第 19 卷 第 2 期 自 动 化 学 报 Vol. 19, No. 2
1993 年 3 月 ACTA AUTOMATICA SINICA Mar., 1993

短 文

隐式多变量广义自校正控制器[1)]

柴天佑

（东北工学院自动化研究中心，沈阳 110006）

摘 要

本文提出了具有在线选择加权阵的两种多变量自校正控制器. 加权阵的在线选择和自校正控制算法都采用隐式方案来实现. 本文还证明了该自校正控制器具有全局收敛性.

关键词: 自校正控制，极点配置，关联矩阵，全局收敛性，随机多变量系统.

一、前 言

多变量自校正控制器[1]的性能指标的加权阵需要离线凑试. 全局收敛的多变量自适应控制算法[2,3]也要求预先离线选择好加权阵. 对于参数未知的系统凑试加权阵十分困难. 本文针对最小相位和开环稳定两类系统提出在线选择加权阵的隐式自校正控制算法并给出了全局收敛性分析.

二、具有极点配置的广义最小方差控制器

设线性多变量离散系统用 ARMAX 模型

$$A(z^{-1})\boldsymbol{y}(t) = B(z^{-1})\boldsymbol{u}(t) + C(z^{-1})\boldsymbol{\xi}(t) \tag{2.1}$$

描述. 其中 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{y}$ 和 $\{\boldsymbol{\xi}(t)\}$ 分别是 n 维输入输出向量和驱动噪声，满足下列假设条件:

$$E(\boldsymbol{\xi}(t)/F_{t-1}) = 0,\text{a.s.},\ \sup E(\|\boldsymbol{\xi}(t)\|^2/F_{t-1}) < \infty,\ \text{a.s.},$$

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\|\boldsymbol{\xi}(t)\|^2 < \infty,\text{a.s.}, \tag{2.2}$$

式中 F_t 表示非降子 σ-代数族; A,B 和 C 是 z^{-1} 的矩阵多项式. $A(0) = C(0) = I$, $B(0) = 0, \det C(z^{-1})$ 是稳定的. 假设传递函数矩阵 $A(z^{-1})^{-1}B(z^{-1})$ 严真，秩为 n. 在此假设下存在关联矩阵 $T(z)$ 满足

$$\lim_{z\to\infty} T(z)A(z^{-1})^{-1}B(z^{-1}) = K, K \text{ 为非奇异}. \tag{2.3}$$

$T(z)$ 是 z 的下三角矩阵多项式. 设 k 是 $T(z)$ 中多项式的最高阶次. 引入下列性能指

本文于 1991 年 1 月 21 日收到.

1) 国家教委博士点基金资助的课题.

标：

$$J = E(\|e(t+k)\|^2/F_t) = E(\|P(z^{-1})T(z)y(t) - R(z^{-1})w(t) + Q(z^{-1})u(t)\|^2/F_t), \tag{2.4}$$

式中 w 是 n 维已知有界参考输入向量，P,R,Q 是 z^{-1} 的加权矩阵多项式．

采用文[3]的方法可得最优控制律为

$$\phi^*(t+k/t) = R(z^{-1})w(t) - Q(z^{-1})u(t), \tag{2.5}$$

式中 $\phi^*(t+k/t)$ 是 $\phi(t+k) = P(z^{-1})T(z)y(t)$ 的最优预报，并满足

$$\widetilde{C}(z^{-1})\phi^*(t+k/t) = \widetilde{G}(z^{-1})y(t) + \widetilde{H}(z^{-1})u(t), \tag{2.6}$$

式中 $\widetilde{C},\widetilde{G},\widetilde{H}$ 为 z^{-1} 的矩阵多项式，$\widetilde{H}_0$ 非奇异．闭环系统方程为

$$(P(z^{-1})T(z) + Q(z^{-1})B(z^{-1})^{-1}A(z^{-1}))y(t) = R(z^{-1})w(t) + (z^kF(z^{-1}) + Q(z^{-1})B(z^{-1})^{-1}C(z^{-1}))\xi(t). \tag{2.7}$$

针对下列两种情况通过极点配置策略得两种选择加权阵的方法．

情况 1．$B(z^{-1})$ 稳定即最小相位系统，设

$$Q(z^{-1}) = N(z^{-1})T(z)B(z^{-1}), \tag{2.8}$$

式中 $N(z^{-1})$ 是 z^{-1} 的多项式矩阵，N_0 非奇异．于是

$$P(z^{-1}) + N(z^{-1})T(z)A(z^{-1})T(z)^{-1} = \delta(z^{-1}), \tag{2.9}$$

式中 $\delta(z^{-1})$ 由设计者预先选择，$\det\delta(z^{-1})$ 的零点是理想的闭环系统的极点．用 $T(z)y(t)$ 右乘(2.9)式两边，并由(2.1)式得

$$\delta(z^{-1})T(z)y(t) = P(z^{-1})T(z)y(t) + Q(z^{-1})u(t) + N(z^{-1})T(z)C(z^{-1})\xi(t), \tag{2.10}$$

如果 $T(z)$ 已知，采用辨识算法由(2.10)式辨识 P 和 Q．

情况2．$A(z^{-1})$ 是稳定的即开环稳定系统．设

$$P(z^{-1}) = M(z^{-1})A(z^{-1})T(z)^{-1}, \tag{2.11}$$

式中 $M(z^{-1})$ 是 z^{-1} 的矩阵多项式．由(2.7)，(2.11)式知

$$M(z^{-1})B(z^{-1}) + Q(z^{-1}) = \delta(z^{-1}), \tag{2.12}$$

用 $u(t)$ 右乘(2.12)式两边，并由(2.1)式得

$$\delta(z^{-1})u(t) = P(z^{-1})T(z)y(t) + Q(z^{-1})u(t) - M(z^{-1})C(z^{-1})\xi(t). \tag{2.13}$$

由上式采用辨识算法可以在线选择 $Q(z^{-1})$ 和 $P(z^{-1})T(z)$．为了消除稳态误差，对上述情况分别选择 R 为

$$R = \delta(1)T(1), \tag{2.14}$$

或

$$R = \delta(1)B(1)^{-1}A(1) = \delta(1)(\delta(1) - Q(1))^{-1}PT(1). \tag{2.15}$$

三、自校正控制算法和全局收敛性分析

首先用随机梯度法辨识 P,Q 或者 PT，Q．为简单起见取N和M为单位阵．在情况 2 时，$M = I, Q_0 = \delta_0$，于是(2.13)式为

$$\phi_r(t) = \Theta_r^T x_r(t) + \xi(t), \tag{3.1}$$

式中

$$\boldsymbol{\phi}_r(t)=\delta^*(z^{-1})\boldsymbol{u}(t)-\boldsymbol{y}(t),\delta^*(z^{-1})=\delta(z^{-1})-\delta_0=\delta_1z^{-1}+\cdots+\delta_{n_\delta}z^{-n_\delta},\tag{3.2}$$

$$x_r(t)=[y(t-1)^T,y(t-2)^T\cdots;u(t-1)^T,u(t-2)^T\cdots\xi(t-1)^T,\\ \xi(t-2)^T\cdots;],\tag{3.3}$$

$$\Theta_r=[PT_1,PT_2\cdots;Q_1,Q_2\cdots;-C_1,C-C_2\cdots;]^T.\tag{3.4}$$

于是 $$\hat{\Theta}_r(t)=\hat{\Theta}_r(t-1)+\frac{a}{\hat{r}_r(t-1)}\hat{x}_r(t-1)\hat{\xi}(t)^T,\hat{\xi}(t)=\phi_r(t)\\ -\hat{\Theta}(t-1)^T\hat{x}(t-1),\tag{3.5}$$

$$\hat{r}_r(t-1)=\hat{r}_r(t-2)+\hat{x}_r(t)^T\hat{x}_r(t),\hat{r}_r(0)=1,\tag{3.6}$$

式中 $\hat{\Theta}_r(t)$ 是参数矩阵 Θ_r 在 t 时刻的递推估计值,且

$$\hat{x}_r(t)=[y(t-1)^T,y(t-2)^T\cdots;u(t-1)^T,u(t-2)^T\cdots;\\ \hat{\xi}(t-1),\hat{\xi}(t-2)\cdots;]^T.\tag{3.7}$$

对情况 1 按(2.10)式重新定义 $\phi_r(t),\Theta_r,x_r(t)$,再使用(3.5)—(3.7)式校正 P 和 Q. R 分别按(2.14)式或(2.15)式来选择. 控制器的参数和控制律由下列方程求得:

$$P(z^{-1})\bar{T}(z^{-1})\boldsymbol{y}(t)=\tilde{G}(z^{-1})\boldsymbol{y}(t-k)+\tilde{H}(z^{-1})\boldsymbol{u}(t-k)-\tilde{C}^*(z^{-1})\boldsymbol{\phi}^*(t/t\\ -k)+F(z^{-1})\boldsymbol{\xi}(t),\bar{T}(z^{-1})=z^{-k}T(z).\tag{3.8}$$

$$\tilde{G}(z^{-1})\boldsymbol{y}(t)+\tilde{H}(z^{-1})\boldsymbol{u}(t)-\tilde{C}^*(z^{-1})\boldsymbol{\phi}^*(t/t-k)=R(z^{-1})\boldsymbol{w}(t)\\ -Q(z^{-1})\boldsymbol{u}(t),\tilde{C}^*(z^{-1})=\tilde{C}(z^{-1})-\tilde{C}(0).\tag{3.9}$$

用下列辨识算法来估计 $\tilde{G},\tilde{H}$ 和 $\tilde{C}$:

$$\hat{\Theta}(t)=\hat{\Theta}(t-k)+\frac{a}{r(t-k)}x(t-k)(\phi(t)^T-X(t-k)^T\hat{\Theta}(t-k)),\tag{3.10}$$

$$r(t-k)=r(t-k-1)+x(t-k)^Tx(t-k),r(0)=1,\tag{3.11}$$

式中 $\hat{\Theta}(t)$ 是参数矩阵 Θ 在 t 时刻的递推估计值.

$$\Theta=[\tilde{G}_0,\tilde{G}_1,\cdots;\tilde{H}_0,\tilde{H}_1,\cdots;\tilde{C}_1,\tilde{C}_2,\cdots;]^T,\tag{3.12}$$

$$x(t-k)=[y(t-k)^T,y(t-k-1)^T,\cdots;u(t-k)^T,u(t-k-1)^T,\cdots;\\ -y^*(t-1)^T,-y^*(t-2)^T,\cdots]^T,\tag{3.13}$$

$$y^*(t+k)=R_t(z^{-1})w(t)-Q_t(z^{-1})u(t),\tag{3.14}$$

由下式求控制输入 $u(t)$:

$$\hat{\Theta}(t)^Tx(t)=y^*(t+k).\tag{3.15}$$

为给出全局收敛性分析,假设

$A1$) A,B 和 C 的阶次的上界 n_a,n_b 和 n_c 已知;

$A2$) $C(z^{-1})-\frac{1}{2}I$ 是严格正实;

$A3$) $\tilde{C}(z^{-1})-\frac{1}{2}I$ 是严格正实.

引理 1. 满足假设 $A1$) 和 $A2$) 时,辨识算法(3.5)—(3.7)式以概率 1 有

$$\|\hat{\theta}_{ri}(t)\|<M\forall t,0<M<\infty,\hat{\Theta}_r(t)=[\hat{\theta}_{r1}(t)\cdots\hat{\theta}_{ri}(t)\cdots\hat{\theta}_{rn}(t)],\tag{3.16}$$

$$\lim_{t\to\infty}\|\hat{\theta}_{ri}(t)-\hat{\theta}_{ri}(t-d)\|=0,0<d<\infty,i=1,\cdots,n,\tag{3.17}$$

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{t=1}^{N}\|z_r(t)\|^2/\hat{r}_r(t)<\infty, z_r(t)=\hat{\xi}(t)-\xi(t). \tag{3.18}$$

引理 1 的证明参见文献[5].

引理 2. 如果假设 $A1$) 和 $A3$) 成立，自校正控制算法(3.10)—(3.15)式具有下列性质:

$$\lim_{N\to\infty}\frac{N}{r(N)}\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\|z(t)\|^2=0, \text{a.s.}, \quad z(t)=e(t)-v(t), v(t)=F(z^{-1})\xi(t). \tag{3.19}$$

证明见文献[3].

自校正控制算法的全局收敛性由下面定理给出.

定理 1. 如果假设 $A1$)—$A3$) 成立，当采用(2.10)式校正 P、Q 时，假定 B 稳定、$T(z)$ 已知;当采用(2.13)式校正 PT、Q 时，假定 A 稳定、k 已知，那么所提出的隐式自校正控制算法具有

1) 稳定性

$$\limsup_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\|y(t)\|^2<\infty, \limsup_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\|u(t)\|^2<\infty, \text{a.s.} \tag{3.20}$$

2) 收敛性

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}E\{\|[P(z^{-1})T(z)]_t y(t)-R_{t-k}(z^{-1})w(t)+Q_{t-k}(z^{-1})u(t)\|^2/F_t\}$$
$$=r^2\text{a.s.} \tag{3.21}$$

式中 r^2 表示参数已知时，采用最优控制律(2.5)式、性能指标(2.4)式所取得的最小值. 即 $r^2=E\{\|v(t+k)\|^2/F_t\}$. 对情况 1, $(P(z^{-1})T(z))_t=P_t(z^{-1})T(z)$. 对情况 2,

$$(P(z^{-1})T(z))_t=PT(z)_t.$$

证明. 限于篇幅，只给出证明的思路. 根据引理 1 和引理 2，首先证明

$$\frac{r_r(N)}{N}\leqslant\frac{C_1}{N}\sum_{t=1}^{N}[\|z(t)\|^2+\|z_r(t)\|^2]+C_2, 0<C_1<\infty, 0<C_2<\infty. \tag{3.22}$$

再证

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\|z(t)\|^2=0, \text{a.s.} \tag{3.23}$$

然后采用类似文献[3]的方法，可证(3.20)式和(3.21)式.

注. 定理 1 中对于情况 2 没有假设关联矩阵 $T(z)$ 是已知的. 在自校正算法中需要已知 $P(z^{-1})T(z)$，而在本文算法中 $P(z^{-1})T(z)$ 可以在线校正，从而不需要知道 $T(z)$，只需要知道 $T(z)$ 的最高阶次 k.

仿真结果表明，上述两种自校正控制器都具有良好的控制性能. 要校正的加权阵能很快收敛到所要求的值. 限于篇幅仿真结果略.

四、结　论

本文的算法具有自校正控制和极点配置的优点，它可以在线选择加权阵，克服离线凑

试加权阵的困难,可以用隐式方式来实现,不仅算法简单而且鲁棒性加强，还具有全局收敛特性. 该算法对算法 1 虽然要求系统是最小相位，但可以限制过大的输入和可以控制具有任意传输延时的系统;对情况 2 虽然要求系统是开环稳定的,但可以控制非最小相位和延时结构未知的系统.

参 考 文 献

[1] Koivo, H. N., A Multivariable Self-tuning Controller, *Automatica*, **16**(1980), 351—366

[2] 柴天佑, A Globally Convergent Self-tuning Controller for Multivariable Stochastic Systems Having an Arbitrary Interactor Matrix, Proc. of the 8th IFAC Symposium on Identification and System Parameter Estimation, Beijing China, 1988, 690—695.

[3] 柴天佑,具有一般交互矩阵的多变量系统的随机直接自适应控制,自动化学报,**15**(1989),540—545.

[4] 郎世俊, 顾兴源, 柴天佑, A Multivariable Generalized Selftuning Controller with Decoupling Design, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **AC-31**(1986), 474—477.

[5] Goodwin G. C., Sin K. S., Adaptive Filtering Predication and Control, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New, Jersey, 1984, 486—487.

AN IMPLICIT MULTIVARIABLE GENERALIZED SELF-TUNING CONTROLLER

CHAI TIANYOU

(*Northeast University of Technology, Shengyang* 110006)

ABSTRACT

In this paper, the generalized minimum variance control strategy and the pole-zero placement strategy are combined to present a multi-variable self-tuning controller with on-line choice of weighting polynomial matrices. The on-line choice of weighting polynomical matrices and the self-tuning control algorithm are implemented by a implicit scheme. Analysis of the global convergence for the self-tuning controller proposed is also given.

Key words: Self-tuning control; interactor matrix; pole-zero placement; global convergence; stochastic multivariable systems.