第19卷 第3期 自 动 化 学 报 Vol. 19, No. 3
1993 年 5 月 ACTA AUTOMATICA SINICA May, 1993

一种冲突性的多人多目标决策模型[1)]

祝世京 陈 珽
(华中理工大学系统工程研究所，武汉，430074)

摘 要

具有冲突性质的多人多目标决策是一类比较常见的决策问题，本文提出了一种分析这类问题的决策模型．文中首先给出模型的数学描述，并提出一套公理系统．在公理系统的基础上，证明了存在唯一满足公理系统的解函数——参考解．并对参考解的性质进行了分析，同时给出用此模型求解多人多目标冲突决策问题的步骤．

关键词：多人冲突决策，协商对策，参考点，解函数，满意决策．

一、引 言

涉及到利益冲突的多人多目标决策问题在现实生活中比较普遍．在这类问题中，一方面由于冲突的各方具有利益上的利害冲突，因此相互之间处于竞争状态；另一方面由于冲突各方必须联合起来，才能达成一致协议，取得于各方均有益的结果，因此各方又存在比较强烈的合作愿望．如何获得一协议点，使该点既能满足各方最大利益，又能满足公平性，成为解决这类冲突问题的关键．近年来，人们大量采用协商对策模型来分析这类问题[1-3]，试图以一套公平性公理为基础，提出用来确定协议点的解函数，取得了一定的收效．

然而，所有这些方法均借助于效用函数，这就为实际应用增加了困难．一方面，冲突各方的效用函数不易确定；另一方面，冲突各方的效用比较不能确知．本文提出的多人多目标冲突的协商对策模型不采用效用函数，而直接采用具有冲突性质的目标空间作为协商域，在协商域内寻求一协议点作为冲突问题的解．因此，能比较好地克服由效用函数带来的上述困难．

二、数 学 描 述

1. 模型描述

设决策人 $i\in N=\{1,2,\cdots,n\}$ 的决策目标函数为 $f^i(u)=(f_1^i(u),\cdots,f_m^i(u))^T$，$u\in U$ 为决策变量，那么所有决策人的目标函数可以表示为

本文于1991年11月5日收到．
1) 本文是国家自然科学基金资助的课题．

$$F(u) = (f^1(u), \cdots, f^n(u)) = \begin{bmatrix} f_1^1(u), \cdots, f_1^n(u) \\ f_2^1(u), \cdots, f_2^n(u) \\ \vdots \qquad \vdots \\ f_m^1(u), \cdots, f_m^n(u) \end{bmatrix}. \tag{1}$$

简便起见,记 $X = F(u)$, $x_{ij} = f_i^j(u)$. 对于不同的决策量 u, X 不同，从而反映了各决策人目标值的变化. 由于对于不同的目标值,决策人的偏好不同,因此对于决策人 i, 存在隐知的多目标效用函数 v_i: $R^m \to R^1$, $v_i = v_i(f^i)$. 已有的协商对策论假定效用函数 v_i 已知,然后再对效用进行合理性分配. 由于实际问题中 v_i 难以准确描述,因此本文避开采用效用函数. 令 $B = \{X \in R^{m\times n} | X = F(u), u \in U\}$ 表示目标函数值的可行域,S, C 为 B 内任一点,其中 C 为联合决策失败时的目标值.

定义 1　如果三元组 (B, C, S) 满足下列条件:

1) $B \subseteq R^{m\times n}$ 为凸集;

2) $C \in B$, $S \in B$, $C \leqslant S$, 且存在 $X \in B$, 使得 $X > S$;

3) B 为完备集,即: 对任意 $X \in B$, 如果 $C \leqslant Y \leqslant X$, 那么 $Y \in B$.

那么称三元组 (B, C, S) 为一个多人多目标协商问题,其中 B 称为协商域, C 和 S 分别称为冲突点和参考点.

记所有满足上述条件的协商问题 (B, C, S) 的集合为 Σ, 所有协商域 B 的集合为 Σ'.

定义 2.　对于任意多人多目标协商问题 $(B, C, S) \in \Sigma$, 其一个解函数为映射 $f: \Sigma \to R^{m\times n}$, 满足条件 $f(B, C, S) \in B$. 点 $f(B, C, S)$ 称为协商问题 (B, C, S) 的解.

2. 公理系统

令 $Z(B)$ 表示协商域 B 的理想点，即所有决策人均希望达到的目标值点. $B[Y] = \{X \in B | X \geqslant Y\}$. $\Delta = \{X | X = (x_1, \cdots, x_n) \in R^{m\times n}, x_1 = \cdots = x_n\}$.

对称变换 $\pi_{ij}(X)$: 对于 $X = (x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_j, \cdots, x_n)$, $\pi_{ij}(X) = (x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_i, \cdots, x_n)$. $\pi_{ij}(B) = \{X | \exists X' \in B, X = \pi_{ij}(X')\}$.

正仿射变换 $A(X)$: 对于 $X = (x_{ij}) \in R^{m\times n}$, $A(X) = (a_{ij}x_{ij} + b_{ij})$, $a_{ij} > 0$, $i = 1, \cdots, m$; $j = 1, \cdots, n$. 记所有正仿射变换 A 的集合为 $\mathscr{A}$.

在上述符号描述的基础上,提出如下六条公理.

A_1. 协商域的相关性: 对于任意 $(B, C, S) \in \Sigma$, $f(B, C, S) = f(B[C], C, S)$.

A_2. 弱 Pareto 性: 对于任意 $(B, C, S) \in \Sigma$, $f(B, C, S) \in WPO(B) \triangleq \{X \in B | \forall X' \in R^{m\times n}, X' > X \Rightarrow X' \notin B\}$.

A_3. 仿射变换的不变性: 对于任意 $A \in \mathscr{A}$ 及 $(B, C, S) \in \Sigma$, $f(A(B), A(C), A(S)) = A(f(B, C, S))$.

A_4. 对称性: 如果对于所有 $i = 1, \cdots, n$; $j = 1, \cdots, n$, $\pi_{ij}(B) = B$, 且 $S \in \Delta$, $C \in \Delta$, 那么 $f(B, C, S) \in \Delta$.

A_5. 限制的单调性: 对于任意 (B, C, S), $(B', C, S) \in \Sigma$, 如果 $B' \subseteq B$, $B \backslash B' \subseteq B[C]$, $Z(B'[C]) = Z(B[C])$, 那么有 $f(B', C, S) \leqslant f(B, C, S)$. 如果 $f(B, C, S) \in$

B'，那么 $f(B', C, S) = f(B, C, S)$.

A_6. 冲突点的有限敏感性：对于任意 $(B,C,S),(B,C',S)\in\Sigma$，如果 $Z(B[C'])=Z(B[C])$，那么有 $f(B, C', S) = f(B, C, S)$.

公理 A_1 保证了解的合理性，即对于冲突的任意一方来说，冲突问题的解均优于冲突点；公理 A_2，A_3 及 A_4 为一般协商对策问题公理系统的基本条件；公理 A_5 为 Nash[1] 的"无关方案的独立性"公理的推广；公理 A_6 给出了冲突点对于协商解的影响关系：如果理想点不变，那么冲突点的变化不影响冲突问题的协商解.

3. 基本定理及证明

首先给出一个关于协商问题的理想点及参考点的假定.

假定 1：如果 $S(B)$，$Z(B)$ 分别表示协商问题 (B, C, S) 对于协商域的参考点和理想点，那么 $S(B),Z(B)$ 满足公理 A_3，即对于任意 $A\in\mathscr{A}$.

$$S(A(B)) = A(S(B)), \tag{2a}$$

$$Z(A(B)) = A(Z(B)). \tag{2b}$$

定理. 对于任意 $(B, C, S)\in\Sigma$，在假定 1 的情况下，存在唯一满足上述六条公理的解函数

$$f^*(B, C, S) = \max_{\lambda}\{X\in B\,|\,X = (1-\lambda)S + \lambda Z(B[C]),\ \lambda\in[0, 1]\}. \tag{3}$$

在证明此定理之前，先给出两个有关引理.

引理 1. 对于任意 $(B, C, S)\in\Sigma$，若 $Z(B[C])$，$C, S\in\Delta$，则存在 $(B',C,S)\in\Sigma$，使得 $B'\subseteq B$，$\pi_{ij}(B') = B'(i,j = 1,\cdots,n)$，$f^*(B, C, S) = f^*(B', C, S)$.

证明. 因为 $C, S, Z(B[C])\in\Delta$，故 $f^*(B, C, S)\in\Delta$，因此，对 $i,j = 1,\cdots,n$，$\pi_{ij}(f^*(B, C, S)) = f^*(B, C, S)$，且 $f^*(\pi_{ij}(B),C, S) = f^*(B, C, S)\in\pi_{ij}(B)$.

构造 $B' = \bigcap\limits_{\substack{i,j=1,\cdots,n\\ i\neq j}} \pi_{ij}(B)\cap B$，显然，$\pi_{ij}(B') = B'$，且 $f^*(B, C, S)\in B'$. 于是，

$$f^*(B',C,S) = f^*\Big(\bigcap_{i,j=1,\cdots,n} \pi_{ij}(B),C,S\Big) = f^*(B, C, S).$$

证毕

引理 2. 对于 $(B,C,S)\in\Sigma$，若 $Z(B[C]), C,S$ 不共线，则必存在 $(B', C', S)\in\Sigma$，使得 $B\subseteq B'$，$Z(B') = Z(B)$，$WPO(B') = WPO(B)$，且 S 在 C' 与 $Z(B[C])$ 的连线上.

证明. 令 $B'' = B\cup D'$，$D' = \{X\in R^{m\times n}\,|\,X = (1-\lambda)S + \lambda\cdot Z(B[C]),\lambda\geqslant 1\}$. 显然，对于任意 $X\in D'$，$Y\in B$，有 $X\leqslant Y$.

令 B' 为 B'' 的凸包，则必有 $B\subseteq B'$，且 $Z(B') = Z(B),WPO(B') = WPO(B)$. 任取 $C'\in D'$，S 均在 C' 与 $Z(B[C])$ 的连线上. 证毕

定理证明. 显然，$f^*(B, C, S)$ 满足公理 A_1—A_6，下面分两种情况证明唯一性.

1) $C, S, Z(B[C])$ 共线.

设 $C, S, Z(B[C])$ 在线 L 上，那么 $f^*(B, C, S)\in L$. 变换 $X' = A(X)$，

$$x'_{ij} = \frac{x_{ij} - c_{ij}}{z_{ij}(B) - c_{ij}},$$

则必有 $A(C)$，$A(S)$，$A(Z(B))\in A(L)\subseteq\Delta$.

由引理 1 知，存在 $(B', A(C), A(S))\in\Sigma$，且 $B'\subset A(B)$，对 $i,j=1,\cdots,n,\pi_{ij}(B)=B$.
由 A_4 知，$f(B', A(C), A(S))\in\Delta$;
由 A_2 知，$f(B', A(C), A(S))\in WPO(B')$,
因此，$f(B', A(C), A(S))=f^*(B', A(C), A(S))$.
由 A_5 知，$f(A(B), A(C), A(S))=f(B', A(C), A(S))=f^*(B', A(C), A(S))$;
由引理 1，$f(A(B),A(C),A(S))=f^*(B',A(C),A(S))=f^*(A(B),A(C),A(S))$;
由 A_3，$f(B, C, S)=f^*(B, C, S)$.

2) $C, S, Z(B[C])$ 不共线.

由引理 2 知，存在 $(B', C', S)\in\Sigma$，使 $C', S, Z(B[C])$ 共线；由上述证明知，$f(B', C', S)=f^*(B', C', S)$;

由 A_1 知：$f(B'[C'], C', S)=f(B', C', S)$;
由 A_6 知：$f(B', C, S)=f(B', C', S)$;
由 A_5 知：$f(B', C, S)=f(B, C, S)$,
而 $f^*(B', C', S)=f^*(B, C, S)$，因此，$f(B, C, S)=f^*(B, C, S)$.　　证毕

三、模型的应用

1. 理想点及参考点的确定

假定 1 要求协商问题 (B, C, S) 的理想点和参考点满足"仿射变换的不变性"公理，因此，理想点和参考点不能随意确定. 下面提出一种方法.

设决策人 i 对于目标向量 $\boldsymbol{f}^i(\boldsymbol{u})=(f_1^i(\boldsymbol{u}),\cdots,f_m^i(\boldsymbol{u}))^T$ 在协商域 B 内的最低愿望值为 $\underline{\boldsymbol{f}}^i=(\underline{f}_1^i,\cdots,\underline{f}_m^i)^T$，显然，$\underline{\boldsymbol{f}}^i$ 的值与协商域 B 有关，简记为

$$\underline{\boldsymbol{x}}_i(B)=\underline{\boldsymbol{f}}^i=(\underline{f}_1^i,\cdots,\underline{f}_m^i)^T.\quad i=1,2,\cdots,n. \tag{4}$$

在一般情况下，决策人的最低愿望值满足"仿射变换的不变性"公理[3]，即：对于任意 $A\in\mathscr{A}$，有

$$\underline{\boldsymbol{x}}_i(A(B))=A(\underline{\boldsymbol{x}}_i(B)).\quad i=1,\cdots,n \tag{5}$$

于是对于冲突协商问题 (B, C, S)，点 $X=(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n)$ 称为在协商域 B 内的参考点，记为

$$S(B)=(\underline{\boldsymbol{x}}_1,\underline{\boldsymbol{x}}_2,\cdots,\underline{\boldsymbol{x}}_n). \tag{6}$$

由式(5)可以推出

$$S(A(B))=A(S(B)).\ \text{对所有}\ A\in\mathscr{A}. \tag{7}$$

按定义 1，要求 $S(B)\in B$. 如果 $S(B)\notin B$，冲突各方应该调整最低愿望值. 确定和调整冲突各方的最低愿望值的方法较多，这里不予以讨论. 另一方面，设决策人 i 对于目标向量的单方理想值为 $\bar{\boldsymbol{f}}^i=(\bar{f}_1^i,\cdots,\bar{f}_m^i)^T(i=1,\cdots,n)$，其中

$$\bar{f}_j^i=\max_{\boldsymbol{u}\in U} f_j^i(\boldsymbol{u}),\ i=1,\cdots,n;j=1,\cdots,m \tag{8}$$

简记为

$$\bar{\boldsymbol{x}}_i(B)=\bar{\boldsymbol{f}}^i=(\bar{f}_1^i,\cdots,\bar{f}_m^i)^T. \tag{9}$$

根据满意决策方法[5],决策人 i 的单方最优解可以表示为

$$x_i^* = \max_{0\leqslant\lambda\leqslant 1}\{x_i \in R^m \mid X \in B, x_i = (1-\lambda)x_i + \lambda x_i\}. \tag{10}$$

因此,决策人可以通过调整最低愿望水平来获得各自满意的单方最优解 x_i^*, 所以,x_i^* 为决策人 i 最希望达到的目标值.

令 x_i^* 为协商问题 (B, C, S) 理想点的第 i 个分量, 令 $X^* = (x_1^*, \cdots, x_n^*)$ 为理想点,记为

$$Z(B) = X^* = (x_1^*, \cdots, x_n^*). \tag{11}$$

由式(5),(9)和(10)可以推论出

$$Z(A(B)) = A(Z(B)). \tag{12}$$

即由式(11)确定的理想点满足"线性变换的不变性"公理.

对于任意 $(B, C, S) \in \Sigma$, 若 $Z(B) \in B$, 则理想点可以实现, 即冲突各方的单方最优解及单方最希望达到的目标值均可以实现,因而各方之间不产生冲突. 所以,对于多人冲突问题 $Z(B) \notin B$.

2. 解函数的性质以及交互式求解过程

从解函数 $f^*(B, C, S)$ 的形式可以直接推论出 $f^*(B, C, S)$ 具有以下性质.

性质 1. 对于任意 $(B, C, S) \in \Sigma$, $f^*(B, C, S) \geqslant S$.

性质 1 说明了解函数所确定的协商解对于所有冲突各方来说,保证不会劣于参考点,即协商解确定的目标值不低于冲突各方的最低愿望值.

性质 2. 对于任意 $(B, C, S) \in \Sigma$, 如果其参考点序列 $\{S_n(B)\}$ 满足 $S_n(B) \to S(B)$, 且 $S_n(B) \in B$, 那么 $f^*(B, C, S_n(B)) \to f^*(B, C, S)$.

性质 3. 对于 Σ 中的序列 $\{(B_n, C, S)\}$, 若 $B_n \to B$, 且 $(B, C, S) \in \Sigma$, 那么 $f^*(B_n, C, S) \to f^*(B, C, S)$.

性质 2,3 说明了在参考点列以及协商域序列收敛时, 其对应的协商问题的解的收敛性.

性质 4. (多次协商的不变性)[3]. 对于任意 $(B, C, S), (B', C, S) \in \Sigma$, 如果 $B' \subseteq B$, $B \backslash B' \subseteq B[C]$, $Z(B'[C]) = Z(B[C])$, $f^*(B', C, S) \leqslant f^*(B, C, S)$, 那么 $f^*(B, C, S) = f^*(B, C, f^*(B', C, S))$.

对于协商解 $f^*(B, C, S)$ 影响较大的是协商域 B 的边界. 如果由于某些原因,协商域 B 的边界不确定时,一次性联合决策就不能进行,在这种情况下, 性质 4 提供了另外一种方法,先确定一协商域 $B' \subset B$,求得初始协商解 $f^*(B', C, S)$, 待 B 的边界确定后,以 $f^*(B', C, S)$ 为参考点再求最后协商决策点 $f^*(B, C, S)$. 性质 4 说明了多次协商的结果具有不变性.

应用此模型求解实际多人决策问题时,可能会遇到两种情况,一是处于冲突的各方不能一次性确定各自的最低愿望值, 而必须经过冲突人之间的多次协商以及考察最低愿望值对于协商解的影响后才能确定; 二是由于有些目标的目标值的不确定性致使协商域不确定. 在这两种情况下, 冲突问题不能一次性求解, 而必须多次与冲突各方交互. 性质 2, 3 和 4 说明了多次交互式求解过程的收敛性.

求解过程包括多个交互回合,每一个回合包括下面三个步骤:

Step1. 冲突各方 $i(i=1,\cdots,n)$ 提出各自的最低愿望值 x_i，形成协商问题的参考点 $S(B)$；求解下列优化问题：

$$x_i^* = \max_{0\leqslant\lambda\leqslant 1}\{x_i\in R^m \mid X\in B, x_i=(1-\lambda)x_i+\lambda\bar{x}_i\},$$

形成协商问题的理想点 $Z(B)$，$Z(B)=(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*)$.

Step2. 求协商解 $f^*(B,C,S)$

$$f^*(B,C,S)=\max_{0\leqslant\lambda\leqslant 1}\{X\in B \mid X=(1-\lambda)S+\lambda Z(B)\}.$$

Step3. 判断冲突各方是否需要修改目标的最低愿望值，若是则修改最低愿望值，然后回到 Step1；否则，考察协商域是否扩张或变化，若是则取新的协商域作为当前协商域，返回到 Step1. 否则，协商过程结束，取 $f^*(B,C,S)$ 作为协商解.

四、结　论

具有冲突性质的多人多目标决策(对策)问题是现实中一类常见的问题，国内外对于这类问题的研究越来越多. 协商对策模型能比较好地分析单目标冲突问题，或是采用多属性效用函数将多目标冲突问题转化为单目标冲突问题进行分析，但对直接分析多人多目标冲突问题研究不多. 本文将多目标决策方法与协商对策模型相结合，提出了求解多人多目标冲突决策的模型. 该模型直接将公理系统及解定义在目标空间中而不是效用空间，因而能克服因采用效用函数而引起的困难. 利用此模型，冲突各方可以通过调整各自的目标最低愿望水平来获得对自己相对满意的协商解.

参　考　文　献

[1] Nash, J. F., The Bargaining Problems, *Econometr.ca,* **18**(1950), 155—162.

[2] Kalai, E. and Smorodinsky M., Other Solutions to the Nash's Bargaining Problems, *Econometrica,* **43**(1975), 513—518.

[3] Gupta, S. and Livne Z. A., Resolving a Conflict Situation with a Reference Outcome: An Axiomatic Model, *Management Science,* **34**(1988), 1303—1314.

[4] Kulikowski, R. and Stefanski, J., Decision Making Models for Management and Manufacturing, Omnitech Press, Warsaw, 1990, 53—64.

[5] Wierzbicki, A., A Mathematical Basis for Satisficing Decision Making, *Mathematical Modeling,* **3**(1982), 391—405.

A MODEL FOR MULTI-PERSON MULTI-CRITERIA CONFLICT DECISION

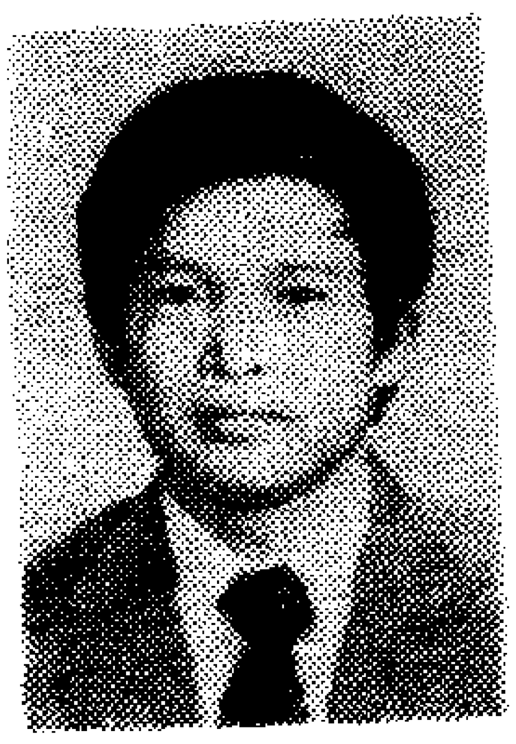
ZHU SHIJING CHEN TING

(*Huazhong University of Science and Technology, Wuhan,* 430074)

ABSTRACT

Multi-person multi-criteria conflict decision making problem exists, extensively in reality. This article studies this kind of problem and a model for multi-person conflict decision with multicriteria is presented. In the article, mathematical formulation of the model is given and a set of axioms are established. Then, a unique solution-reference solution is proved satisfying the set of axioms. Furthermore, the properties of the reference solution and reference point are analyzed. Finally, the use of the model to solve multi-person multi-criteria decision making problems is demonstrated.

Key words: Conflict decision; bargaining game; solution function; reference point; satisfying decision.



祝世京 1987年毕业于华中理工大学自动控制工程系并获学士学位，1990年获该校系统工程研究所硕士学位，目前正攻读博士学位。主要从事多人多目标决策理论与方法以及决策支持系统的研究。

陈 珽 见本刊 Vol. 19(1993), No. 2.