第19卷 第3期 1993年5月
自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA
Vol. 19, No. 3 May, 1993

短 文

严格正实引理和严格界实引理的一般描述——非最小实现的情形[1)]

杨成梧 史国军 邹 云
(南京理工大学八系,南京 210014)

摘 要

本文对于非最小实现的情形研究了严格正实引理和严格界实引理. 采用 H_∞ 范数给出了二者的一般描述. 其结果可以使人们更清楚地了解严格正实系统和严格界实系统的结构.

关键词: 正实,界实, H_∞ 范数,Riccati 方程.

一、引 言

正实性和界实性是系统理论中非常重要的两个概念. 然而, 目前关于它们的各种描述,几乎都是在最小实现的假设下得到的[1,2],这就导致了其应用的局限性. 本文针对非最小实现情形给出了严格正实引理和严格界实引理的一般描述. 这将有助于进一步拓宽两个引理的应用范围.

二、主 要 结 果

首先给出非最小实现情形下的严格正实引理描述.

定理 1. 令 $Z(s)$ 为 $m\times m$ 阶实真有理矩阵,$[A,B,C,D]$ 为 $Z(s)$ 的一个非最小实现,记 $R=D^T+D$,则下列条件等价:

i) A 稳定,且

$$Z^*(s)+Z(s)>0,\ s\in C^+\triangleq\{\lambda:\ \mathrm{Re}\lambda\geqslant 0\},$$ “$*$”表示共轭转置.

ii) $R>0$, $A-BR^{-1}C$ 稳定,且

$$\|R^{-\frac{1}{2}}C(sI-A+BR^{-1}C)^{-1}BR^{-\frac{1}{2}}\|_\infty<1. \tag{1}$$

iii) 对于充分小的 $\delta>0$,存在实矩阵 X,V 和 W,且 X 正定对称,使得

$$A^TX+XA=-V^TV-\delta I, \tag{2a}$$

$$B^TX+W^TV=C, \tag{2b}$$

$$R=W^TW>0. \tag{2c}$$

iv) A 稳定,且存在实矩阵 $\tilde{X}$, $\tilde{V}$ 和 $\tilde{W}$,且 $\tilde{X}$ 对称半正定,使得

本文于1991年2月1日收到.
1) 南京理工大学发展基金资助.

$$A^T\widetilde{X} + \widetilde{X}A = -\widetilde{V}^T\widetilde{V}, \tag{3a}$$

$$B^T\widetilde{X} + \widetilde{W}^T\widetilde{V} = C, \tag{3b}$$

$$R = \widetilde{W}^T\widetilde{W} > 0. \tag{3c}$$

v) $A - BR^{-1}C$ 稳定,且

$$H \triangleq \begin{bmatrix} A - BR^{-1}C & BR^{-1}B^T \\ -C^TR^{-1}C & -A^T + C^TR^{-1}B^T \end{bmatrix}$$ 在虚轴上没有特征值.

证明. i) ⇒ ii),假定条件 i) 成立,即传递函数阵 $Z(s)$ 是严格正定的.则有 $R = D^T + D > 0$;为方便起见,令 $Z_0(s) = C(sI - A)^{-1}B$,则有

$$R + Z_0^*(s) + Z_0(s) > 0. \tag{4}$$

以下证明 $A - BR^{-1}C$ 是稳定的.由文献[4]中分解定理 5.18 可知,存在非奇异矩阵 P 使得

$$A = P^{-1}\begin{bmatrix} \bar{A}_{c\bar{o}} & \bar{A}_{12} & \bar{A}_{13} \\ 0 & \bar{A}_{co} & \bar{A}_{23} \\ 0 & 0 & \bar{A}_{\bar{c}} \end{bmatrix}P, \quad B = P^{-1}\begin{bmatrix} \bar{B}_{c\bar{o}} \\ \bar{B}_{co} \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C = [\,0 \quad \bar{C}_{co} \quad \bar{C}_{\bar{c}}\,]P,$$

其中 $[\bar{A}_{co} \quad \bar{B}_{co} \quad \bar{C}_{co} \quad D]$ 为 $Z(s)$ 的最小实现.于是

$$A - BR^{-1}C = P^{-1}\begin{bmatrix} \bar{A}_{c\bar{o}} & ? & ? \\ 0 & \bar{A}_{co} - \bar{B}_{co}R^{-1}\bar{C}_{co} & ? \\ 0 & 0 & \bar{A}_{\bar{c}} \end{bmatrix}P. \tag{5}$$

其中"?"表示与问题无关的矩阵块.由文献[1]中定理 5.4.1 知 $\bar{A}_{co} - \bar{B}_{co}R^{-1}\bar{C}_{co}$ 稳定.由 A 稳定知 $\bar{A}_{c\bar{o}}$ 和 $\bar{A}_{\bar{c}}$ 也稳定.于是由式(5)知 A-$BR^{-1}C$ 稳定.利用矩阵逆引理[3]不难证明

$$R + Z_0^*(s) + Z_0(s) > 0. \tag{6}$$

当且仅当 $R - B^T(-sI - A^T + C^TR^{-1}B^T)^{-1}C^TR^{-1}C(sI - A + BR^{-1}C)^{-1}B > 0$,

i亦即 $$\|R^{-\frac{1}{2}}C(sI - A + BR^{-1}C)^{-1}BR^{-\frac{1}{2}}\|_\infty < 1.$$

i) ⇒ iii) 假定 ii) 成立.由文献[7]中定理 2.2 知,对于充分小的 $\delta > 0$,存在对称阵 $X > 0$,使得

$$(A - BR^{-1}C)^TX + X(A - BR^{-1}C) + XBR^{-1}B^TX + C^TR^{-1}C + \delta I = 0, \tag{7}$$

则选取适当的 W, V 可使 iii) 成立.

iii) ⇒ iv) 假设条件 iii) 成立,则由文献[7]中定理 2.2 和定理 A.3 知,Riccati 方程

$$(A - BR^{-1}C)^T\hat{X} + \hat{X}(A - BR^{-1}C) + XBR^{-1}B^TX + C^TR^{-1}C = 0 \tag{8}$$

有强解 $\hat{X} \geqslant 0$.于是可选择适当的 $\hat{W}$ 和 $\hat{V}$ 使 iv) 成立.

iv) ⇒ i) 假定条件 iv) 成立.则令

$$\hat{W} = R^{\frac{1}{2}}, \ \hat{V} = -R^{-\frac{1}{2}}(B^TX - C),$$

可知 Riccati 方程

$$(A - BR^{-1}C)^T\hat{X} + \hat{X}(A - BR^{-1}C) + \hat{X}BR^{-1}B^T\hat{X} + C^TR^{-1}C = 0 \tag{9}$$

有对称解 $\hat{X} \geqslant 0$.由文献[5]中引理 3 知,对于充分小的 $\delta > 0$,Riccati 方程

$$(A - BR^{-1}C)^TP + P(A - BR^{-1}C) + PBR^{-1}B^TP + C^TR^{-1}C + \delta I = 0 \tag{10}$$

存在对称解 $P \geqslant \hat{X} \geqslant 0$. 因为 A 稳定，所以 $P > 0$，从而 $A - BR^{-1}C$ 稳定. 由文献[7]中定理 2.2 知

$$\|R^{-\frac{1}{2}}C(sI - A + BR^{-1}C)^{-1}BR^{-\frac{1}{2}}\|_\infty < 1.$$

于是由结论(6)知
$$R + Z_0^*(s) + Z_0(s) > 0,$$
即
$$Z^*(s) + Z(s) > 0.$$

ii)$\Longleftrightarrow$v)，可直接由 Riccati 方程的性质得证.

严格界实引理的非最小实现情形文献[6,7]中已作了一些讨论，其结果见文献[7]中定理 2.2. 用与定理1一致(不同于文献[6,7])的方式将其描述如下.

定理 2. 令 $S(s)$ 为实有理矩阵，$S(\infty) < \infty$. 令 $[A_s, B_s, C_s, D_s]$ 为 $S(s)$ 的一个非最小实现. 记 $R_0 = I - D^TD$，则下列条件等价：

i) A_s 稳定，$I - S^*(s)S(s) > 0$ 在右半闭平面；

ii) A_s 稳定，$\|S(s)\|_\infty < 1$；

iii) 对于充分小的 $\delta_s > 0$，存在实矩阵 X_s，V_s，和 W_s，且 X_s 对称正定，使得

$$A_s^TX_s + X_sA_s = -C_s^TC_s - V_s^TV_s - \delta_sI,$$
$$B_s^TX_s + W_s^TV_s = -D_s^TC_s,$$
$$R_0 = W_s^TW_s > 0;$$

iv) A_s 稳定，存在实矩阵 $\hat{X}_s$，$\hat{V}_s$ 和 $\hat{W}_s$，且 $\hat{X}_s$ 对称半正定，使得

$$A_s^T\hat{X}_s + \hat{X}_sA_s = -C_s^TC_s - V_s^TV_s,$$
$$B_s^TX_s + \hat{W}_s^T\hat{V}_s = -D_s^TC_s,\quad R_0 = \hat{W}_s\hat{W}_s > 0.$$

三、举　　例

例. 考察系统

$$\Sigma: \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t) + Du(t), \end{cases}$$

其中 $A = -I$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C = (1 \quad 0)$, $D = 0.5$. 显然系统 Σ 为非最小实现情形，其传递函数 $Z(s) = (s+1)^{-1} + 1$ 严格正实. 显然它同时满足定理 1 中 i)—v)

i) A 稳定，$Z^*(s) + Z(s) = \dfrac{2\mathrm{Re}s + 2}{|s+1|^2} > 0$，$s \in C^+$；

ii) $R = 2 > 0$，$A - BR^{-1}C = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ 稳定且

$$\|R^{-\frac{1}{2}}C(sI - A + BR^{-1}C)^{-1}BR^{-\frac{1}{2}}\|_\infty = \left\|\frac{1}{s+2}\right\|_\infty = \frac{1}{2} < 1;$$

iii) 令 $W = 1$，$V = -(1 \quad 0)(X, -I)$，则方程 (2b)，(2c) 自动满足，且令 $\delta = 2$，$X = I$，则(2a) 成立；

iv) W，V 同 iii)，且 $X = \begin{bmatrix} 2 \pm \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$，则易验证 (3a)—(3b) 均成立；

v) 注意到

$$H = \left[\begin{array}{cc|cc} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right],$$

$\det(j\omega I - H) = (\omega^2 + 1)(\omega^2 + 3) \neq 0, \ \omega \in R.$

注记 1. 定理1在最小实现的情形下也是正确的，特别是定理1中 i),v) 构成了文[1]中严格正实引理(定理5.4.1[1])的推广.

注记 2. 定理1显然为今后某些类似于 Petersen[7]在 H_∞ 理论中遇到的情形，提供了一个有力的辅助工具. 同时，定理2还进一步推广了 Petersen[7] 的结论.

参 考 文 献

[1] Anderson, B. D. O., and Vongpanitlerd, *Network Analysis and Synthesis,* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1973.

[2] Wen, J. T., Time Domain ano Frequency Domain Conditions for Strict Positive Realness, *IEEE Trans. Automat. Control,* **33**(1988), (1) 988—992.

[3] Kailath, M., Linear Systems, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1980.

[4] Chen, C. J., Linear Systems Theory and Design, Holt, Rinehart and Winston, 1984.

[5] Derse, I. and Noldus, I., Design of Linear Feedback Laws for Bilinear Systems, *Int. J. Control,* **31**(1980), (2), 219—237.

[6] Sampei, M., Mita, T. and Chida, V., A Direct Approach to H_∞ Control Problems Using Bounded Real Lemma, Proc. IEEE Conf. Decision and Control. Tampa (1989), 1494—1499.

[7] Petersen, I. R., Anderson, B. D. O. and Jonckheere, A First Principles Solutions to The Non-singular H_∞ Control Problems, *Internat. J. Robust and Nonlinear Control,* to appear.

THE GENERAL DESCRIPTIONS ON THE STRICT POSITIVE REAL AND STRICT BOUNDED REAL LEMMAS——THE NON-MINIMUM REALIZATION CASE

YANG CHENGWU SHI GUOJUN AND ZOU YUN

(Nanjing University of Technology Nanjing 210014)

Abstract

In this paper, the strict positive real and strict bounded real lemmas in the case of non-minimum realization are discussed, and the general descriptions for these lemmas are derived via H_∞ norm. These descriptions can give insight into the structure of the strict positive systems and the strict bounded real systems.

Key words: Positive realness; bounded realness; H_∞ norm; Riccati equation.