第19卷 第3期 自 动 化 学 报 Vol. 19, No. 3
1993 年 5 月 ACTA AUTOMATICA SINICA May, 1993

离散事件系统广义分式方法[1)]

朱更新 郑大钟
(清华大学自动化系,北京 100084)

摘 要

本文在 Z-域上考虑一类离散事件系统,引入极大代数上的有理式作为传递函数的紧致表达式,将有理式展开成广义分式进行系统分析与设计,讨论了广义分式的约简与标准形;研究了有理传递函数的谱特征与周期响应,同时给出了最优控制等应用实例.

关键词: 离散事件,Z-域描述,谱分析.

一、引 言

事件图是深受欢迎的离散事件模型,不仅适用范围广,而且具有极大代数意义下的"线性"描述,如事件域上的"状态方程"[1].

正如常规线性系统,输入输出 (I/O) 描述简明实用、具有很强的物理意义. 外部描述与内部描述相结合,在系统分析与设计中起到很大作用. 为此 Cohen 等曾提出极大代数意义下的 Z-变换[1],取得了许多宝贵结果. 但形式幂级数直接用作传递函数,不能体现 I/O 描述的优越性. 需要引入传递函数的紧致(封闭)表达式.

二、Z-域描述与有理表达式

极大代数 $(E, \oplus, \otimes) \triangleq (R \cup \{-\infty\}, \max, +)$, $\varepsilon = -\infty$ 和 $e = 0$ 分别为零元和单位元. 本文省略 $\otimes$ 符,幂运算理解为常规意义下的乘法. 序列 $\{x_k\}$ 的 Z-变换是形式幂级数 $X(z^{-1}) = \bigoplus_{k \geq 0} x_k z^{-k}$. 引入记号 $\{X(z^{-1})\}_k \triangleq x_k$. 事件图映射为 Z-域上的(信号)流图. 如图 1,2.

流图中并(串)联支路可通过 $\oplus(\otimes)$ 合为单一支路. 反馈环涉及隐含方程

$$X = AX \oplus B. \tag{1}$$

引理 1. 若 $\{A\}_0 = \varepsilon$, 则方程 (1) 有唯一解 $X = A^*B$, 其中

$$A^* \triangleq \bigoplus_{n \geq 0} A^n. \tag{2}$$

本文于 1991 年 10 月23日收到.
1) 国家自然科学基金和 863 自动化领域 CIMS 主题资助的课题.

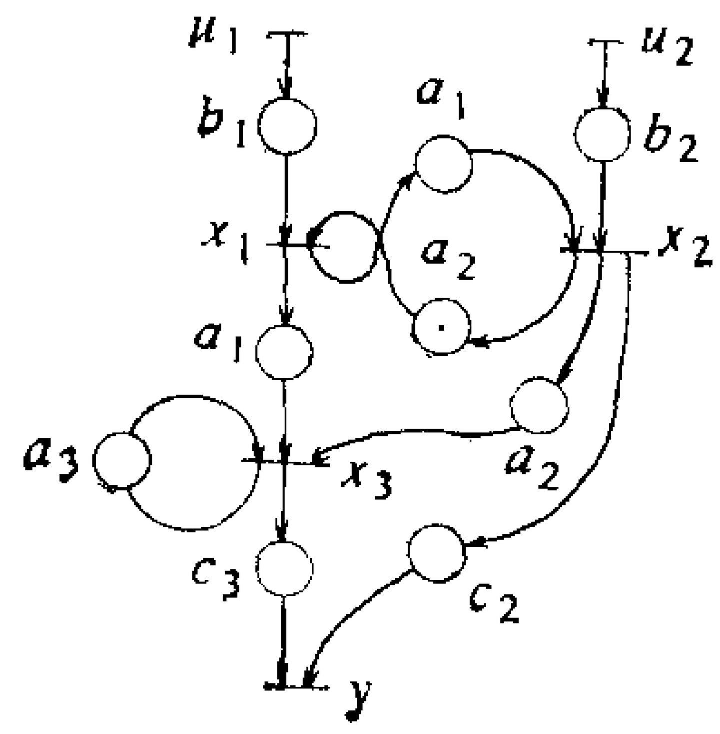


图 1 事件图

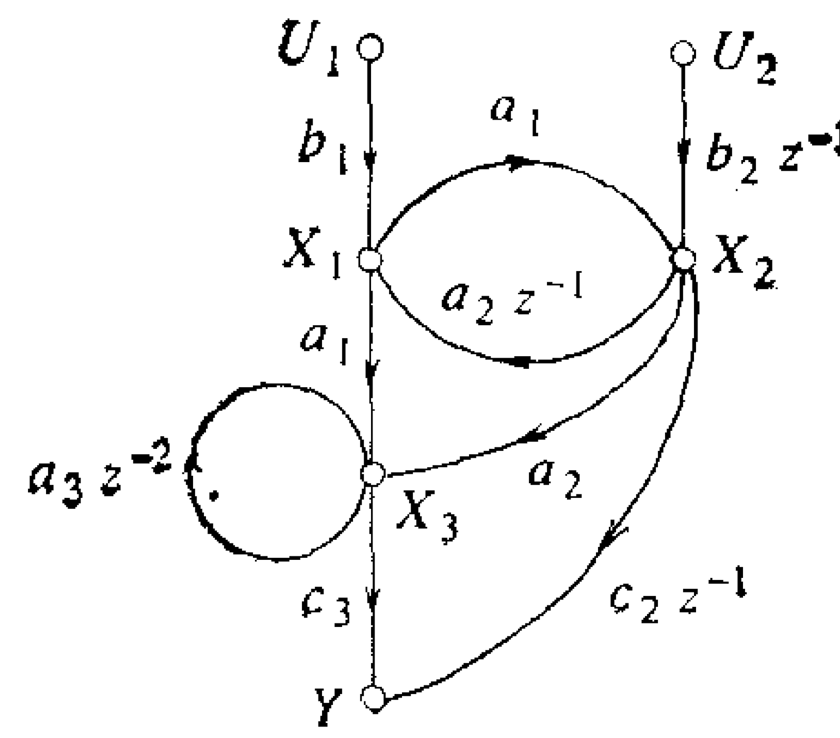


图 2 流图

证明. 由(1)式得 $X = A^{k+1}X \oplus \left(\bigoplus_{n=0}^{k} A^n B \right)$. 注意到 $\{A\}_0 = \varepsilon$,

$$\{X\}_k = \left\{ \bigoplus_{n=0}^{k} A^n B \right\}_k = \{A^* B\}, \ k \geqslant 0$$

即 $X = A^* B$. 反之将 $X = A^* B$ 代入(1)式, 两边相等.

定理 1. 若 $\{A\}_0 = \varepsilon$, 则环路可按图 3 的方式消掉.

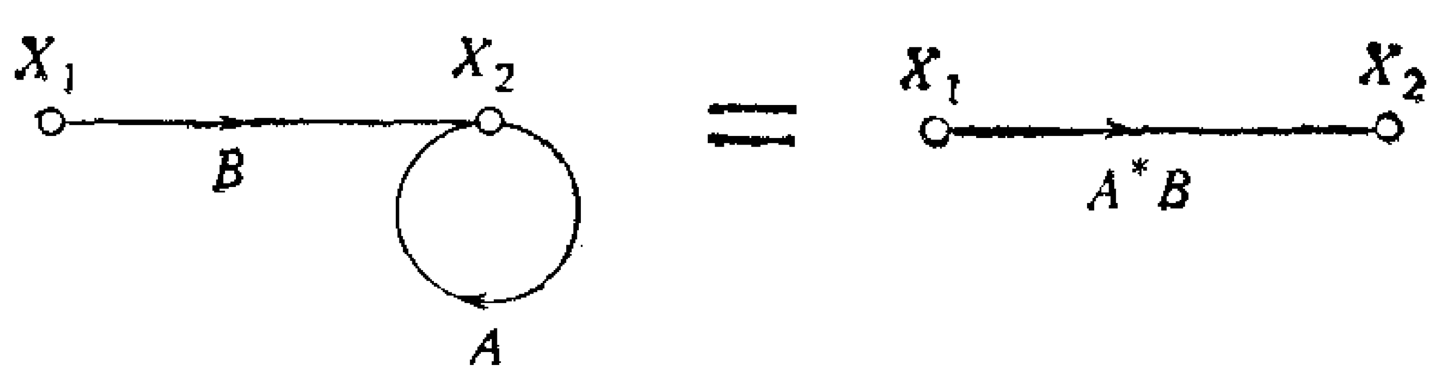


图 3

证明. 应用引理 1.

定义 1. 多项式经过有限次 $\oplus$, $\otimes$, $*$-运算得到的表达式称为有理式.

有理式是幂级数的紧致表示, 可按(2)式展开.

定理 2. 事件图的传递函数是有理的.

证明. 从事件图构造的初始流图上只有单项式增益. 根据定理 1, 并(串)联支路、环路通过$\oplus$($\otimes$)、$*$-运算合成单一支路. 有限步代数运算后,得有理传递函数.

定义 2. 设$A(z^{-1})$, $B(z^{-1})$ 是关于 z^{-1} 的多项式, $\{A\}_0 = \varepsilon$, 称表达式 $A^* B$ 为广义分式, A, B 分别为分母、分子. 若 $A = \varepsilon$, 则 $A^* B$ 退化为 B.

引理 2. 设 A, B 是有理式

$$A^* B^* = (A \oplus B)^*, \ (A^* B)^* = e \oplus (A \oplus B)^* B. \qquad (3),(4)$$

证明. $A^* B^* = \left(\bigoplus_{n \geqslant 0} A^n \right) \left(\bigoplus_{m \geqslant 0} B^m \right) = \bigoplus_{n,m \geqslant 0} A^n B^m$,

$$(A \oplus B)^* = \bigoplus_{l \geqslant 0} (A \oplus B)^l = \bigoplus_{l \geqslant 0} \left(\bigoplus_{n+m=l} A^n B^m \right) = \bigoplus_{n,m \geqslant 0} A^n B^m,$$

(3)式得证. 特别地, $(A^*)^2 = A^*$, 于是

$$(A^* B)^* = e \oplus \left[\bigoplus_{n \geqslant 1} (A^* B)^n \right] = e \oplus \left[\bigoplus_{n \geqslant 1} A^* B^n \right]$$

$$= e \oplus A^* \left(\bigoplus_{n \geqslant 0} B^n \right) B = e \oplus A^* B^* B = e \oplus (A \oplus B)^* B,$$

(4)式得证.

定理 3. 有理式均能展开成广义分式和.

证明. 应用引理 2.

如图 2,传递矩阵 $H=[H_1,H_2]$，其中

$$\left.\begin{aligned}H_1&=b_1a_1c_2z^{-1}(a_1a_2z^{-1})^*\oplus b_1a_1a_2c_3(a_1a_2z^{-1}\oplus a_3z^{-2})^*\\H_2&=b_2c_2z^{-2}(a_1a_2z^{-1})^*\oplus b_2a_2c_3(z^{-1}\oplus a_1z^{-2})(a_1a_2z^{-1}\oplus a_3z^{-2})^*\end{aligned}\right\}. \tag{5}$$

三、广义分式约简与标准形

1. 冗余项

广义分式去掉分子(分母)中的一项，不影响其展开的形式幂级数，则称该项为冗余项. 下面用N表示正整数集.

定理 4. $A=\bigoplus\limits_{i\in I}\alpha_i$，若

$$\alpha_s\leqslant\bigotimes_{j\in J}\alpha_j^{k_j},\ k_j\in N,\ j\in J\subset I\backslash\{s\} \tag{6}$$

则

$$A^*=\Big(\bigoplus_{i\in I\backslash\{s\}}\alpha_i\Big)^*. \tag{7}$$

证明. 由(6)式

$$\alpha_s\Big(\bigotimes_{j\in J}\alpha_j^*\Big)\leqslant\bigotimes_{j\in J}(\alpha_j^{k_j}\alpha_j^*)\leqslant\bigotimes_{j\in J}\alpha_j^*,\ \alpha_s^*\Big(\bigotimes_{j\in J}\alpha_j^*\Big)=\bigotimes_{j\in J}\alpha_j^*.$$

根据引理 2

$$A^*=\alpha_s^*\Big(\bigotimes_{i\neq s}\alpha_i^*\Big)=\bigotimes_{i\neq s}\alpha_i^*=\Big(\bigoplus_{i\neq s}\alpha_i\Big)^*.$$

证毕

应用定理 4，可消广义分式的分母冗余项. 令 $\alpha_i=a_iz^{-n_i}$，则(6)式在常规意义下表示为

$$n_s=\sum_{j\in J}k_jn_j,\ a_s\leqslant\sum_{j\in J}k_ja_j. \tag{8}$$

引理 3. 设 $B(z^{-1})=\bigoplus\limits_{j\in J}b_jz^{-m_j}$，$b_tz^{-m_t}$ 是 $(z^{-n})^*B(z^{-1})$ 的冗余项，当且仅当存在 $r\in J$ 满足

$$\left.\begin{aligned}&m_r\equiv m_t\pmod n\\&m_r<m_t,\quad b_r\geqslant b_t\end{aligned}\right\}. \tag{9}$$

证明. 令 $\bar{m}_j=\{k:k\equiv m_j(\mathrm{mod}\ n)\}$，则

$$(z^{-n})^*z^{-m_j}=\bigoplus_{\substack{k\in\bar{m}_j\\k\geqslant m_j}}z^{-k}.$$

因此,(9)式等价于 $(z^{-n})^* b_t z^{-m_t} \leqslant (z^{-n})^* b_r z^{-m_r}$.

证毕

定理 5. $A = \bigoplus_{i\in I} a_i z^{-n_i}$, $B = \bigoplus_{j\in J} b_j z^{-m_j}$, $\lambda_i = \frac{a_i}{n_i}$, $i \in I$, $b_t z^{-m_t}$ 是 A^*B 的分子冗余项,如果存在 $s\in I$, $r\in J$ 满足

$$\left.\begin{array}{l} m_r = m_t (\mathrm{mod}\ n_s) \\ m_r < m_t,\ b_r \lambda_s^{-m_r} \geqslant b_t \lambda_s^{-m_t} \end{array}\right\}. \tag{10}$$

证明.

$$A^*B = \left(\bigoplus_{i\neq s} a_i z^{-n_i}\right)^* (\lambda_s^{n_s} z^{-n_s})^* \left(\bigoplus_{j\in J} b_j \lambda_s^{-m_j} \lambda_s^{m_j} z^{-m_j}\right).$$

应用引理 3 即得

2. 标准形

引理 4. $A = \bigoplus_{i\in I} a_i z^{-n_i}$, $\lambda_i = \frac{a_i}{n_i}$, $i \in I$. 若 $\lambda_s \geqslant \lambda_t$, 则

$$A^* = \left(\bigoplus_{i\neq t} a_i z^{-n_i}\right)^* \left[\bigoplus_{j=0}^{n_s-1} (a_t z^{-n_t})^j\right]. \tag{11}$$

证明.

$$A^* = \left(\bigoplus_{i\neq t} a_i z^{-n_i}\right)^* \left[\bigoplus_{k\geqslant 0} (a_t z^{-n_t})^k\right]. \tag{12}$$

当 $k \geqslant n_s$ 时,令 $k \equiv j (\mathrm{mod}\ n_s)$, $0 \leqslant j < n_s$. 由$\lambda_s \geqslant \lambda_t$, $a_t \lambda_s^{-n_t} \leqslant e$,于是$(a_t \lambda_s^{-n_t})^k \leqslant (a_t \lambda_s^{-n_t})^j$. 对(12)式右边应用定理 5 即得.

定义 3. 设B是多项式, $a \in R$, $n \in N$, 称$(az^{-n})^* B(z^{-1})$ 为单模广义分式.

定理 6. 广义分式均可化为单模的. (证明可由引理 4 得)

定义 4. 设 $(\lambda^n z^{-n})^* B(\lambda z^{-1})$ 分子无冗余项. 若多项式B的次数 $\deg B < n$, 则称 $(\lambda^n z^{-n})^* B(\lambda z^{-1})$ 为单模真分式;否则为单模假分式.

定理 7. 若 $(\lambda^n z^{-n})^* B(\lambda z^{-1})$ 是单模假分式, 则存在次数分别小于 r, n 的多项式 P_{r-1}, Q_{n-1} 满足

$$(\lambda^n z^{-n})^* B(\lambda z^{-1}) = P_{r-1}(\lambda z^{-1}) \oplus \lambda^r z^{-r} (\lambda^n z^{-n})^* Q_{n-1}(\lambda z^{-1}). \tag{13}$$

证明. 设 $B(\lambda z^{-1}) = \bigoplus_{j=0}^{m} b_j z^{-j}$, $r = m - n + 1$, 令

$$\left.\begin{array}{l} p_i = \bigoplus\limits_{\substack{j\equiv i (\mathrm{mod} n) \\ j \leqslant i}} b_j,\ 0 \leqslant i \leqslant m \\ q_i = p_{r+i},\ 0 \leqslant i < n \end{array}\right\} \tag{14}$$

则

$$P_{r-1}(\lambda z^{-1}) = \bigoplus_{k=0}^{r-1} p_k \lambda^k z^{-k},\ Q_{n-1}(\lambda z^{-1}) = \bigoplus_{i=0}^{n-1} q_i \lambda^i z^{-i}$$

满足(13)式.

引理 5. $n = md$, Q_{n-1}, $\tilde{Q}_{d-1}$ 是次数分别小于 n, d 的多项式, 且

$$Q_{n-1}(\lambda z^{-1})=\widetilde{Q}_{d-1}(\lambda z^{-1})\left[\bigoplus_{i=0}^{m-1}(\lambda^d z^{-d})^i\right],\tag{15}$$

则

$$(\lambda^n z^{-n})^* Q_{n-1}(\lambda z^{-1})=(\lambda^d z^{-d})^*\widetilde{Q}_{d-1}(\lambda z^{-1}).\tag{16}$$

证明．注意到下式,即得

$$(\lambda^n z^{-n})^*\left[\bigoplus_{i=0}^{m-1}(\lambda^d z^{-d})^i\right]=(\lambda^d z^{-d})^*.$$

定义 5. 满足引理 5 的条件的单模真分式 $(\lambda^n z^{-n})^* Q_{n-1}(\lambda z^{-1})$称为可约的;否则为既约的.

定理 8. 广义分式均可化为如下标准形

$$A^*B=P_{r-1}(\lambda z^{-1})\oplus\lambda^r z^{-r}(\lambda^d z^{-d})^* Q_{d-1}(\lambda z^{-1}).\tag{17}$$

其中 P_{r-1} 是次数小于 r 的多项式，$(\lambda^d z^{-d})^* Q_{d-1}(\lambda z^{-1})$ 是既约单模真分式．（证明是定理 6,7 和引理 5 的综合）

四、谱 分 析

1. 极点、谱半径

定义 6. $\lambda\in R$ 称为广义分式 $A^*(z^{-1})B(z^{-1})$ 的极点,如果 $A(\lambda^{-1})=e$.

定理 9. 设广义分式 $H=A^*B$ 的极点为 λ_0,$y(k)$ 是H在等间隔输入 $u(k)=\lambda^k$ 下的响应，$\lambda\geqslant\lambda_0$，则

$$y(k)=B(\lambda^{-1})\lambda^k,\ k\geqslant \deg B.\tag{18}$$

证明． $U(z^{-1})=(\lambda z^{-1})^*$, $A(z^{-1})=\bigoplus_{i=1}^{n}a_i z^{-i}$，由引理 2

$$Y=A^*BU=\left[\lambda z^{-1}\oplus\left(\bigoplus_{i=1}^{n}a_i z^{-i}\right)\right]^* B(z^{-1}),\tag{19}$$

令 $\lambda_i=\frac{a_i}{i}$,则 $\lambda_0=\bigoplus_{i=1}^{n}\lambda_i$. 由 $\lambda\geqslant\lambda_0$，定理 5 用于式(19)右边得

$$Y=(\lambda z^{-1})^* B(z^{-1}),\ y(k)=\left(\bigoplus_{j=0}^{k}b_j\lambda^{-j}\right)\lambda^k,$$

于是得(18)式.

定义 7. 设有理式 $H=\bigoplus_{i=1}^{n}A_i^*B_i$，其中 $A_i^*B_i$ 是极点为 λ_i 的广义分式，称 $\lambda_0=\bigoplus_{i=1}^{n}\lambda_i$ 为H的谱半径.

有理式展成广义分式和可能不唯一,但谱半径是有理式的特征量,决定其收敛域.

2. 收敛域

形式幂级数 $X(z^{-1})=\bigoplus_{k\geq 0}x_k z^{-k}$ 中，用 $\lambda\in R$ 取代形式变量，得 E 上的级数

$$X(\lambda^{-1})=\bigoplus_{k\geq 0}x_k\lambda^{-k}.$$

当级数收敛时，$X(\lambda^{-1})<+\infty$；级数发散时，$X(\lambda^{-1})=+\infty$.

定理 10. 有理式的收敛域为闭区间$[\lambda_0,+\infty)$，其中 λ_0 是其谱半径.

证明. 根据定理 3，设 $H(z^{-1})$ 如定义 7. $A_i^*(\lambda^{-1})B_i(\lambda^{-1})<+\infty$ 当且仅当 $A_i(\lambda^{-1})\leqslant e$，等价于 $\lambda\geqslant\lambda_i$. 于是 $H(\lambda^{-1})<+\infty$，当且仅当 $\lambda\geqslant\lambda_0$. 证毕

有理传递函数在其收敛域内的取值有明确的物理意义.

定理 11. 设有理传递函数 $H(z^{-1})$ 的谱半径为 λ_0，给定等间隔输入 $u(k)=\lambda^k$，$\lambda\in[\lambda_0,+\infty)$，则输出具有如下稳态:

$$y(k)=H(\lambda^{-1})\lambda^k,\ k \text{ 充分大时} \tag{20}$$

证明. 应用定理 3 和定理 9.

3. 周期响应

定义 8. 序列 $x(k)$ 称为周期的，如果

$$x(k+d)=cx(k), \tag{21}$$

等间隔序列 λ^k 又是周期序列的特例. 则一般周期序列表示如下:

$$x(k)=\bigoplus_{j=0}^{d-1}g(j)\delta(k-j,d)\lambda^k, \tag{22}$$

$$\delta(k,d)=\begin{cases}e, & k\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ d)\\ \varepsilon, & \text{否则}\end{cases} \tag{23}$$

周期序列 Z-变换是单模广义分式

$$\begin{aligned}X(z^{-1})&=(\lambda^d z^{-d})^*G_{d-1}(\lambda z^{-1}),\\ G_{d-1}(\lambda z^{-1})&=\bigoplus_{j=0}^{d-1}g(j)\lambda^j z^{-j}.\end{aligned} \tag{24}$$

广义分式在周期输入下的响应是广义分式，下面给出其事件域解，包括瞬态和稳态. 注意到极点的周期域含义.

定理 12. 设广义分式 A^*B 的标准形如(17)式，则 A^*B 的逆 Z-变换为

$$x(k)=\begin{cases}p_k\lambda^k, & k<r\\ \left[\bigoplus_{i=0}^{d-1}q_i\delta(k-r-i,d)\right]\lambda^k, & k\geqslant r\end{cases} \tag{25}$$

证明. 直接计算(25)式的 Z-变换.

应用定理 3,11，可写出有理式周期响应的事件域(封闭)表达式.

五、应用——最小实现与最优控制

如图 1 系统参数 $b_1=b_2=0$；$a_1=2$，$a_2=3$，$a_3=8$；$c_2=10$，$c_3=3$. 将参数代入(5)式，应用定理 5,6 得

$$H = [H_1, H_2] = (5z^{-1})^*[8, 6z^{-1}], \tag{26}$$

于是得最小实现如图 4(a) 所示.

在加工系统中,要求控制投料时间 u_1, u_2 使产品均匀输出,即 $y(k) = h\lambda^k$, $k \geqslant r$. 且实现如下最优性能指标：输出间隔 λ 最小;输出延迟 h 最小;在上述前提下,占用缓冲器容量最省. 即以尽可能大的 u_1, u_2 实现 λ, h 最小. 因为输入延迟越长,系统中滞留半成品越少.

H的极点 $\lambda_0 = 5$ 是 λ 的下界,令

$$u_i(k) = g_i 5^k,\ g_i \geqslant 0,\ i = 1,2.$$

根据定理 9 得

$$y(k) = (8g_1 \oplus 1g_2)5^k,\ k \geqslant 1.$$

令 $8g_1 = 1g_2 = \min$, 得开环最优控制: $g_1 = 0$, $g_2 = 7$. 最优输出 $y(k) = 8 \otimes 5^k$.

开环控制要求系统参数十分准确,闭环控制具有对内外扰动的鲁棒性. 令

$$\left.\begin{aligned} U_i &= f_i z^{-n_i} Y \oplus U_i^0 \\ U_i^0 &= \bigoplus_{k=0}^{n_i - 1} u_i(k) z^{-k} \end{aligned}\right\}, i = 1,2 \tag{27}$$

得闭环系统如图 4(b) 所示.

$$Y = [5z^{-1} \oplus 8f_1 z^{-n_1} \oplus 6f_2 z^{-(n_2+1)}]^*(8U_1^0 \oplus 6z^{-1}U_2^0). \tag{28}$$

应用定理 4, 令 $8f_1 5^{-n_1} = 6f_2 5^{-(n_2+1)} = e$. n_1, n_2 是反馈网络的初始令牌 (token) 数, 应尽可能小,因此

$$n_1 = 2,\ f_1 = 2;\ n_2 = 1,\ f_2 = 4, \tag{29}$$

代入(28)式得

$$Y = (5z^{-1})^*[8u_1(0) \oplus (8u_1(1) \oplus 6u_2(0))z^{-1}].$$

应用定理 5, 令 $8u_1(0) = 8u_1(1)5^{-1} = 6u_2(0)5^{-1} = \min$, 初始输入

$$u_1(0) = 0,\ u_1(1) = 5;\ u_2(0) = 7, \tag{30}$$

由(29)式知,反馈律为

$$\left.\begin{aligned} u_1(k) &= 2y(k-2),\ k \geqslant 2 \\ u_2(k) &= 4y(k-1),\ k \geqslant 1 \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

(30),(31)式构成最优闭环控制.

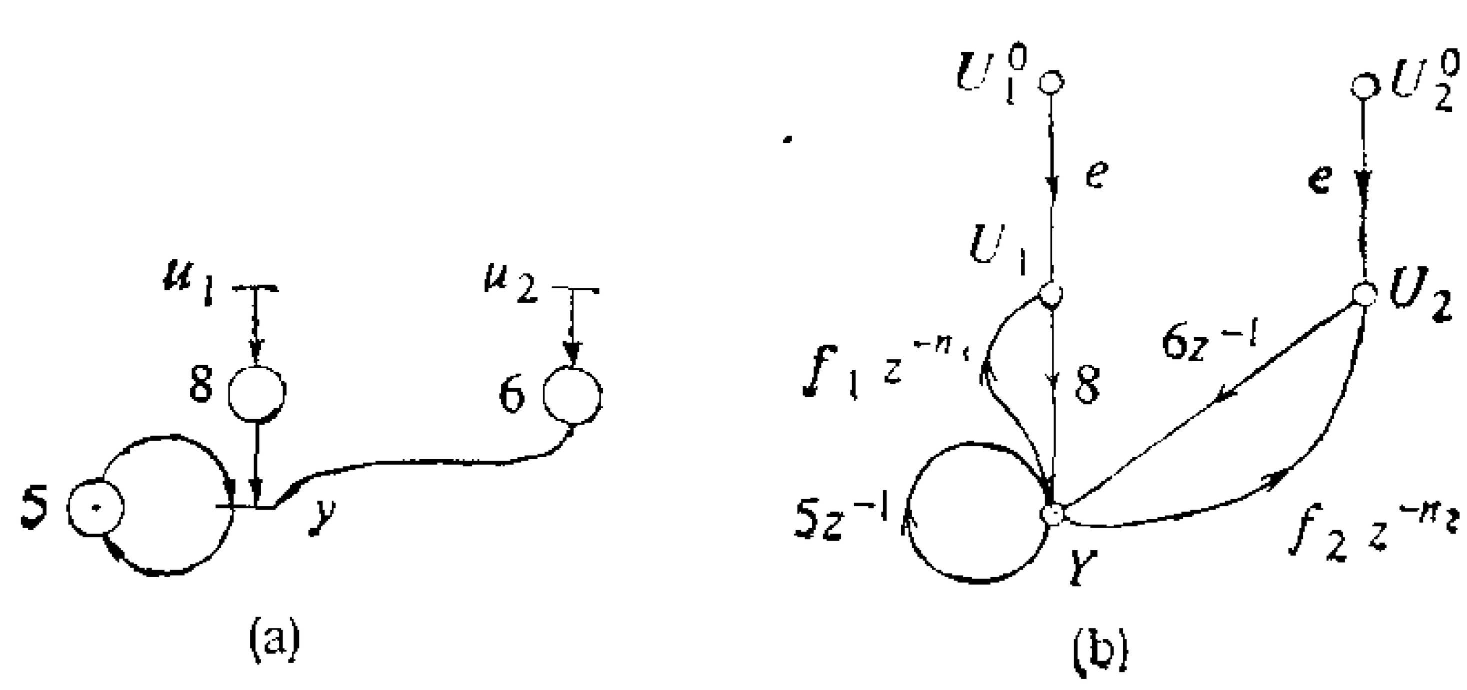


图 4

参 考 文 献

[1] Cohen, G., Moller, P., Quadrat, J. P. and Viot, M., Linear System Theory for Discrete-Event Systems. 23rd IEEE conf. on Decision and Control, Las Vegas, NV, 1984, 539—544.

GENERALIZED-FRACTION APPROACH FOR DISCRETE-EVENT SYSTEMS

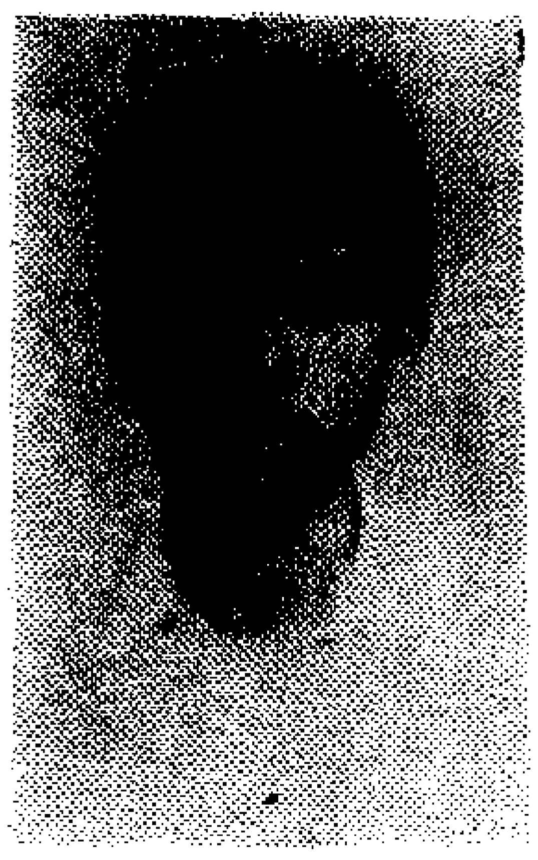
ZHU GENGXIN AND ZHENG DAZHONG

(*Dept. of Automation, Tsinghua University, Beijing* 100084)

ABSTRACT

Concerning a class of discrete-event systems in Z-domain, rational expressions based on minimax algebra are introduced as a simple way for formulating transfer functions, which are infinite formal series by definition. A rational expression is transformed into sum of generalized fractions in design and analysis of a system. Reduction of a generalized fraction is discussed and its standard form given. Spectrum characteristics of a rational transfer function is studied with its connection to periodic response of the system. Applications such as minimal realization and optimal control are illustrated with an example.

Key words : discrete event; Z-domain description; spectrum analysis.



朱更新 1966年生于湖南邵阳。1989年毕业于清华大学自动化系，获工业自动化专业工科、应用数学专业理科双学士学位。同年被录取为自动化系硕士研究生，二年后考取直读博士生至今。

郑大钟 简介见本刊第18卷第2期。