第19卷 第2期　　自 动 化 学 报　　Vol. 19, No. 2
1993年 3 月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　Mar., 1993

短 文

鲁棒渐近跟踪控制器设计的新方法

倪茂林 吴宏鑫 谌颖
(北京控制工程研究所，100080)

摘 要

对于线性不确定系统，本文基于 Riccati 方程的正定解提出一种设计鲁棒渐近跟踪控制器的新方法。所设计的控制器，对于所有允许的系统参数变化，均使系统输出渐近跟踪某一参考输入。这种方法的特点是设计简单、实现方便.

关键词: 不确定系统，鲁棒控制，跟踪，控制系统设计，飞行控制.

一、引 言

设计一个控制器使系统输出渐近跟踪某一参考输入，这是控制工程师常遇到的问题. 对于线性确定系统，其跟踪控制器的设计问题早在70年代就已得到解决[1]. 然而，对于许多工程实际问题，系统模型中含有不确定性，这样按照标称系统参数设计的控制器可能达不到预期的性能指标. 因此，鲁棒跟踪控制器的设计问题近年来得到了学者们的极大重视[2,3].

1986年，文献[2]对于线性匹配不确定系统，基于 Lyapunov 方程的正定解设计出一种鲁棒跟踪控制器. 这里鲁棒跟踪的意义在于，对于所有允许的系统参数变化，跟踪只由一个线性定常控制器来完成，这在工程上很有意义. 然而，文献[2]方法需要计算不确定性函数矩阵的特征值，计算相当复杂，并且所设计的控制器保守(增益幅值大). 1987年，文献[3]利用数值搜索技术又给出一种鲁棒跟踪控制器的设计方法，并降低了文献[2]中方法的保守性. 不过数值搜索要凭经验进行，往往需要试凑多次. 另外，文献[2,3]都利用了 Lyapunov 方程，均需预先设计补偿器使标称增广系统变为稳定. 同时应该指出，与此相关的鲁棒稳定问题近年来也有不少结果[4-6].

本文根据 Lyapunov 稳定性原理，基于 Riccati 方程的正定解给出一种设计鲁棒渐近跟踪控制器的新方法. 与文献[2,3]比较，该方法不需要预先设计稳定补偿器，也不用试凑和数值搜索，因而设计简单，而且所设计的控制器反馈增益小，便于工程实现. 另外，依照这种方法还可以设计鲁棒跟踪控制器对于标称增广系统是最优的.

本文于1991年12月18日收到.

二、问题描述与定义

考虑线性不确定系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=[A+\Delta A(\boldsymbol{r})]\boldsymbol{x}(t)+[B+\Delta B(\boldsymbol{s})]\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{d}(t),$$
$$\boldsymbol{y}(t)=C\boldsymbol{x}(t), \tag{1}$$

式中 $\boldsymbol{x}(t)\in R^n$ 是状态变量,$\boldsymbol{u}(t)\in R^m$ 是控制变量,$\boldsymbol{y}(t)\in R^p$ 是输出变量. A、B 和 C 是标称系统矩阵且 (A,B) 可控. 时不变不确定性参数满足 $\boldsymbol{r}\in\varphi\subset R^v$, $\boldsymbol{s}\in\phi\subset R^w$, 其中 φ 和 ϕ 均为有界紧集,$\boldsymbol{d}(t)\in\omega\subset R^n$ 是扰动向量.

若存在连续矩阵函数 $D(*),E(*)$ 满足条件

$$\Delta A(\boldsymbol{r})=BD(\boldsymbol{r}),\Delta B(\boldsymbol{s})=BE(\boldsymbol{s}),\ \forall\boldsymbol{r}\in\varphi,\boldsymbol{s}\in\phi, \tag{2a}$$

及

$$2I+E(\boldsymbol{s})+E'(\boldsymbol{s})>0,\forall\boldsymbol{s}\in\phi, \tag{2b}$$

则称不确定系统(1)是匹配的.

为了讨论方便,引入下面定义:

定义 1[2],假定 $Y_r\subset R^p,\omega\subset R^n$,对于整数 k 与矩阵 $K_1\in R^{m\times n},K_2\in R^{m\times k},M\in R^{k\times n}$, $N\in R^{k\times k}$ 及 $L\in R^{k\times p}$,定义一个 $(n+k)$ 阶增广系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=A(\boldsymbol{r})\boldsymbol{x}(t)+B(\boldsymbol{s})[K_1\boldsymbol{x}(t)+K_2\boldsymbol{q}(t)]+\boldsymbol{d}(t),$$
$$\dot{\boldsymbol{q}}(t)=M\boldsymbol{x}(t)+N\boldsymbol{q}(t)+L\boldsymbol{y}_r(t) \tag{3}$$

若下面条件成立,则称 $\boldsymbol{u}=K_1\boldsymbol{x}+K_2\boldsymbol{q}$ 为鲁棒渐近跟踪控制,

i) 内部稳定性,即与系统(3)对应的系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=A(\boldsymbol{r})\boldsymbol{x}(t)+B(\boldsymbol{s})[K_1\boldsymbol{x}(t)+K_2\boldsymbol{q}(t)],$$
$$\dot{\boldsymbol{q}}(t)=M\boldsymbol{x}(t)+N\boldsymbol{q}(t). \tag{4}$$

对于所有系统参数变化 $\boldsymbol{r}\in\varphi,\boldsymbol{s}\in\phi$,均保持渐近稳定性.

ii) 渐近跟踪性,即对于任意初始状态 $\boldsymbol{x}(0)\in R^n$, $\boldsymbol{q}(0)\in R^k$ 及任意 $\boldsymbol{r}\in\varphi$, $\boldsymbol{s}\in\phi$, $\boldsymbol{y}_r(*)\in Y_r$, $\boldsymbol{d}(*)\in\omega$,均有 $t\to\infty$ 时, $\boldsymbol{y}(t)\to\boldsymbol{y}_r(t)$, 其中 $\boldsymbol{y}(t)=C\boldsymbol{x}(t)$ 为系统(3)的输出,$\boldsymbol{x}(t)$ 是系统(3)的解.

本文要做的工作是,对于系统(1),假定它满足匹配条件(2),且 $\boldsymbol{d}(t)$ 和 $\boldsymbol{y}_r(t)$均为阶跃信号,设计一个线性定常的鲁棒跟踪控制器

$$\boldsymbol{u}(t)=K_x\boldsymbol{x}(t)+K_q\boldsymbol{q}(t), \tag{5}$$

使系统(1)的输出 $\boldsymbol{y}(t)$ 渐近跟踪参考输入信号 $\boldsymbol{y}_r(t)$, 这里 $\boldsymbol{q}(t)$ 是为了得到渐近跟踪而引入的 p 维附加向量,其定义为

$$\dot{\boldsymbol{q}}(t)=C\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{y}_r(t). \tag{6}$$

三、鲁棒跟踪控制器的构造

由(1)式和(6)式得增广系统为

$$\dot{\boldsymbol{z}}(t)=[A^++\Delta A^+(\boldsymbol{r})]\boldsymbol{z}(t)+[B^++\Delta B^+(\boldsymbol{s})]\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{\xi}, \tag{7}$$

其中 $z(t)=[x'(t)\ \ q'(t)]'$,且

$$A^{+}=\begin{bmatrix}A & 0\\ C & 0\end{bmatrix},\ \Delta A^{+}(r)=\begin{bmatrix}\Delta A(r) & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},$$

$$B^{+}=\begin{bmatrix}B\\ 0\end{bmatrix},\ \Delta B^{+}(s)=\begin{bmatrix}\Delta B(s)\\ 0\end{bmatrix}, \tag{8}$$

$\xi=[d',-y_r']'$ 为常值向量,若定义

$$D^{+}(r)=[D(r)\quad 0],\ E^{+}(s)=E(s), \tag{9}$$

易证

$$\Delta A^{+}=B^{+}D^{+}(r),\ \Delta B^{+}=B^{+}E^{+}(s),\ \forall r\in\varphi, s\in\phi. \tag{10}$$

显然,增广系统(7)也满足匹配条件. 下面定理给出跟踪控制器的设计方法.

定理 1 对于系统(1),假设扰动 $d(t)$ 和参考输入 $y_r(t)$ 均为阶跃信号,且系统满足匹配条件(2),由 (2b) 式知,存在一个 $\delta>0$ 满足

$$2I+E(s)+E'(s)\geqslant\delta I,\ \forall s\in\phi. \tag{11}$$

若对应的增广系统(7)中 (A^{+},B^{+}) 可控,则定常反馈控制

$$u(t)=Kz(t),\ K=-\gamma(B^{+})'P \tag{12}$$

为鲁棒渐近跟踪控制,其中实数 $\gamma>1/\delta, P>0$ 为 Riccati 方程

$$(A^{+})'P+PA^{+}-PB^{+}R^{-1}(B^{+})'P+Q=0 \tag{13}$$

的解,式中正定加权矩阵选择如下:

$$R=I/(\gamma\delta-1), Q>[D^{+}(r)]'D^{+}(r),\ \forall r\in\varphi, \tag{14),(15}$$

其中 $D^{+}(r)$ 由(9)式定义.

证. i) 内部稳定性. 考虑与(7)式对应的系统

$$\dot{z}(t)=[A^{+}+\Delta A^{+}(r)]z(t)+[B^{+}+\Delta B^{+}(s)]u(t). \tag{16}$$

在控制(12)的作用下,系统(16)可表示为

$$\dot{z}(t)=\{A^{+}+\Delta A^{+}(r)-\gamma[B^{+}+\Delta B^{+}(s)](B^{+})'P\}z(t), \tag{17}$$

构造正定二次函数 $V(z)=z'Pz$,由(9),(10),(17)式得

$$\begin{aligned}\dot{V}(z)=z'\{&(A^{+})'P+PA^{+}+PB^{+}D^{+}(r)\\&+[D^{+}(r)]'(B^{+})'P-2\gamma PB^{+}(B^{+})'P\\&-\gamma PB^{+}[E(s)+E'(s)](B^{+})'P\}z.\end{aligned} \tag{18}$$

考虑到不等式

$$X'Y+Y'X\leqslant X'X+Y'Y,\ \forall X,Y\in R^{m\times(n+p)}, \tag{19}$$

有

$$PB^{+}D^{+}(r)+[D^{+}(r)]'(B^{+})'P\leqslant PB^{+}(B^{+})'P+[D^{+}(r)]'D^{+}(r). \tag{20}$$

考虑到(13),(14),(20)式及(11),(15)式,由(18)式得

$$\begin{aligned}\dot{V}(z)\leqslant z'\{&-Q+[D^{+}(r)]'D^{+}(r)\\&-\gamma PB^{+}[2I+E(s)+E'(s)-\delta I](B^{+})'P\}z<0,\\&\forall z\neq 0.\end{aligned} \tag{21}$$

又 $z(t)=0$ 是系统(16)的平衡点,则由 Lyapunov 稳定性原理可知,系统(16)是渐近稳定的.

ii）渐近跟踪性．考虑到(16),(17)式,在控制(12)的作用下,系统(7)可表示为

$$\dot{\boldsymbol{z}}(t)=A_c^+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{s})\boldsymbol{z}(t)+\boldsymbol{\xi}, \tag{22}$$

其中 $A_c^+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{s})$ 对于所有系统参数变化 $\boldsymbol{r}\in\varphi,\boldsymbol{s}\in\phi$ 均为渐近稳定的．进而考虑到 $\boldsymbol{\xi}$ 为常值向量,易得

$$\ddot{\boldsymbol{z}}(t)=A_c^+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{s})\dot{\boldsymbol{z}}(t). \tag{23}$$

易知当 $t\to\infty$ 时,$\dot{\boldsymbol{z}}(t)\to 0$,进而 $\dot{\boldsymbol{q}}(t)\to 0$,所以当 $t\to\infty$ 时,$\boldsymbol{y}(t)\to\boldsymbol{y}_r(t)$.

这样由定义 1 可知,控制(12)是系统(1)的鲁棒渐近跟踪控制,定理得证.

注 1. 为满足条件(15),下面给出矩阵 Q 的两种选择方法

方法 1. 考虑到(9)式,取

$$Q=\text{block-diag}(\bar{D}^2I_n,0_p)+Q_0.$$

其中 $\bar{D}=\{\max\|D(\boldsymbol{r})\|:\boldsymbol{r}\in\varphi\}$,$Q_0$ 为任意 $(n+p)$ 阶正定矩阵.

方法 2. 假定

$$D(\boldsymbol{r})=\sum_{i=1}^{k}r_iD_i;\ |r_i|\leqslant\bar{r}_i,\forall i.$$

易证

$$D'(\boldsymbol{r})D(\boldsymbol{r})\leqslant\sum_{i=1}^{k}k\bar{r}_i^2(D_i)'D_i=Q_n, \tag{24}$$

可选取

$$Q=\text{block-diag}(Q_n,0_p)+Q_0,$$

其中 Q_0 为任意 $(n+p)$ 阶正定矩阵.

进一步研究表明,上面设计的鲁棒控制器对于标称增广系统 (A^+,B^+) 还是最优的.

定理 2. 对于系统(1),若在定理 1 中有

$$Q_*=Q+(\gamma+1-\gamma\delta)PBB'P>0 \tag{25}$$

成立,则按定理 1 得到的鲁棒跟踪控制(12)对于(7)式中的标称增广系统 (A^+,B^+) 是线性二次最优的,其中加权阵为 $\{Q_*,I/\gamma\}$,I 为单位阵.

注 2. 由文献[2]可知,上面定理 1,2 可推广到系统扰动 $\boldsymbol{d}(t)$ 和参考输入 $\boldsymbol{y}_r(t)$ 为多项式信号情况,以及由观测器实现的状态反馈情况.

四、飞行控制系统设计例

AFTI/F-16 型飞机在某种飞行条件下,其纵向运动方程可用(1)式描述[3],其中

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&-0.87&43.22\\0&0.99&-1.34\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0&0\\-17.25&-1.58\\-0.17&-0.25\end{bmatrix},$$

$$C=[1\ \ 0\ \ 0].$$

系统不确定性满足匹配条件(2),且

$$D(\boldsymbol{r})=\begin{bmatrix}0&-0.0618r_1+0.3907r_3&-0.0618r_2+0.3907r_4\\0&0.0420r_1-4.2657r_3&0.0420r_2-4.2657r_4\end{bmatrix},$$

$$E(s) = 0,$$

$$\varphi = \{r: |r_1| \leqslant 0.6, |r_2| \leqslant 30, |r_3| \leqslant 0.6, |r_4| \leqslant 0.9\}$$

扰动 $\boldsymbol{d}(t)$ 与输入 $\boldsymbol{y}_r(t)$ 均为阶跃信号.

取 $\delta = 2$, $\gamma = 1, R = \mathrm{diag}(1,1)$ 及

$$Q = \mathrm{diag}(0,26.43,79.55,0) + \mathrm{diag}(10,0.1,0.1,10).$$

应用定理 1 得鲁棒跟踪控制器为

$$\boldsymbol{u}(t) = \begin{bmatrix} 6.844 & 5.179 & 4.245 & 3.150 \\ -0.794 & 0.491 & 4.530 & -0.274 \end{bmatrix} \boldsymbol{z}(t). \tag{26}$$

文[3]设计的鲁棒跟踪控制器为

$$\boldsymbol{u}(t) = \begin{bmatrix} 10.975 & 4.601 & 6.846 & 15.160 \\ -3.802 & -1.032 & -6.294 & -11.155 \end{bmatrix} \boldsymbol{z}(t). \tag{27}$$

显然，为得到鲁棒渐近跟踪，本文设计的控制器增益幅值较小，工程实现方便.

致谢. 本文工作是在杨嘉墀教授的指导下完成的，还曾得到黄琳教授、秦化淑研究员和王恩平研究员的热情指导，在此向他们表示衷心的感谢!

参　考　文　献

[1] Wonham, W. M., Linear Multivariable Control: A Geometric Approach, Springer, Berlin, 1979.

[2] Schmitendorf, W. E. and Barmish, B. R., Robust Asymptotic Tracking for Linear Systems with Unknown Parameters, *Automatica*, **22**(1986), 355—360.

[3] Schmitendorf, W. E., Methods for Obtaining Robust Tracking Control Laws, *Automatica*, **23**(1987), 675—677.

[4] Schmitendorf, W. E., Design Methodology for Robust Stabilizing Controllers, AIAA J. Guidance, *Contr. & Dyn.*, **10**(1987), 250—254.

[5] Jabbari, F. and Schmitendorf, W. E., A Noniterative Method For the Design of Linear Robust Controllers, *IEEE Trans. Automat. Control*, **35**(1990), 954—957.

[6] 倪茂林、吴宏鑫，线性不确定系统的鲁棒稳定控制器设计，自动化学报，**18**(1992)，(5)，585—589.

AN EFFECTIVE METHOD FOR DESIGNING ROBUST CONTROLLERS WITH ASYMPTOTIC TRACKING

Ni Maolin　Wu Hongxin　Chen Ying

(Beijing Institute of Control Engineering, 100080)

Abstract

In this paper, using the positive definite solutions of Riccati equations, we propose a new procedure to design a robust tracking controller for the linear system with uncertain parameters. With this controller, the system output is guaranteed to track asymptotically the reference input for all admissible parameter variations. The method presented here is simple in computation and easy in implementation.

Key words: Uncertain systems; robust control; tracking; control system design; flight control.