



# 最小能量有限拍鲁棒控制系统的设计<sup>1)</sup>

赵 曜

(成都科技大学计算机及自动控制系, 成都 610065)

## 摘 要

本文采用2自由度控制器,以传递函数分式分解理论为基础,提出了一种在保证系统内部稳定和最佳鲁棒性前提下,实现最小能量控制的有限拍系统设计法。设计过程本质上是控制能量与响应时间的折衷。本文导出了折衷的最终界限,并给出了确定最佳响应时间的方法。

**关键词:** 有限拍控制,最小能量控制,鲁棒性。

## 一、引 言

在离散时间控制系统中,有限拍控制结构简单,设计容易,但一直没能广泛应用于工程实际。原因主要有两个方面,一是对系统模型的不确定性及外来干扰鲁棒性很差;二是控制幅值常常过大。对于鲁棒性问题,作者等人曾提出采用2自由度控制器同时实现最佳鲁棒性和最少拍控制的设计方案<sup>[1,2]</sup>。但最少拍控制由于参数唯一确定,无法解决控制幅值过大的问题,唯一有效的途径是适当延长响应拍数。但延长多少最恰当,延长后怎样实现最小能量控制,并保证最佳鲁棒性,这就是本文要解决的问题。

以下用  $\mathbf{RH}_2$  代表所有  $\lambda(\lambda = z^{-1})$  的稳定有理函数,即在复平面单位圆内(包括圆上)没有极点的所有有理函数。

## 二、保证内部稳定的有限拍控制

考虑图1所示的离散时间控制系统,  $G$  是控制对象,  $C$  是2自由度控制器。  $C_1$  和  $C_2$  可独立地实现两种性能最优。在文献[1]中,  $C_2$  实现了最佳鲁棒性,以此为基础,下面着重讨论  $C_1$  的设计问题。

设  $G$  的互质分解为

$$G = ND^{-1}, N, D \in \mathbf{RH}_2. \quad (2.1)$$

根据文献[1],[4],所有保证系统内部稳定的控制器可表示为

$$C = [Y - RN]^{-1}[QX + RD], R, Q, X, Y \in \mathbf{RH}_2, \quad (2.2)$$

本文于1991年2月4日收到。

1) 本文受国家教委留学回国人员工作基金资助。

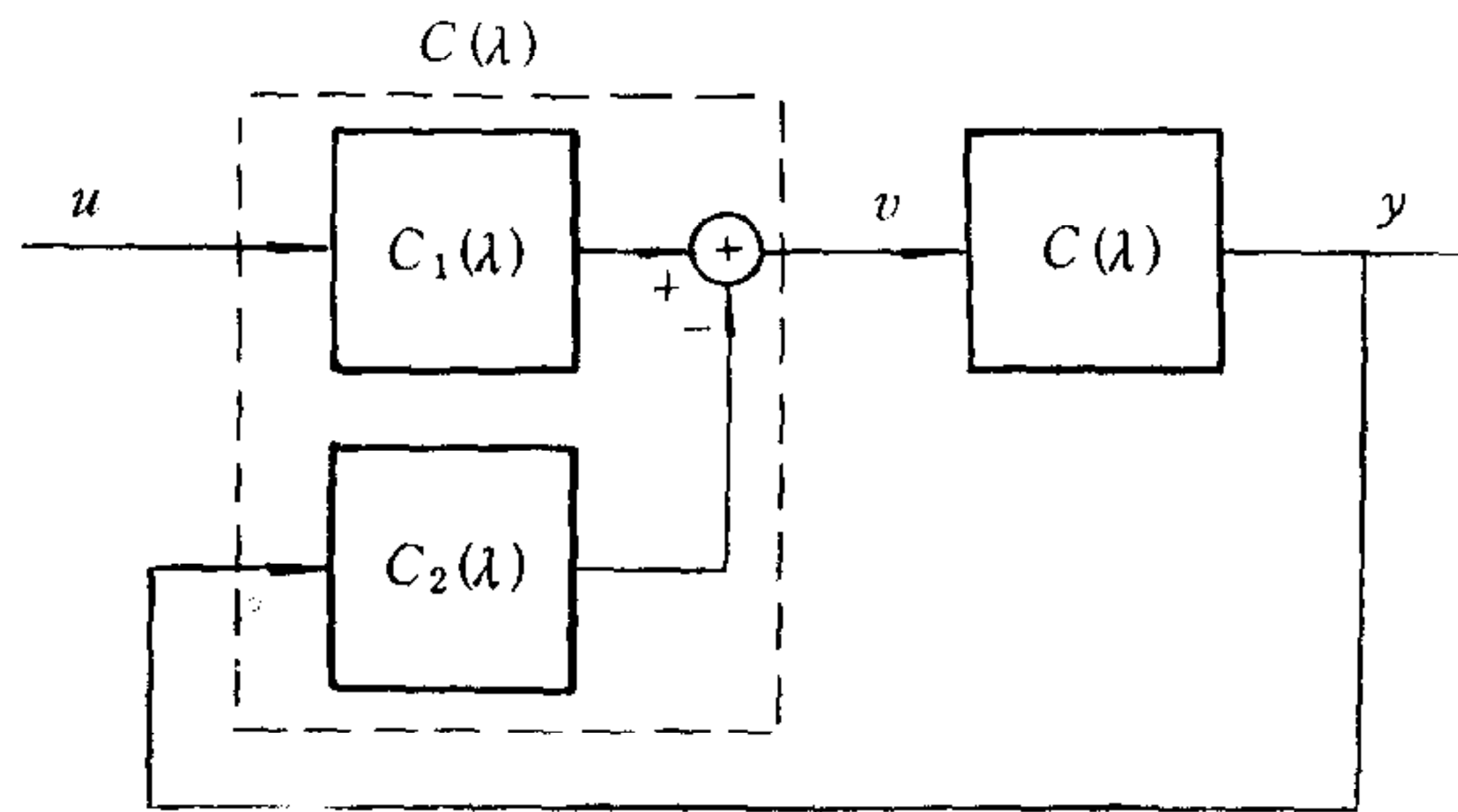


图 1

式中  $R$  和  $Q$  是自由参量,  $X$  和  $Y$  满足

$$XN + YD = 1, \quad (2.3)$$

设参考输入是单位阶跃信号, 则有限拍无纹波要求控制量在有限拍内达到稳态, 因此有

$$v(\lambda) = v_0 + v_1\lambda + \cdots + v_k\lambda^k + v_s(\lambda^{k+1} + \lambda^{k+2} + \cdots), \quad (2.4)$$

式中  $k$  称为整定拍数,  $v_i (i = 0, 1, \cdots, k)$  是待定参数,  $v_s$  是控制量稳态值, 按下式求得

$$v_s = \frac{D(1)}{N(1)}. \quad (2.5)$$

**定理 2.1.** 设  $G$  的极点为  $\lambda_i (i = 1, 2, \cdots, p)$ , 无重极点, 且当  $D(1) = 0$  时, 令  $\lambda_1 = 1$ , 将  $D$  表示为

$$D(\lambda) = (1 - \lambda)D_1(\lambda). \quad (2.6)$$

则所有保证系统内部稳定的有限拍控制可表示为

$$Av_k = B, \quad (2.7)$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^k \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_p & \cdots & \lambda_p^k \end{bmatrix}, \quad v_k = \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_k \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{cases} \left[ \frac{v_s \lambda_1^{k+1}}{\lambda_1 - 1} \quad \frac{v_s \lambda_2^{k+1}}{\lambda_2 - 1} \quad \cdots \quad \frac{v_s \lambda_p^{k+1}}{\lambda_p - 1} \right]^T, & D(1) \neq 0 \\ \left[ \frac{D_1(1)}{N(1)} \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \right]^T, & D(1) = 0. \end{cases}$$

证. 由式(2.2)可导出使系统稳定的控制量<sup>[4]</sup>

$$v = DQu. \quad (2.8)$$

将式(2.4)代入上式得

$$Q = \frac{(1 - \lambda)v_s + v_s \lambda^{k+1}}{D} \in RH_2, \quad (2.9)$$

其中  $v_s = v_0 + v_1\lambda + \cdots + v_k\lambda^k$ . 设  $G$  的极点中,  $|\lambda_i| \leq 1 (i = 1, 2, \cdots, q, q \leq p)$ , 则式(2.9)等价于

$$(1 - \lambda_i)v_a(\lambda_i) + v_i\lambda_i^{k+1} = 0, i = 1, 2, \dots, q. \quad (2.10)$$

这就是稳定条件。为推导有限拍条件,定义误差为

$$E \triangleq u - y = \frac{1}{1 - \lambda} - Gv. \quad (2.11)$$

将式(2.1)和(2.4)代入上式得

$$E = \frac{D - N[(1 - \lambda)v_a + v_i\lambda^{k+1}]}{(1 - \lambda)D}. \quad (2.12)$$

有限拍响应要求  $E$  必须是  $\lambda$  的有限次多项式,所以式(2.12)必须满足

$$D - N[(1 - \lambda)v_a + v_i\lambda^{k+1}] = 0, \lambda = 1, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p. \quad (2.13)$$

利用式(2.5)和(2.6),上式可简化为下列等价条件

$$(1 - \lambda_i)v_a(\lambda_i) + v_i\lambda_i^{k+1} = 0, i = 1, 2, \dots, p, D(1) \neq 0, \quad (2.14)$$

$$\begin{cases} D_1(\lambda_1) - N(\lambda_1)v_a(\lambda_1) = 0, \lambda_1 = 1 \\ v_a(\lambda_i) = 0, i = 2, 3, \dots, p \end{cases}, D(1) = 0 \quad (2.15)$$

这就是有限拍条件。显然,稳定条件式(2.10)已包含在其中了。最后将式(2.14)和(2.15)改写成矩阵形式就是式(2.7)。证毕

容易看出,定理中的式(2.7)有解的条件是

$$k \geq p - 1. \quad (2.16)$$

取等号是最少拍控制,控制量唯一确定;取不等号则存在无穷组解,使改善控制量成为可能。

### 三、最小能量解和能量下降极限

定义性能指标为

$$J = v_k^T W v_k, \quad (3.1)$$

式中  $W$  是正定加权矩阵,  $v_k$  应满足式(2.7)以确保稳定性和有限拍特性。求解最优控制是典型的二次型最小化问题,其解由下面定理给出。

**定理 3.1.** 设  $J$  的最小值为  $J^*$ , 所对应的最优解为  $v_k^*$ , 则有

$$J^* = B^T (AW^{-1}A^T)^{-1} B, \quad (3.2)$$

$$v_k^* = W^{-1}A^T (AW^{-1}A^T)^{-1} B. \quad (3.3)$$

考虑到  $k$  越大,  $J$  的待定参数越多,最优指标  $J^*$  显然是  $k$  的减函数,即控制能量随整定拍数增加而下降。  $J^*$  的极限值表征了下降的最终界限,将其与有限  $k$  时的  $J^*$  比较,可知下降的程度。下面为了使符号简化,规定如果矩阵  $M = [m_{ij}]$  的所有元素是  $i, j$  的函数,即  $m_{ij} = f(i, j)$ , 则直接写成  $M = [f(i, j)]$ 。

**定理 3.2.** 取  $W$  为单位阵,有下列结果:

(1) 设  $G$  稳定,即  $|\lambda_i| > 1 (i = 1, 2, \dots, p)$ , 则有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} J^* = B_p^T M_p^{-1} B_p, \quad (3.4)$$

其中

$$B_p^T = \left[ \frac{v_s}{\lambda_1 - 1} \quad \frac{v_s}{\lambda_2 - 1} \quad \dots \quad \frac{v_s}{\lambda_p - 1} \right], \quad M_p = \left[ \frac{1}{\lambda_i \lambda_j - 1} \right], \quad i, j = 1, 2, \dots, p;$$

(2) 若  $G$  不稳定, 设  $|\lambda_i| > 1 (i = 1, 2, \dots, q), |\lambda_j| < 1 (j = q + 1, q + 2, \dots, p)$ , 则有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} J^* = 0, \quad q = 0 \tag{3.5}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} J^* = B_q^T M_q^{-1} B_q, \quad q \neq 0 \tag{3.6}$$

其中

$$B_q^T = \left[ \frac{v_s}{\lambda_1 - 1} \quad \frac{v_s}{\lambda_2 - 1} \quad \dots \quad \frac{v_s}{\lambda_q - 1} \right], \quad M_q = \left[ \frac{1}{\lambda_i \lambda_j - 1} \right], \quad i, j = 1, 2, \dots, q;$$

(3) 若  $G$  有极点  $\lambda_1 = 1$ , 则无论稳定与否都有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} J^* = 0. \tag{3.7}$$

证. 略

### 四、设计例与仿真

为便于比较, 考虑与文献[1]同样的控制对象, 其加零阶保持器的离散模型为

$$G = -\frac{0.0906\lambda^3}{\lambda - 0.8187}. \tag{4.1}$$

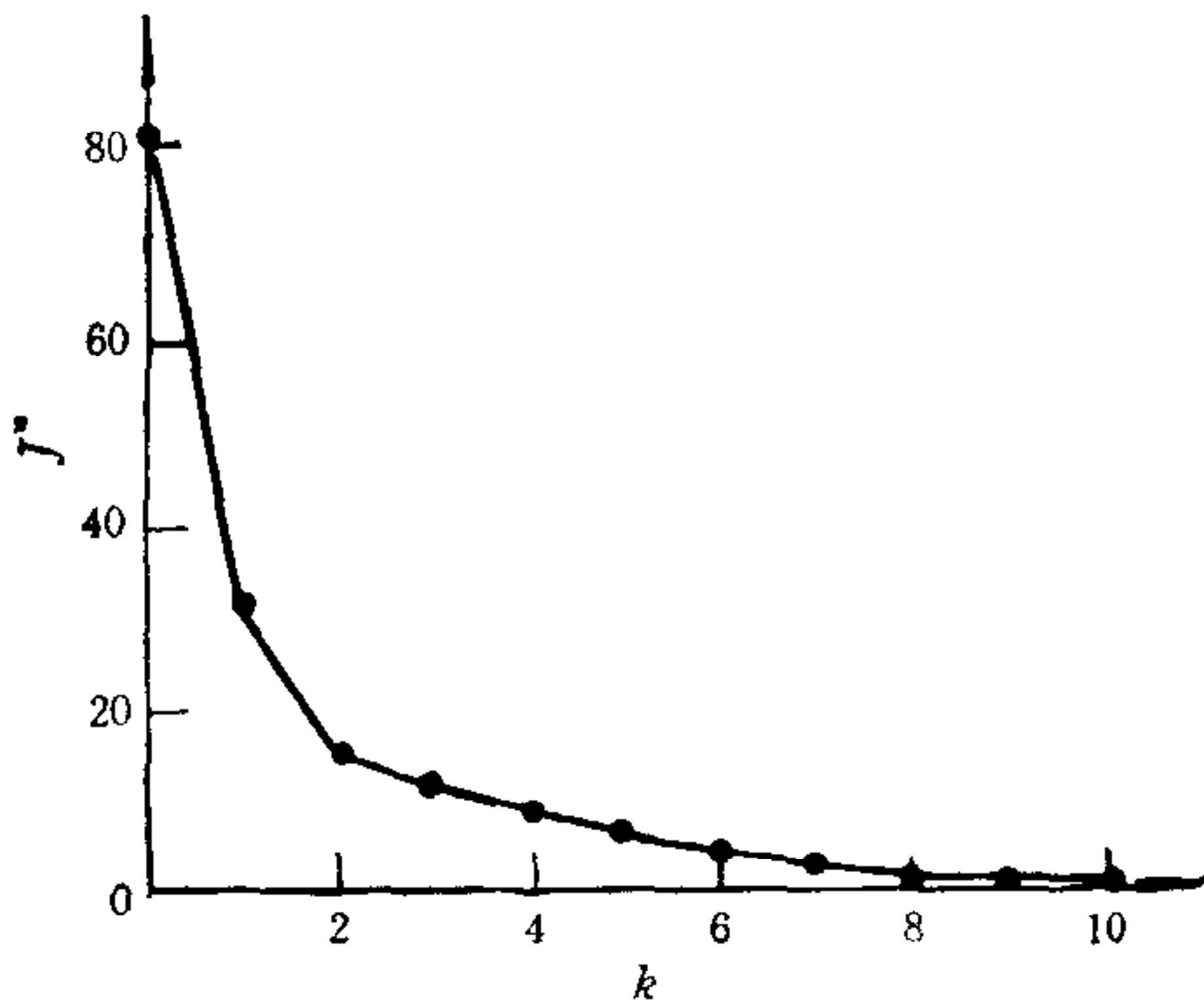


图 2

首先讨论整定拍数的选择.  $G$  可分解为

$$N = -0.0906\lambda^3, \quad D = \lambda - 0.8187,$$

因此有  $p = 1, \lambda_1 = 0.8187$ , 由式(2.5)和(2.16)知  $v_s = -2, k \geq 0$ , 再根据定理 3.1 与 3.2 可计算最优指标, 结果如表 1 与图 2. 可以看出其特点是  $k$  小时控制能量大幅度下降, 但  $k$  大时效果很小. 另一方面  $k$  大使控制器阶次增高, 响应时间长. 所以最佳整定拍数为  $k = 1-3$ . 以下取  $k = 2$  来计算控制器.

根据定理 3.1 可得最优控制  $v_k^*$ , 代入(2.9)得

$$Q = -3.489 - 3.628\lambda - 3.914\lambda^2. \tag{4.2}$$

表 1

$k$	$J^*$	$k$	$J^*$
0	81.567	7	1.704
1	32.733	8	1.126
2	17.289	9	0.748
3	10.147	10	0.498
4	6.278	15	0.067
5	4.001	20	0.009
6	2.597	$\infty$	0

控制器另一自由参量 $R$ 的作用是实现最佳鲁棒性,其计算及 $X, Y$ 的确定见文献[1]。将 $N, D, Q$ 和 $R, X, Y$ 代入(2.2)即得控制器

$$C = D_c^{-1}[N_1 \ N_2], \quad (4.3)$$

其中

$$N_1 = 2.855 - 1.964\lambda + 0.981\lambda^2 - 3.325\lambda^3 + 2.384\lambda^4,$$

$$N_2 = 9.479 - 12.379\lambda + 3.049\lambda^2,$$

$$D_c = (1 - \lambda)(1 + 0.494\lambda + 0.619\lambda^2 - 0.276\lambda^3).$$

仿真结果如图3所示,虚线是最少拍控制<sup>[1]</sup>。显然,整定拍数延长二拍使控制幅值大

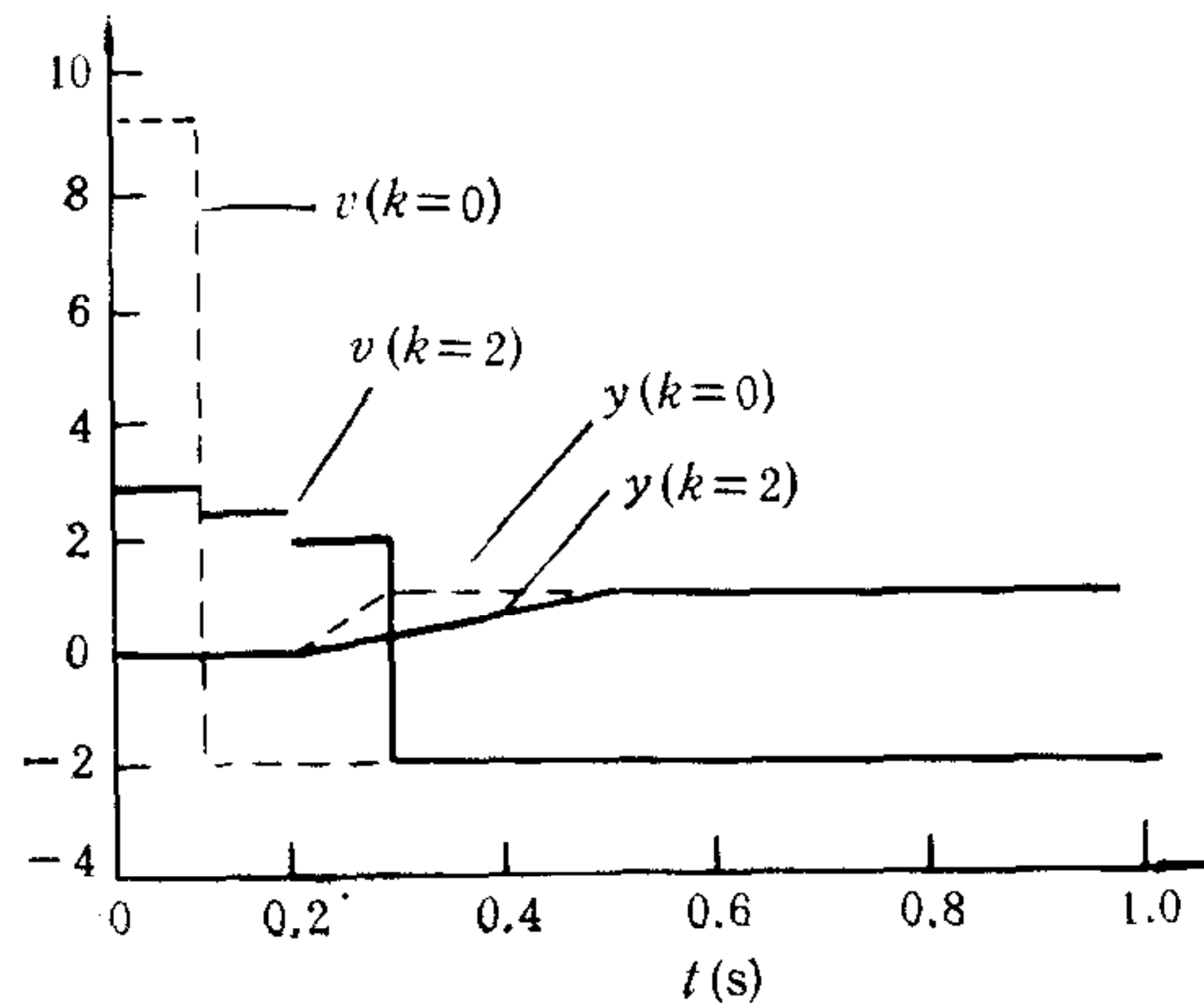


图 3

幅度减小。但 $k > 2$ 后效果并不明显(图略)。另外无论取何 $k$ 值,因为不影响 $C_2$ ,所以不影响最佳鲁棒性,大量仿真结果证实了这一点。

## 五、结 束 语

本文采用2自由度控制器,其反馈部分实现了最佳鲁棒性,前馈部分实现了选定整定拍数时的最小能量控制,并给出了选取最佳整定拍数的有效方法。该设计法所依据的理论基础是传递函数分式分解方法,因此扩展到多输入多输出系统并不困难。

## 参 考 文 献

- [1] Zhao, Y. and Kimura, H., Two-degree-of-freedom Deadbeat Control Systems with Robustness, *Int. J. Control*, 48(1988), 303—315.
- [2] Zhao, Y. and Kimura, H., Two-degree-of-freedom Deadbeat Control Systems with Robustness: Multivariable Case, *Int. J. Control*, 49(1989), 667—679.
- [3] Iserman, R., *Digital Control Systems*, Springer-Verlag, New York, 1981.
- [4] Vidyasagar, M., *Control System Synthesis: a Factorization Approach*, MIT Press, Cambridge, Mass., 1985.

# THE DESIGN OF ROBUST DEADBEAT CONTROL SYSTEMS WITH MINIMAL CONTROL ENERGY

ZHAO YAO

(Dept. of Computer and Control Engrg., Chengdu University of Science and Technology, 610065)

## ABSTRACT

By use of the transfer-function factorization approach, a new design method is proposed for robust deadbeat control systems with minimal control energy. This method uses the two-degree-of-freedom controller structure to realize the minimal-energy control under the condition of guaranteeing the internal stability and optimal robustness. The design procedure is essentially trade-offs between settling time and control energy. The bound of such trade-offs is derived and a method is given to select the most appropriate settling time.

**Key words:** Deadbeat control; minimal-energy control; robustness.

(上接 335 页)

变结构控制 (Variable Structure Control); 模糊控制 (Fuzzy Control); 自适应控制 (Adaptive Control); 学习控制 (Learning Control); 专家控制 (Expert Control); 递阶控制 (Hierarchical Control); 集散控制 (Distributed Control); 集成智能控制 (Integrated Intelligent Control); 其他形式控制 (Others)

3. 控制理论和系统理论 (Control and Systems Theory)

4. 自治控制系统和容错控制系统 (Autonomous Control Systems and Failure-tolerant Control Systems)

5. 故障检测、分离和诊断 (Fault Detection, Isolation and Diagnosis)

6. 实时控制中的人工智能 (Artificial Intelligence in Real-time Control)

7. 神经网络在建模、辨识和控制中的应用 (Modelling, Identification and Control Using Neural Networks)

8. 机器人控制 (Robot Control)

9. 制造系统 (Manufacturing Systems)

10. 信息处理和信息系统 (Information Processing and Systems)

11. 调度、规划、管理和决策系统 (Scheduling, Planning Managing and Decision-Making Systems)

12. 计算机辅助分析和设计 (Computer Aided Analysis and Design)

13. 智能控制器、传感器和执行机构 (Intelligent Controllers, Sensors and Actuators)

14. 智能元件和仪表 (Intelligent Components and Instruments)

15. 实现技术和应用 (Implementation Technologies and Applications)

16. 其他有关课题 (Other Related Topics)

因此, CWCICIA'93 反映了当前自动化科学技术发展的新形势, 会议内容新颖、丰富多彩, 这将是全世界自动化界华人专家、学者们、同行们, 第一次盛大的、具有重要意义的学术聚会。

**大会秘书处:** 北京清华大学自动化系 CWCICIA'93 秘书处; 邮政编码 (Post Code): 100084; 电话 (Tel): (86) 1-2552451-2421; 传真 (FAX): (86) 1-2568184.

(涂序彦 李清泉 杜继宏)