第19卷 第2期 自 动 化 学 报 Vol. 19, No. 2
1993 年 3 月 ACTA AUTOMATICA SINICA Mar., 1993

研究简报

广义系统:状态空间结构[1)]

谢小信 刘晓平 张嗣瀛
(东北工学院自控系,沈阳 110006)

摘　　要

本文首先给出广义系统交换代数的构造方法。在此基础上讨论了交换代数下广义系统的状态空间结构,给出系统结构的简化分解形式。

关键词: 广义系统,交换代数,结构分解.

一、引　　言

无论是正常的还是广义的动态系统，随着其维数的增大系统的结构也会变得越来越复杂。这种高维复杂系统不管是在理论分析还是工程实用上都会遇到很多困难.因此,人们必须面对的问题就是要设法使复杂系统的结构得到简化。状态分解就是简化系统结构的一个重要方面。近年来,系统对称性的研究工作出现很多。对于线性系统来说,对称性的实质就是用代数来描述系统的结构[2,3],通过对称代数的性质来研究系统的结构。本文借用这一思想,将代数与广义系统联系起来,通过构造系统的交换代数,得到系统的与其交换代数相一致的分解形式,使系统结构得到简化,以便于对系统进行各种分析和设计。

二、交 换 代 数

对于广义动态系统

$$E\dot{x} = Ax + Bu, \tag{2.1}$$

其中 $x \in R^n$, $u \in R^m$ 分别是其状态变量和控制变量，E, $A \in R^{n\times n}$, $B \in R^{n\times m}$, 定义集合

$$G = \{S \in gl(n,C) | SE = ES,\ SA = AS\}$$

为系统的交换代数。

下面给出这一交换代数的构造方法。

本文于 1991 年 12 月23日收到。
1) 国家自然科学基金资助课题。

定义 2.1. 设 A 是一 n 阶方阵,称 n 阶方阵的集合

$$G(A)=\{S\in gl(n,\ C)\mid SA=AS\}$$

为 A 的交换代数。

引理 2.1. 设 J_1 和 J_2 是阶数分别为 n 和 m 的若当块，其特征值分别为 a 和 b，A 是一 $n\times m$ 矩阵。如果 $a\neq b$ 且 $J_1A=AJ_2$，那么 $A=0$。

引理 2.2. 设 $J=\mathrm{diag}(J_1,\ J_2,\cdots,\ J_r)$，其中 J_i 是特征值为 a 阶数为 n_i 的若当块 $(i=1,\cdots,r)$，且 $\sum_{i=1}^{r}n_i=n$；$J'=\mathrm{diag}(J'_1,\ J'_2,\cdots,\ J'_u)$，其中 J'_j 是特征值为 b 阶数为 m_j 的若当块 $(j=1,2,\cdots,u)$，且 $\sum_{j=1}^{u}m_j=m$，A 是一 $n\times m$ 矩阵.如果 $a\neq b$ 且 $JA=AJ'$，那么 $A=0$。

证明可由引理 2.1 得到.

引理 2.3. 设 J_1 和 J_2 是阶数分别为 n 和 m 且具有同一特征值的若当块． A 是一 $n\times m$ 矩阵。如果 $J_1A=AJ_2$，那么当 $n=m$，$n>m$，$n<m$ 时，A 分别具有如下形式:

$$A=K_m,\quad A=\begin{bmatrix}K_m\\0\end{bmatrix},\quad A=[0\ \ K_n],$$

其中 K_i 是 i 阶上三角阵,即

$$K_i=\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_{i-1} & a_i\\ 0 & a_1 & \cdots & a_{i-2} & a_{i-1}\\ & & \cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1\end{bmatrix},$$

$a_1,\ a_2,\cdots,\ a_i\in C$。

可见，满足引理 2.3 的 A 可用 $\min\{m,\ n\}$ 个参数来确定。所有这样的 A 构成一 $\min\{m,\ n\}$ 维代数。

设 A 是任一 n 阶方阵，存在 n 阶非奇异矩阵 P，使得 $\tilde{A}=P^{-1}AP=\mathrm{diag}(A_1,\ A_2,\cdots,\ A_k)$ 是 A 的若当标准形，其中 $A_i=\mathrm{diag}(J_{i1},\ J_{i2},\cdots,\ J_{ik_i})$，$J_{ij}(j=1,\cdots,k_i)$ 是特征值为 a_i 的若当块，$i=1,\cdots,k$，并且 $a_i\neq a_r(i\neq r)$． 假定 $\tilde{S}\in G(\tilde{A})$,并置 $\tilde{S}=(\tilde{S}_{ij})$ 是相应于 $\tilde{A}$ 的分块。从 $\tilde{S}\tilde{A}=\tilde{A}\tilde{S}$ 可得 $\tilde{S}_{ij}A_j=A_i\tilde{S}_{ij}(i,\ j=1,\ 2,\cdots,\ k)$。由引理 2.2 知 $i\neq j$ 时 $S_{ij}=0$。因此

$$S=\mathrm{diag}(\tilde{S}_{11},\ \tilde{S}_{22},\cdots,\tilde{S}_{kk}),$$
$$\tilde{S}_{ii}A_i=A_i\tilde{S}_{ii},\ i=1,\cdots,k. \tag{2.2}$$

再置 $\tilde{S}_{ii}=(S_{uv})_{k_i\times k_i}$ 为相应于 A_i 的分块,那么由(2.2)式可得

$$J_{iu}S_{uv}=S_{uv}J_{iv},\ 1\leqslant u,\ v\leqslant k_i.$$

这样 S_{uv} 可由引理 2.3 确定,从而 $\tilde{S}$ 被确定. 置 $S=P\tilde{S}P^{-1}$，可以知道

$$G(A)=\{S\},$$

其维数决定于 A 的结构。显然系统(2.1)的交换代数为 $G=G(E)\cap G(A)$。

三、状态空间结构

为了讨论交换代数对广义系统的作用，定义系统(2.1)的状态变换 $T: x = Ty$ 为

$$T^{-1}ET\dot{y} = T^{-1}ATy + T^{-1}Bu, \tag{3.1}$$

即在状态变换之后，使系统的两边同乘以 T^{-1}. 这样对矩阵 E、A 的处理，等同于对正常线性系统状态矩阵的处理。

如果系统(2.1)的交换代数 G 不是平凡的 ($G \neq \{I_n\}$)，由 Schur 定理可知 E 和 A 是可约的。类似于文[4]中对线性系统一般对称代数的讨论，有下面的引理：

引理 3.1. 设系统(2.1)具有交换代数 G，则存在系统的状态变换 T: $x = Ty$，使得

$$E \sim \tilde{E} = \begin{bmatrix} E_1 & 0 \\ E_2 & E_3 \end{bmatrix}, \quad A \sim \tilde{A} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & A_3 \end{bmatrix}.$$

其中子系统

$$E_1\dot{x}^1 = A_1x^1 + B_1u,$$

具有交换代数 G/J，J 是 G 的 Jacobson 根. B_1 是 $\tilde{B}$ 相应于以上的分块 $[B_1, B_2]^T$ 中的第一块。

由于本文讨论的代数都是由矩阵构成的代数，当然是李代数。现设 G 是系统(2.1)的交换代数，由李代数的性质，对 G 可作半直和分解

$$G = P \oplus_S S, \tag{3.2}$$

其中 P 可解，S 半单，都是 G 的子代数. 由半单代数的性质，S 同构于单代数直和分解

$$S \sim \tilde{S} = S_1 \oplus S_2 \oplus \cdots \oplus S_k.$$

相应地，系统(2.1)存在状态变换使得

$$E \sim \tilde{E} = \mathrm{diag}(E_1, E_2, \cdots, E_k),$$
$$A \sim \tilde{A} = \mathrm{diag}(A_1, A_2, \cdots, A_k),$$
$$B \sim \tilde{B} = [B_1, B_2, \cdots, B_k]^T,$$

其中子系统

$$E_i\dot{x}^i = A_ix^i + B_iu, \tag{3.3}$$

具有交换代数 $S_i (i = 1, \cdots, k)$. 由引理 3.1 知，子系统(3.3)可通过状态变换作进一步分解

$$E_i \sim \tilde{E}_i = \begin{bmatrix} E_{i1} & 0 \\ E_{i2} & E_{i3} \end{bmatrix}, \quad A_i \sim \tilde{A}_i = \begin{bmatrix} A_{i1} & 0 \\ A_{i2} & A_{i3} \end{bmatrix}, \quad B_i \sim \tilde{B}_i = \begin{bmatrix} B_{i1} \\ B_{i2} \end{bmatrix},$$

其中子系统 (E_{i1}, A_{i1}, B_{i1}) 具有交换代数 S_i/J_i，J_i 是 S_i 的 Jacobson 根。

参 考 文 献

[1] 王朝珠，戴立意，广义动态系统，控制理论与应用，3(1986)，(2)，1—7.
[2] Martin, C.F., Linear Decentralized Systems with Special Structure, *Int. J. Contr.*, **35**(1982), (2), 291—308.
[3] Hazewinkel, M. and Martin, C., Symmetric Linear Systems: An Application of Algebraic systems

Theory, *Int. J. Contr.*, **37**(1983), (4), 1371—1384.
[4] Lewis, J. et al., Symmetric Systems: Structure of the Stete Space, *Int. J. Contr.*, **43**(1986), (1), 59—64.

GENERALIZED SYSTEMS: STRUCTURE OF THE STATE SPACE

Xie Xiaoxin Liu Xiaoping Zhang Siying
(Department of Automatic Control, Northeast University of Technology, Shenyang 110006)

Key words: Generalzed system; Commutative algebra; structure decomposilion.

ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 19, No. 2, 1993

CONTENTS

Surveys and Reviews

The Conception and Prospects of Complex Control System Theory ......
.... Huang Lin, Qin Huashu, Zheng Yingping, Zheng Dazhong (137)

Papers and Reports

On Robust Absolute Stability of Nonlinear Systems with Structured Perturbations .... Zhao Keyou (144)
An Adaptive Hierarchical Control System with Dual Feedback ....
.... Duan Wenze, Li Yuanshu (153)
Adaptive Control of A Class of Deterministic Nonlinear Multivariable Systems .... Zhang Jiangxin (161)
A Multivariable Self-optimization Pole Assigment Self-tuning Controller
.... Tao Shoulin, Shu Diqian (169)
On the Stationariness of Efficient Solution Sequence in the Multistep Decision Process .... Liu Liping, Chen Ting (176)
ITAE Optimal Control Digital Servosystem of Type III ....
.... Chen Mingjun, Wu Yaqing, Jiang Qida (183)
Real-time Detection and Diagnosis of "Parameter bias" Faults for Nonlinear Systems ....
.... Zhou Donghua, Sun Youxian, Xi Yugeng, Zhang Zhongjun (189)
Multimode Models and Their Algorithm for Urban Traffic Equilibrium Assignment .... Chen Senfa, Zhou Jing, Zhu Yuchuan (196)

Short Papers

Robustness Limitation of MRAC with Unmodelled Dynamics ....
.... Chen Zongji, Yu Xinyao (201)
An Implicit Multivariable Generalized Self-tuning Controller ....
....Chai Tianyou (206)
The Stability of Positive Steady State of the Non-homogeneous Density