}_k - H_k \boldsymbol{z}_{k/k}), \tag{14}$$

$$\bar{K}_{b,k} = [P_{21}, P_{22}]_{k/k} H_k^T \bar{R}_k^{-1}. \tag{15}$$

(9)式相应地变为

$$\begin{aligned} P_{11,k+1/k} = {} & \phi_{k+1,k} P_{11,k/k} \phi_{k+1,k}^T + \Gamma_k Q_k \Gamma_k^T + \phi_{k+1,k} P_{12,k/k} G_k^T \\ & + G_k P_{22,k/k} G_k^T + G_k P_{21,k/k} \phi_{k+1,k}^T, \end{aligned} \tag{16}$$

$$P_{22,k+1/k} = P_{22,k/k} - [P_{21}, P_{22}]_{k/k} H_k^T \bar{R}_k^{-1} H_k \begin{bmatrix} P_{12} \\ P_{22} \end{bmatrix}_{k/k}, \tag{17}$$

$$\begin{aligned} P_{21,k+1/k} & = [P_{21} P_{22}]_{k/k} \begin{bmatrix} \phi_{k+1,k}^T \\ G_k^T \end{bmatrix} - \bar{K}_{b,k} H_k P_{k/k} \begin{bmatrix} \phi_{k+1,k}^T \\ G_k^T \end{bmatrix} \\ & = [P_{21} P_{22}]_{k/k} (I - H_k^T \bar{R}_k^{-1} H_k P_{k/k}) \begin{bmatrix} \phi_{k+1,k}^T \\ G_k^T \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{18}$$

式中，P_{11} 为 $\boldsymbol{x}$ 估计误差的方差阵，P_{22} 为 $\boldsymbol{b}$ 估计误差的方差阵，$\bar{R}_k$ 为 $\boldsymbol{\eta}_k$ 的方差阵.

根据(10)—(18)式,可估计出状态向量 $\boldsymbol{x}$ 和偏差向量 $\boldsymbol{b}$.

三、飞行状态和测量偏差的估计

飞机运动方程如下：

$$
\left.\begin{aligned}
\dot{u} &= rv - qw - g\sin\vartheta + A_x,\\
\dot{v} &= -ru + pw + g\cos\vartheta\sin\varphi + A_y,\\
\dot{w} &= qu - pv + g\cos\vartheta\cos\varphi + A_z,\\
\dot{\vartheta} &= q\cos\varphi - r\sin\varphi,\\
\dot{\varphi} &= p + q\sin\varphi\,\mathrm{tg}\,\vartheta + r\cos\varphi\,\mathrm{tg}\,\vartheta,\\
\dot{h} &= u\sin\vartheta - v\sin\varphi\cos\vartheta - w\cos\varphi\cos\vartheta.
\end{aligned}\right\} \tag{19}
$$

式中，u, v, w 分别为沿 x, y, z 轴的速度分量；A_x, A_y, A_z 为加速度分量；p, q, r 为滚转、俯仰、偏航角速度；φ, ϑ 分别为滚转、俯仰角；h 为高度，g 为重力加速度.

考虑到输入量 A_x, A_y, A_z, p, q, r 的测量中含有系统偏差，尺度因子误差和随机噪声，系统的状态方程可写成

$$\dot{\boldsymbol{x}} = f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\eta}) \tag{20}$$

式中，$\boldsymbol{x}$ 为状态向量，$\boldsymbol{b}_1$ 为偏差向量，$\boldsymbol{u}$ 为输入向量，$\boldsymbol{\eta}$ 为噪声向量.

以飞机飞行高度 h，空速 V_0，迎角 α，侧滑角 β，俯仰角 ϑ 及滚转角 φ 作为输出量，再考虑到测量误差，观测方程可写成

$$\boldsymbol{y}_m = \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{u}) + \boldsymbol{\xi}, \tag{21}$$

将(20)式积分求解，可得

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = M_k \boldsymbol{x}_k + B_k \boldsymbol{b}_1 + \Gamma_k \boldsymbol{\eta}_k + \boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{u}), \tag{22}$$

对观测方程线性化，得

$$\boldsymbol{y}_{m,k+1} = H_{x,k+1}\boldsymbol{x}_{k+1} + H_{b,k+1}\boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{\xi}_k + \boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{u}), \tag{23}$$

(22), (23)式中，$M_k, B_k, \Gamma_k, H_{x,k}, H_{b,k}$ 均为关于 $\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{u}_k$, $\boldsymbol{b}$ 的函数矩阵；且 $\boldsymbol{b} = [\boldsymbol{b}_1^T, \boldsymbol{b}_2^T]^T$.

应用(10)—(18)式，就可得到飞行状态和偏差向量的估计.

为了验证本文方法的有效性，分别作了数字仿真、系统仿真和实际计算检验，所得结果均符合要求.

参　考　文　献

[1] Jazwinski, A. H., Stochastic Processes and Filter Theory, Academic Press, New York and London (1970), 266—329.

[2] Ljung, L., Asymptotic Behavior of the Extenden Kalman Filter as a Parameter Estimator for Linear System, *IEEE Trans. Automat. Contr.* **AC-24** (1979), 36—50.

[3] Jonkers, H. L., Application of the Kalman Filter to Flight-Pass Reconstruction from Flight Test Data Including Estimation of Instrumental Bias Error Correction, *Ph. d. Thesis*, **VTH-162** (1976), 1—10.

[4] Feik, R. A., Estimation Programs for Dynamic Flight Test Data Analysis, *ARL Aero. Tech. Memo.* **344** (1983), 1—7.

[5] Maybeck, P. S., Stochastic Models, Estimation and Control, Academic Press, New York, 1979. 368—405.

[6] 史忠科,飞行数据相容性检验的极大似然法,航空学报,11(1990),(8),B354—360.

A METHOD FOR ESTIMATING BOTH THE STATE AND PARAMETERS AND ITS APPLICATION TO FLIGHT TEST

SHI ZHONGKE

(*Department of Automatic Control, Northwestern Polytechnical University,* 710072)

ABSTRACT

An efficient method for the estimation of both the state and unknown parameters is presented in this paper. To avoid the results of augmented Kalman filter for both the state and parameters to be divergent, the state and parameter vectors are reconstructured to make them controllable. Based on the controllable models, a U-D covariance factorization filter is developed in which the process noises and observed noises are correlated. This approach has been applied to the estimation of the flight state and instrumental erroros. The results of system simulation and actual application to the aircrafts made in China show that more accurate results can be given by this approach than that given by the augmentted Kalman filter.

Key words: Kalman filter; state estimation; parameter estimation; flight test; numerical stability.