第19卷 第3期　　自 动 化 学 报　　Vol. 19, No. 3
1993年5月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　May, 1993

短 文

奇异摄动系统的极限解[1)]

邹 云　杨成梧
（南京理工大学八系，南京 210014）

摘　要

本文在前人工作[1—4]的基础上，利用广义函数理论[5]讨论了一般形式下的奇异摄动系统 $E(\varepsilon)\dot{x}=A(\varepsilon)x+B(\varepsilon)u$ 在 $\varepsilon\to0^+$ 时的极限解问题，得出了这一极限解存在的充要条件.

关键词: 奇异摄动系统，广义系统，线性系统，极限解.

一、引　言

考虑到如下形式的摄动系统：

$$E(\varepsilon)\dot{x}(t)=A(\varepsilon)x(t)+B(\varepsilon)u(t),\quad t\geqslant0 \tag{1}$$

初始条件为 $x_0(\varepsilon)$. 其中 $E(\varepsilon)$, $A(\varepsilon)\in R^{n\times n}$; $B(\varepsilon)\in R^{n\times m}$,且

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}[E(\varepsilon),\ A(\varepsilon),\ B(\varepsilon),\ x_0(\varepsilon)]=[E,A,B,x_0], \tag{2}$$

$E(\varepsilon)$非奇异,但E奇异,系统(1)的极限系统为

$$E\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t),\ \text{初值}\ x_0,\ t\geqslant0 \tag{3}$$

是一典型的广义系统,其解存在唯一的充要条件为

$$\det(sE-A)\not\equiv0. \tag{4}$$

奇异摄动系统的极限解问题起源于关于广义系统（3）的广义状态解的研究[3]. 现有结果[1,3]均表明系统(3)的广义状态解正是摄动系统(1)的极限解,然而奇异摄动系统极限解存在的充要条件一直未得到解决. 本文则在文献[1—4]的基础上得到了进一步的结果.

二、符号与引理

本文所用基本符号为：基本函数空间 K,广义函数空间 K' 以及 r 阶分段光滑函数空间 C^r_{p+} 等均与文献[10]中一致,限于篇幅,这里不再详加说明.

定义. 称 $\phi(x_0)\in K'$ 为摄动系统(1)的极限解，系指当 $\varepsilon\to0^+$ 时系统(1)的状态解 $x(\varepsilon,x_0(\varepsilon))$ 按 K' 中拓扑收敛于 $\phi(x_0)$.

引理 设 $\lambda(\varepsilon)$ 为 $E^{-1}(\varepsilon)$ 具有最大实部的特征值,且令 $\lambda_\varepsilon=\mathrm{Re}\lambda(\varepsilon)$,则对 $\forall t\geqslant0$ 存在常数 $\alpha>0$ 和 $\beta>0$,使得

本文于1991年5月13日收到.
1) 国家自然科学基金青年基金资助项目.

$$\|\exp\{E^{-1}(\varepsilon)t\}\|_2 < \alpha e^{n\lambda_\varepsilon t}, \tag{5}$$

$$\|\exp\{E^{-1}(\varepsilon)t\}\|_* \geqslant \beta e^{\lambda_\varepsilon t}, \tag{6}$$

其中 $\|\cdot\|_2$ 表示矩阵的 2-范数，而 $\|A\|_* \triangleq \max\{|a_{ij}|: a_{ij}$ 为 A 的各分量$\}$. 显然 $\|\cdot\|_*$ 也是一种矩阵范数，尽管它不是相容的[7].

证明. 限于篇幅略.

三、主要结果

显然，这里可假定

$$A(\varepsilon) = A = I, \tag{7}$$

且 E 具有 Jordan 标准形. 事实上，由假定知必有实数 α_0 和 $\{\alpha(\varepsilon)\}$ 使得 $(\alpha_0 E + A)$ 及 $(\alpha(\varepsilon)E(\varepsilon) + A(\varepsilon))$ 非奇异，且 $\alpha(\varepsilon) \to \alpha_0(\varepsilon \to 0^+)$. 显然对系统(1)和(3)作可逆变换

$$\boldsymbol{x} = e^{-\alpha_0 t}\boldsymbol{z} \text{ 和 } \boldsymbol{x} = e^{-\alpha(\varepsilon)t}\boldsymbol{z}, \tag{8}$$

则满足所求，且类似于关系式(2)的关系仍成立，从而不失一般性. 可将式(1),(3)写成便于讨论的广义函数微分方程[4]

$$E(\varepsilon)\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}_+ + B(\varepsilon)\boldsymbol{u}_+ + E(\varepsilon)\boldsymbol{x}_0(\varepsilon)\delta, \tag{9}$$

$$\begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}_{1+} \\ \dot{\boldsymbol{x}}_{2+} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_{1+} \\ \boldsymbol{x}_{2+} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u_t + \begin{bmatrix} J\boldsymbol{x}_{01} \\ N\boldsymbol{x}_{02} \end{bmatrix}\delta, \tag{10}$$

其中 δ 表示单位脉冲函数，N 为 q 阶幂零阵，而 J 可逆. 将 $E(\varepsilon)$ 相应地划分为四块 $(E_{ij}(\varepsilon))_{2\times 2}$，则由式(2)知

$$E_{11}(\varepsilon) \to J,\ E_{22}(\varepsilon) \to N,\ E_{ij}(\varepsilon) \to 0,\ (i \neq j) \tag{11}$$

设 $u \in C_p^{q-1}$，则系统(10)的广义状态解为[4]

$$\phi_+(\boldsymbol{x}_0) = \begin{bmatrix} \phi_1(\boldsymbol{x}_0) \\ \phi_2(\boldsymbol{x}_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{J^{-1}t}\boldsymbol{x}_{01} + \int_0^t e^{J^{-1}(t-\tau)}J^{-1}B_1\boldsymbol{u}_+ d\tau \\ -\sum_{i=1}^{q-1} N^i\delta^{i-1}\boldsymbol{x}_{02} - \sum_{i=0}^{q-1} N^i B_2 \boldsymbol{u}_+^{(i)} \end{bmatrix}, \tag{12}$$

式中 δ^i 表示 δ 的 i 阶导数. 显然系统(9)的解为

$$\boldsymbol{x}_+(\varepsilon,\ \boldsymbol{x}_0(\varepsilon)) = e^{E^{-1}(\varepsilon)t}g(t) + \boldsymbol{c}, \tag{13}$$

其中

$$g(t) = \left[\int_0^t e^{-E^{-1}(\varepsilon)\tau}E^{-1}(\varepsilon)B(\varepsilon)u_+ d\tau + \boldsymbol{x}_0(\varepsilon)\right]\theta(t), \tag{14}$$

这里 $\theta(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geqslant 1 \end{cases}$. 有了上述准备，即可给出本文主要结论如下:

定理. 当且仅当存在常数 M_0 和 $\varepsilon_0 > 0$，使得对一切 $\varepsilon_0 > \varepsilon > 0$ 有

$$\sigma(E^{-1}(\varepsilon)) \subset \{z:\ \mathrm{Re}\ z \leqslant M_0\}. \tag{15}$$

或等价地，上节引理所定义的 $\lambda_\varepsilon \leqslant M_0$ 时，系统(9)的状态解 $\boldsymbol{x}_+(\varepsilon,\ \boldsymbol{x}(\varepsilon))$ 关于任意的 $\boldsymbol{x}_0(\varepsilon)$, $\boldsymbol{x}_0 \in R^n$, $(\boldsymbol{x}_0(\varepsilon) \to \boldsymbol{x}_0)$，和 $u_+ \in C_{p+}^{q-1}$ 在 K' 中收敛，且收敛于 $\phi_+(\boldsymbol{x}_0)$，亦即摄动

系统(9)有唯一极限解.

证明. 仅当,若式(15)不成立,则必存在一列 $\{\varepsilon_k\}$, $\varepsilon_k>0$, $\varepsilon_k\to 0^+$,使得

$$\lambda_k=\lambda_{\varepsilon_k}\to+\infty,\ (k\to\infty) \tag{16}$$

此时若取 $\varphi_0\in K$ 满足

$$\varphi_0(t)=\begin{cases}1, & t\in(2,3)\\ 0, & t<1 \text{ 或 } t\geqslant 4\end{cases}$$

且 $0\leqslant\varphi_0(t)\leqslant 1$, $t\in(1,2)$ 或 $(3,4)$. 由文献[5]可知这样的 $\varphi_0\in K$ 总是存在的. 令 $\boldsymbol{u}_+=0$,则由式(13),(14)知:

$$(\boldsymbol{x}_+(\varepsilon_k,\ \boldsymbol{x}_0(\varepsilon)),\ \varphi_0)=\int_1^4\exp\{E_kt\}x_0(\varepsilon_k)\varphi_0(t)\mathrm{d}t, \tag{17}$$

其中 $E_k=E^{-1}(\varepsilon_k)$,由式(6)知 $\exp\{E_kt\}$ 中必有一分量子序列无妨可设为 $\{e_{11}(k,\ t)\}$ 满足

$$|e_{11}(k,\ t)|\geqslant\beta e^{\lambda_k},\ t\in[1,\ 4], \tag{18}$$

则显然由 $e_{11}(k,\ t)$ 关于 t 的连续性和(16)式就可将(18)式改写成

$$e_{11}(k,\ t)\geqslant\beta e^{\lambda_k}\to+\infty,\ t\in[1,\ 4] \tag{19}$$

而不失一般性. 结合(17)及(19)式并取 $\boldsymbol{x}_0(\varepsilon_k)=(1,0,\cdots,0)^T$,则可得

$$\begin{aligned}\|(x_+(\varepsilon_k,\ x_0),\ \varphi_0)\|&\geqslant\left|\int_1^4 e_{11}(k,\ t)\varphi_0(t)\mathrm{d}t\right|\\ &\geqslant\beta\int_2^3 e^{\lambda_k}\mathrm{d}t\to\infty.\end{aligned} \tag{20}$$

由此知, $\boldsymbol{x}_+(\varepsilon_k,\ \boldsymbol{x}_0(\varepsilon_k))$ 此时在 K' 中必不收敛. 即证得定理的"仅当"部分.

当: 若(15)式成立,则由(5)式知

$$\|\exp\{E^{-1}(\varepsilon)t\}\|_2<\alpha e^{Mt}, \tag{21}$$

其中 $M=nM_0$,由式(13),(14)以及归纳法知,对 $\forall\varphi\in K$,有

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{x}_+(\varepsilon,\ \boldsymbol{x}_0(\varepsilon)),\ \varphi)&=\int_0^\infty\exp\{E^{-1}(\varepsilon)t\}g(t)\varphi(t)\mathrm{d}t\\ &=\sum_{k=1}^m(-1)^kE^k(\varepsilon)\varphi^{(k-1)}(0)+\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^{k+1}E^k(\varepsilon)(B(\varepsilon)\boldsymbol{u}_+,\ \varphi^{(k)})\\ &\quad+(-1)^mE^m(\varepsilon)(\boldsymbol{x}_+(\varepsilon,\ \boldsymbol{x}_0(\varepsilon)),\ \varphi^{(m)}).\end{aligned} \tag{22}$$

取 $m=q+1$,则由式(11)知

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}E^k(\varepsilon)=\begin{cases}\mathrm{diag}\{J^k,\ N^k\}, & k<m-1\\ \mathrm{diag}\{J^k,\ 0\}, & k\geqslant m-1\end{cases} \tag{23}$$

另一方面由式(21)知,只要 $\varepsilon_0>0$ 充分小,则对一切 $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ 有

$$\begin{aligned}\|E(\varepsilon)(\boldsymbol{x}_+(\varepsilon,\ \boldsymbol{x}_0(\varepsilon)),\ \varphi^{(m)})\|_2&\leqslant\int_0^b\int_0^t\alpha(\exp\{M(t-\tau)\}\\ &\quad+\exp\{Mt\})M_1\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t\triangleq\widetilde{M}<\infty,\end{aligned} \tag{24}$$

式中 $M_1=\max\limits_{t\in[0,b]}\{(\|\boldsymbol{u}_+(t)\|_2+\|\boldsymbol{x}_0\|_2+1)\max\limits_{t\in[0,b]}\|\varphi_{(m)}(t)\|_2(\|B\|_2+1)\}$, 而 φ 的支集为 $\mathrm{supp}\varphi\subset(a,\ b)$,(无妨设 $b>0$).

注意. 式中用到了 $\|\cdot\|_2$ 的相容性及 $B(\varepsilon)\boldsymbol{x}_0(\varepsilon)$ 在 $B(0)=B$ 及 $\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{x}(0)$ 处

的连续性，显然只须 $\varepsilon_0>0$，并充分小，就有 $\|B_2(\varepsilon)\|_2\leqslant\|B\|_2$，$\|x_{02}(\varepsilon)\|\leqslant\|x_0\|+1$. 从而由式(22)—(24)知，若将式(22)按(12)式相应地分块，且令

$$x_+(\varepsilon,\ x_0(\varepsilon))=\begin{bmatrix}x_{1+}(\varepsilon,\ x_{01}(\varepsilon))\\ x_{2+}(\varepsilon,\ x_{02}(\varepsilon))\end{bmatrix},\tag{25}$$

则对 $\forall\varphi\in K$，有

$$\begin{aligned}(x_{2+}(\varepsilon,\ x_{02}(\varepsilon)),\ \varphi)&\to\sum_{k=1}^{q-1}(-1)^kN^kx_{02}\varphi^{(k-1)}(0)\\&\quad+\sum_{k=0}^{q-1}(-1)^{k+1}N^k(B_2u_+,\ \varphi^{(k)})\\&=-\sum_{k=1}^{q-1}N^kx_{02}(\delta^{(k-1)},\ \varphi)-\sum_{k=0}^{q-1}N^k(B_2u_+^{(k)},\ \varphi),\end{aligned}$$

此即表明

$$x_{2+}(\varepsilon,\ x_{02}(\varepsilon))\xrightarrow{K'}\phi_2(x_0).\tag{26}$$

此外由式(9)又知

$$\begin{aligned}x_{1+}(\varepsilon,x_{01}(\varepsilon))&=\exp\{E_{11}^{-1}(\varepsilon)t\}x_{01}(\varepsilon)\theta(t)\\&\quad+\int_0^t\exp\{E_{11}^{-1}(\varepsilon)(t-\tau)\}E_{11}^{-1}(\varepsilon)B_1(\varepsilon)u_+(\tau)d\tau\\&\quad+\exp\{E_{11}^{-1}(\varepsilon)t\}I_0\{\exp\{-E_{11}^{-1}(\varepsilon)t\}E_{11}^{-1}(\varepsilon)E_{12}(\varepsilon)\dot{x}_{2+}(\varepsilon,\ x_{01}(\varepsilon))\}\\&\triangleq f_{1\varepsilon}+f_{2\varepsilon}+f_{3\varepsilon},\end{aligned}$$

其中 $I_0(\cdot)$ 为 $(\cdot)$ 的某适当原函数.

易证，$\varepsilon\to0^+$ 时

$$f_{1\varepsilon}\xrightarrow{K'}\exp\{J^{-1}t\}x_{01},\quad t\geqslant0$$

$$f_{2\varepsilon}\xrightarrow{K'}\int_0^t\exp\{J^{-1}(t-\tau)J^{-1}B_1u_+(t)d\tau,$$

$$f_{3\varepsilon}\xrightarrow{K'}0.$$

故知

$$x_{1+}(\varepsilon,\ x_{01}(\varepsilon))\xrightarrow{K'}\phi_1(x_0).\tag{27}$$

参　考　文　献

[1] Campbell, S. L., Singular Systems of Differential Equations II, *Pitman*, (1982), 56—58.

[2] Doetsch, G., Introduction to the Laplace Transformation, Springer-verlag, Berlin/New York, (1974), 128.

[3] Cobb, D., On the Solutions of Linear Differential Equations with Singular Coefficients, *J. Diffential Equations*, **46**(1982), 301—323.

[4] Cobb, D., Controllability, Observability, and Duality in Singular Systems, *IEEE Trans. Automatic Control*, **29**(1984), 1076—1082.

[5] Гельфанд, И. М. И Н. Я. Иленкин, Обобщенные Функции, Выпуск 1, Физматгиз, Москва, (1961), 1—20.

[6] Yip, E. L., and R. F. Sincovec, Solvability, Controllability and Observability of Continuous Descriptor Systems, *IEEE Trans. Automatic Control*, **26**(1981). 702—707.

[7] 黄琳，系统与控制中的线性代数，科学出版社，(1984)，224—252.

[8] Verghese, G. C., B. C. Levy and T. Kailath, A Generalized State-space for Singular Systems, *IEEE Trans. Automatic Control,* 26(1981), 811—831.
[9] 王朝珠，戴立意，广义动态系统，控制理论与应用，1(1986)，(1)，2—12.
[10] Yang Chenwu and Zou Yun, The Existence and Design of Regular State Asymptotic Observer for Singular Systems, *Science in China*, (Series A), 34(1991), (11), 1400—1408.

ON THE INTERPRETATIONS FOR THE SOLUTIONS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH SINGULAR COEFFICIENTS

Zou Yun Yang Chengwu
(Nanjing University of Technology)

Abstract

In this paper, the problem of the solutions for differential equations with singular coefficients is considered, and some improvement for the related works in Cobb (1982) and Campbell (1982) is obtained via singularly perturbed systems theory.

Key words: Singularly perturbed systems; singular system; linear systems; limiting solutions.