

计算机视觉中三维位置信息的误差估计¹⁾

吴成柯 邓世伟 陆心如

(西安电子科技大学信息工程系, 710071)

摘 要

在计算机视觉中, 体视法被广泛地用于获取三维物体的位置信息。由于两个图象平面的分辨率总是有限的, 就会使获得的位置信息有误差。本文推导了空间点位置在三个坐标方向上的误差概率分布。

关键词 计算机视觉, 体视法, 位置误差分布, 有源照相机系统。

一、引 言

在计算机视觉中, 获取三维物体在空间的点位置信息具有很重要的意义。体视法是一种被广泛应用的方法, 它采用无源或有源的双照相机系统。根据空间点在两个图象平面上的投影求得空间点的三维位置信息, 它们之间的关系可用一个 3×4 投影矩阵表示。对于有源系统来说, 其中的一个投影图象实际上是一个由光源所发出的光平面, 光源通常是激光。由于图象平面的分辨率总是有限的, 二维的投影值是经量化而得的, 存在着量化误差, 所以通过投影矩阵所计算出的三维空间点位置也就存在误差。Blostein和 Huang^[1] 对位置沿三个坐标方向的误差概率分布进行了分析, Parsi^[2] 推导了一种新的方法, 与文献 [1] 的方法相比, 可较容易地计算出误差概率分布。由于他们所用的双照相机系统模型只是无源的模型, 在该模型中, 两个照相机具有相同的焦距并被安放在相同的高度上, 而且两个照相机的光轴必须是平行的, 因此, 用这种模型进行误差估计有很大的局限性。本文的误差估计是对一个更一般化的系统模型进行的, 没有上述的限制, 适用于无源和有源的照相机系统。将所得的误差估计公式对一个有源照相机系统^[3] 进行了实验验证。理论与实验结果表明, 误差不仅与图象平面的分辨率直接有关, 与两个照相机的放置以及空间点位置离照相机的远近也有关。两条照相机投射射线之间的夹角越大, 系统的精度越高。

二、双照相机系统

对于实际使用的双照相机系统, 用理想的针孔照相机模型进行分析。将两个图象平面上相邻象素间的距离(象素间隔)定义为 Δ , 空间点 s 的三维坐标值为 (x, y, z) , 它在

本文于 1990 年 5 月 3 日收到。

1) 本文得到国家自然科学基金的资助。

左边和右边图象平面上的投影分别为 $s'(x', y')$ 和 $s''(x'', y'')$ 。当图象平面的分辨率为 $N \times N$ 时, 投影坐标 x', y' 以及 x'', y'' 的范围都为 $-N\Delta/2$ 至 $N\Delta/2$ 。

照相机系统的成象几何关系可以用投影变换矩阵表述。左边照相机的投影变换关系表述为

$$(w' x' w' y' w')^T = A(x y z 1)^T, \quad (1)$$

投影变换矩阵 A 的元素为 a_{ij} , 消去 w' 后, 可得以下的方程组:

$$\begin{aligned} (a_{11} - a_{31}x')x + (a_{12} - a_{32}x')y + (a_{13} - a_{33}x')z + (a_{14} - a_{34}x') &= 0, \\ (a_{21} - a_{31}y')x + (a_{22} - a_{32}y')y + (a_{23} - a_{33}y')z + (a_{24} - a_{34}y') &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

类似地, 右边照相机的投影变换关系为

$$(w'' x'' w'' y'' w'')^T = B(x y z 1)^T, \quad (3)$$

可得另一个方程组

$$\begin{aligned} (b_{11} - b_{21}x'')x + (b_{12} - b_{32}x'')y + (b_{13} - b_{33}x'')z + (b_{14} - b_{34}x'') &= 0, \\ (b_{21} - b_{31}y'')x + (b_{22} - b_{32}y'')y + (b_{23} - b_{33}y'')z + (b_{24} - b_{34}y'') &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

在方程组(2)和(4)中, 四个线性独立的方程只有三个未知量 x, y 和 z , 解这些方程的方法^[4]很多。可以简单地去掉方程(4)中的后一个方程解得这三个未知量。这样, 既适用于无源、也适用于有源照相机系统。

三、误差估计

若三维空间点 $s(u, v, w)$ 恰好投影在图象平面的量化坐标上, 那么, 由 x', y' 和 x'' 所恢复出的空间位置 (x, y, z) 就是 s 的真实位置。然而, 投影值与量化坐标 x', y' 和 x'' 一般都不相同, 将它们之差定义为 n'_x, n'_y 和 n''_x , 有下式

$$u' = x' + n'_x, v' = y' + n'_y, u'' = x'' + n''_x. \quad (5)$$

由图象平面的量化所引起的三维点位置误差表示为

$$n_x = u - x, n_y = v - y, n_z = w - z. \quad (6)$$

不失一般性, 假设三维物体点的真实位置没有先验知识, 即可能均匀地分布在一小体积元内, 该体积元的投影为图象平面上的不确定区域。三维点位置在 x 方向的误差 n_x 可以求得为[见附录]

$$n_x = \frac{B_1 n'_x + B_2 n'_y + B_3 n''_x + B_4 n'_y n''_x + B_5 n'_x n''_x}{A_0 + A_1 n'_x + A_2 n'_y + A_3 n''_x + A_4 n'_y n''_x + A_5 n'_x n''_x}. \quad (7)$$

1. 点位置在 x 方向上的误差概率分布

在空间的体积 V 上, 对联合概率密度函数 $p_{N'_x N'_y N''_x}(n'_x, n'_y, n''_x)$ 求三重积分可得误差的概率分布函数

$$F_{N_x}(\lambda_x) = P\{N_x < \lambda_x\} = \iiint_V p_{N'_x N'_y N''_x}(n'_x, n'_y, n''_x) dn'_x dn'_y dn''_x. \quad (8)$$

一般的分析都假设^[1,2]随机变量 n'_x, n'_y 和 n''_x (图象平面的误差值)相互独立且均匀分布在 $-\Delta/2$ 和 $\Delta/2$ 之间。计算机模拟结果也表明这一假设是合理的。这样, 式(8)中的联合概率密度为

$$p_{N'_x N'_y N''_x}(n'_x, n'_y, n''_x) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta^3}, & |n'_x| < \frac{\Delta}{2}, |n'_y| < \frac{\Delta}{2}, |n''_x| < \frac{\Delta}{2}, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases} \quad (9)$$

在针孔照相机模型系统中,有

$$A_0 + A_1 n'_x + A_2 n'_y + A_3 n''_x + A_4 n'_y n''_x + A_5 n'_x n''_x < 0, \quad (10)$$

这里,

$$-\frac{\Delta}{2} \leq n'_x, n'_y, n''_x \leq \frac{\Delta}{2}.$$

$N_x < \lambda_x$ (常数)的条件意味着 n'_x, n'_y 和 n''_x 之间有一个约束关系. 由方程 (7), 可求出此关系为

$$n''_x(n'_x, n'_y) = -\frac{C_0 + C_1 n'_x + C_2 n'_y}{C_3 + C_4 n'_y + C_5 n'_x}, \quad (11)$$

这里, $C_0 = -A_0 \lambda_x$, $C_i = B_i - A_i \lambda_x (i = 1, 2, 3, 4, 5)$. 于是式 (8) 的三重积分就简化为在 $n'_x n'_y$ 平面区域上函数 $f(n'_x, n'_y)$ 的二重定积分

$$F_{N_x}(\lambda_x) = \frac{1}{\Delta^3} \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} f(n'_x, n'_y) dn'_x dn'_y, \quad (12)$$

这里

$$f(n'_x, n'_y) = \begin{cases} \frac{\Delta}{2} - n''_x(n'_x, n'_y), & -\frac{\Delta}{2} < n''_x(n'_x, n'_y) < \frac{\Delta}{2} \text{ and } c_3 + c_4 n'_y + c_5 n'_x > 0, \\ \frac{\Delta}{2} + n''_x(n'_x, n'_y), & -\frac{\Delta}{2} < n''_x(n'_x, n'_y) < \frac{\Delta}{2} \text{ and } c_3 + c_4 n'_y + c_5 n'_x > 0, \\ \Delta, & n''_x(n'_x, n'_y) > \frac{\Delta}{2} \text{ and } c_3 + c_4 n'_y + c_5 n'_x < 0 \\ \text{or} & n''_x(n'_x, n'_y) < -\frac{\Delta}{2} \text{ and } c_3 + c_4 n'_y + c_5 n'_x > 0, \\ 0, & n''_x(n'_x, n'_y) > \frac{\Delta}{2} \text{ and } c_3 + c_4 n'_y + c_5 n'_x < 0 \\ \text{or} & n''_x(n'_x, n'_y) < -\frac{\Delta}{2} \text{ and } c_3 + c_4 n'_y + c_5 n'_x > 0. \end{cases} \quad (13)$$

由 $F_{N_x}(\lambda_x)$ 就可以容易地求得位置测量中沿 x 方向误差在某一指定容限 τ_x 内的概率

$$P\{|N_x| < \tau_x\} = P\{N_x < \tau_x\} - P\{N_x < -\tau_x\} = F_{N_x}(\tau_x) - F_{N_x}(-\tau_x). \quad (14)$$

2. 点位置在 y 和 z 方向上的误差概率分布

它们的概率分布函数分别为

$$F_{N_y}(\lambda_y) = P\{N_y < \lambda_y\} = \frac{1}{\Delta^3} \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} f(n'_x, n'_y) dn'_x dn'_y, \quad (15)$$

$$F_{N_z}(\lambda_z) = P\{N_z < \lambda_z\} = \frac{1}{\Delta^3} \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} f(n'_x, n'_y) dn'_x dn'_y. \quad (16)$$

上两式中的 $f(n'_x, n'_y)$ 在形式上均与式 (13) 相同, 其中所用到的系数 A_i 也与附录中所

给出的值相同,但所用到的系数 λ_x 应分别用 λ_y 和 λ_z 代替,且 $B_i(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ 分别与附录中所给出的值不同.

由概率分布函数 $F_{N_y}(\lambda_y)$ 和 $F_{N_z}(\lambda_z)$ 可以求得位置测量中沿 y 方向和 z 方向误差在指定容限 τ_y 和 τ_z 内的概率分别为

$$P\{|N_y| < \tau_y\} = P\{N_y < \tau_y\} - P\{N_y < -\tau_y\} = F_{N_y}(\tau_y) - F_{N_y}(-\tau_y), \quad (17)$$

$$P\{|N_z| < \tau_z\} = P\{N_z < \tau_z\} - P\{N_z < -\tau_z\} = F_{N_z}(\tau_z) - F_{N_z}(-\tau_z). \quad (18)$$

四、实验结果

用作实验的有源照相机系统^[3]中,象素间隔 $\Delta = 0.1\text{mm}$, $N = 512$, 两个投影变换矩阵分别为

$$A = \begin{bmatrix} 0.9901 \times 10^{-2} & 0.6965 \times 10^{-18} & 0.6965 \times 10^{-18} & -0.3033 \times 10^{-14} \\ 0.6065 \times 10^{-18} & 0.9901 \times 10^{-2} & 0.6065 \times 10^{-18} & -0.3033 \times 10^{-14} \\ 0.1084 \times 10^{-17} & 0.1084 \times 10^{-17} & -0.1980 \times 10^{-3} & 0.1000 \times 10^1 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.6213 \times 10^{-2} & 0.0000 \times 10^0 & -0.3590 \times 10^{-2} & -0.1853 \times 10^2 \\ 0.3659 \times 10^{-18} & 0.7080 \times 10^{-2} & 0.0000 \times 10^0 & -0.7180 \times 10^{-1} \\ -0.8975 \times 10^{-4} & 0.0000 \times 10^0 & -0.1555 \times 10^{-3} & 0.1000 \times 10^1 \end{bmatrix}.$$

在空间点 ($u = v = w = 1000\text{mm}$) 附近的一个小体积元内随机地生成大量的空间点,其二维投影值经量化将引入误差,由附录中的式 (A.2) 可得所恢复的带有误差的三

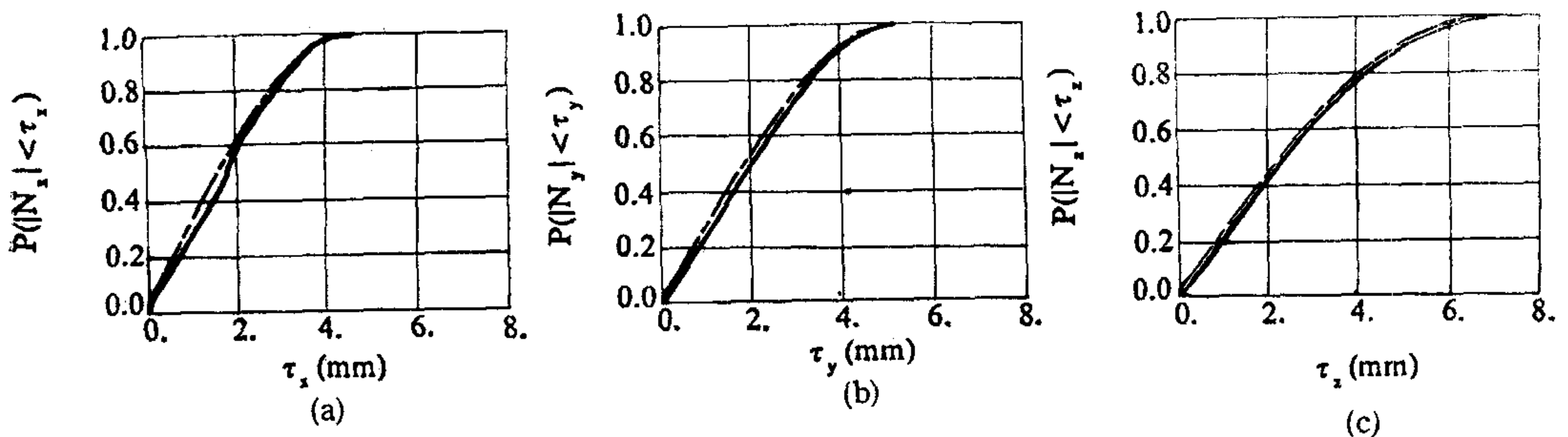


图 1 $\Delta = 0.1\text{mm}$ 时的误差概率分布

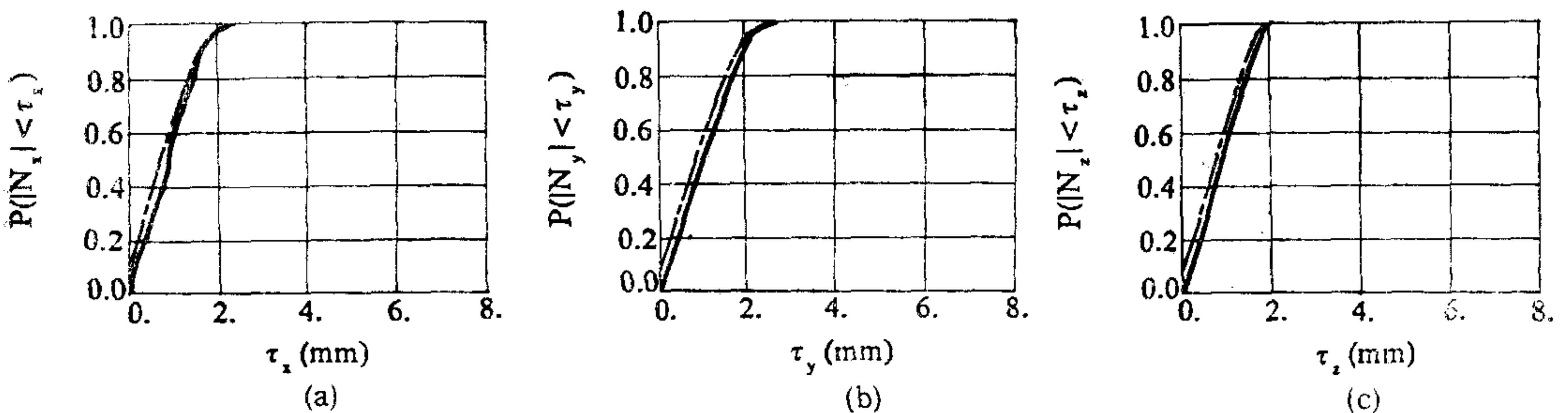


图 2 $\Delta = 0.05\text{mm}$ 时的误差概率分布

维点位置 (x, y, z) 。

图 1 给出了这些点的累积概率分布。实线为由公式 (14), (17), (18) 所求得, 点划线为由实验所得结果, 由图可见, 它们相当接近。

图 2 是将图象分辨率提高后的结果, 它表明随着分辨率的提高, 误差减小。

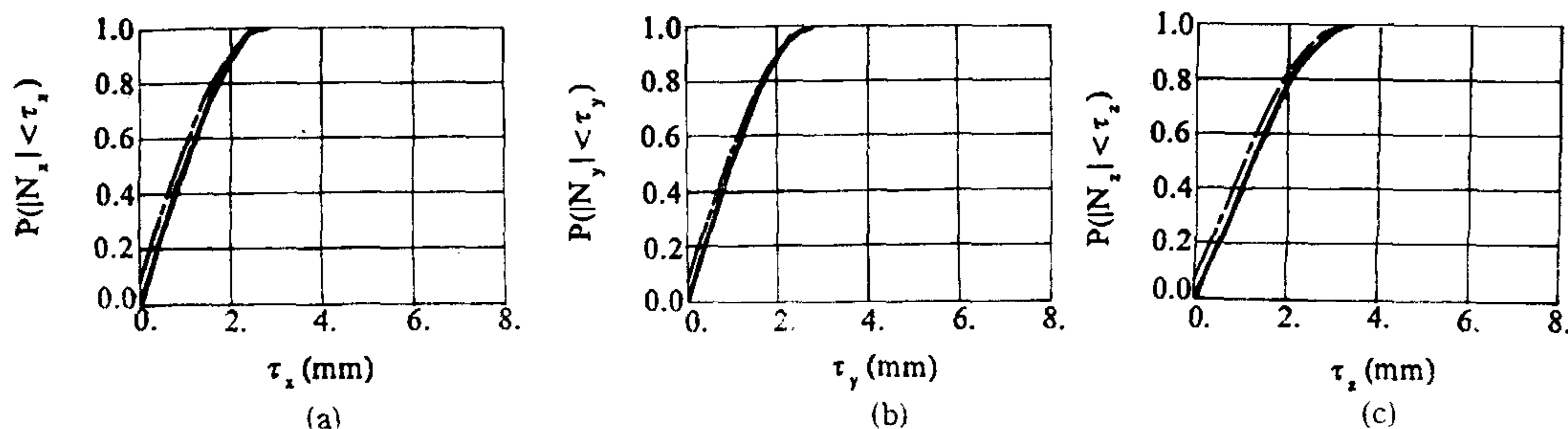


图 3 $w = 300\text{mm}$ 时的误差概率分布

图 3 是将空间点位置移近照相机 ($w = 300\text{mm}$) 后的结果。由图可见, 随着深度的减小或两照相机投影线之间夹角的增大, 误差减小。

附 录

若图象平面上真实的投影值为 u', v' 和 u'' , 可由下式得到对应的真实空间点位置:

$$\begin{bmatrix} a_{11} - a_{31}u' & a_{12} - a_{32}u' & a_{13} - a_{33}u' \\ a_{21} - a_{31}v' & a_{22} - a_{32}v' & a_{23} - a_{33}v' \\ b_{11} - b_{31}u'' & b_{12} - b_{32}u'' & b_{13} - b_{33}u'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{34}u' - a_{14} \\ a_{34}v' - a_{24} \\ b_{34}u'' - b_{14} \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

投影值经量化后的值为 x', y' 和 x'' , 通过解以下方程计算出位置 (x, y, z) :

$$\begin{bmatrix} a_{11} - a_{31}x' & a_{12} - a_{32}x' & a_{13} - a_{33}x' \\ a_{21} - a_{31}y' & a_{22} - a_{32}y' & a_{23} - a_{33}y' \\ b_{11} - b_{31}x'' & b_{12} - b_{32}x'' & b_{13} - b_{33}x'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{34}x' - a_{14} \\ a_{34}y' - a_{24} \\ b_{34}x'' - b_{14} \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

将式 (A.1) 中的真实值用式 (5), (6) 表示后, 并与式 (A.2) 相减, 可得

$$\begin{bmatrix} (a_{11} - a_{31}x') - a_{31}n'_x & (a_{12} - a_{32}x') - a_{32}n'_x & (a_{13} - a_{33}x') - a_{33}n'_x \\ (a_{21} - a_{31}y') - a_{31}n'_y & (a_{22} - a_{32}y') - a_{32}n'_y & (a_{23} - a_{33}y') - a_{33}n'_y \\ (b_{11} - b_{31}x'') - b_{31}n''_x & (b_{12} - b_{32}x'') - b_{32}n''_x & (b_{13} - b_{33}x'') - b_{33}n''_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} (a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34})n'_x \\ (a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34})n'_y \\ (b_{31}x + b_{32}y + b_{33}z + b_{34})n''_x \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

解方程 (A.3) 就可得 n_x 的表示式 (7) 及 n_y, n_z 的表示式。式 (7) 中的 A_i 和 B_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) 以及 A_0 由投影变换矩阵 A, B 以及投影的量化值所确定, 由于篇幅限制, 这里只写出 A_1 和 B_1 的表示式

$$A_1 = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ b_{11} & b_{12} & b_{13} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} x'' \quad (\text{A.4})$$

$$B_1 = \left(\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ b_{12} & b_{13} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} x'' - \begin{vmatrix} a_{32} & a_{33} \\ b_{12} & b_{13} \end{vmatrix} y' + \begin{vmatrix} a_{32} & a_{33} \\ b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} y' x'' \right)$$

$$\bullet (a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}). \quad (\text{A.5})$$

参 考 文 献

- [1] Blostein, S. D., Huang, T. S., Error Analysis in Stereo Determination of 3-D Point Position, *IEEE PAMI* **9**(1987), 752—765.
- [2] Parsi, B. K., Evaluation of Quantization Error in Computer Vision, *IEEE PAMI* **11** (1989), 929—940.
- [3] 吴成柯、陆心如、王林, 结构光三维信息获取系统, 模式识别与人工智能, **2**(1989), 37—42.
- [4] Wu, C., Wang, D., Bajcsy, R., Acquiring 3-D Spatial Data of a Real Object, *CVGIP* **28** (1984), 126—133.

ERROR EVALUATION OF 3D POSITION INFORMATION IN COMPUTER VISION

WU CHENGKE DENG SHIWEI LU XINRU

(Dept. of Information Engineering, Xidian University)

ABSTRACT

Stereo vision method for acquiring 3D position information is widely used in computer vision. This paper deals with the probability distributions of the error, due to the limited resolution of the camera, in each of the coordinate directions.

Key words : Stereo vision; position error distribution.