

二维动边界发汗控制数学仿真研究¹⁾

杨学实

(北京142信箱206分箱, 100854)

袁兆鼎

(北京计算机应用和仿真技术研究所)

徐燕侯

(合肥, 中国科学技术大学力学系)

摘要

本文给出二维加热且具有表面烧蚀的发汗控制数学模型。采用时间跨半步的交替方法，将二维活动边界分布参数控制方程差分化，得到三对角方程组。对电磁炮弹飞行进行数学仿真后表明：控制参数对温度场和活动边界的控制是有效的；该数学模型符合实际物理过程。从数值角度提供了数学理论问题解析性质的依据，给出了二维温度场特点并讨论了同步烧蚀问题。

关键词：发汗, 活动边界, 传热, 数学仿真。

一、前言

在工程中, 飞行器加热(端头)不仅是时间的函数, 而且是离前端不同位置 x 的函数, 即为 $q(x, t)$ 。此时, 利用一维模型描述二维问题会引起较大误差。对于头部是实心旋转体的飞行器, 采用柱坐标是合理的。在粘性空气动力学边界层理论中^①, 利用 Mangler 变换, 可将轴对称三维问题变换成二维问题, 与之相连系的薄壳结构头锥在小攻角范围内飞行的气动加热, 工程上通常按平板加热处理。实际飞行器大多为薄壳结构形式。电磁导轨炮的导轨加热亦属二维性质。因此, 本文将在直角坐标系下用数值分析方法探讨二维发汗控制特性。

二、数学模型

讨论一个长 l_1 , 厚 l , 宽为无限大的平板, 在正交坐标系下, 利用文献[1]的假设条件, 并附加发汗剂在热层内流动平均沿 y 方向时, 不难推导出具有表面烧蚀的二维发汗控

本文于1991年10月28日收到。

1) 国家自然科学基金资助项目。

制微分方程式

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \beta \frac{\partial T}{\partial y} + \dot{S}(x, t) \frac{l - y}{l - S(x, t)} \frac{\partial T}{\partial y}, \quad (1)$$

$$x \in (0, l_1), \quad y \in (S(x, t), l),$$

式中 $\alpha = K / (\rho \cdot C_p)$; $\beta = \dot{m}_L(x, t) \cdot C_{PL} / (\rho \cdot C_p)$; ρ 为材料密度; C_p 比热; K 为导热系数; \dot{m}_L 为冷却剂损耗率; C_{PL} 为冷却剂比热。温度 $T = T(x, y, t)$ 。

冷却剂到达外表面为气体时,使气动加热受到阻塞,阻塞系数^[1]

$$\phi = \phi(\dot{m}_L(x, t)),$$

气动加热为

$$q(x, t) = q_0(x, t) \left(1 - \frac{h_w}{h_r} \right) \left(\frac{h_e}{h^*} \right)^{0.648},$$

式中 q 为实际热流; q_0 为理论热流; h_w 为表面焓; h_r 为滞止焓; h_e 为边界层外边界焓; h^* 为 Eckert 焓, 实际净加热为

$$Q(x, t, \dot{m}_L) = \phi(\dot{m}_L(x, t)) \cdot q(x, t).$$

根据文献[1,2], 外边界条件为

$$\left[\rho L \dot{S}(x, t) - K \frac{\partial T}{\partial y} \right] \Big|_{y=S(x,t)} = Q(x, t, \dot{m}_L), \quad 0 \leq x \leq l_1, \quad (2)$$

同时内边界条件为

$$-\left(K \frac{\partial T}{\partial y} \right) \Big|_{y=l} = \dot{m}_L(h_N - h_c), \quad 0 \leq x \leq l_1, \quad (3)$$

式中 h_N 为内壁表面焓 $h_N = C_p \cdot T_N$, h_c 为发汗剂到达内表面处的焓值 $h_c = C_{PL} \cdot T_c$.

在 $x = 0$ 和 $x = l_1$ 两截面绝热, 于是

$$\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad 0 \leq y \leq l, \quad (4)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=l_1} = 0, \quad 0 \leq y \leq l. \quad (5)$$

当注意到 $Q(x, t, \dot{m}_L)$ 的表达式后,(2)和(3)式即为第三类边值条件形式

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y} + f_1(x, t) \cdot T \right) \Big|_{y=S(x,t)} = f_2(x, t), \quad 0 \leq x \leq l_1, \quad (6)$$

以及

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y} + g_1(x, t) \cdot T \right) \Big|_{y=l} = g_2(x, t), \quad 0 \leq x \leq l_1, \quad (7)$$

式中

$$f_1(x, t) = -\frac{1}{K} \phi(\dot{m}_L(x, t)) \cdot q_0(x, t) \left(\frac{h_e}{h^*} \right)^{0.648} \cdot \frac{C_p}{h_r},$$

$$f_2(x, t) = \frac{1}{K} \left[\rho \cdot L \cdot \dot{S}(x, t) - \phi(\dot{m}_L(x, t)) \cdot q_0(x, t) \left(\frac{h_e}{h^*} \right)^{0.648} \right],$$

$$g_1(x, t) = \frac{1}{K} \dot{m}_L(x, t) \cdot C_p,$$

$$g_2(x, t) = \frac{1}{K} \dot{m}_L(x, t) \cdot C_{PL} \cdot T_c.$$

在 $t = t_1$ 时刻, 热层表面温度到达烧蚀温度 T_m , 边界开始活动, 则初始条件为当 $t \leq t_1$, $T_w \leq T_m$, $\dot{S}(x, t) = 0$,

$$S(x, t) = 0, \quad T_w = T(x, 0, t). \quad (8)$$

当 $t > t_1$, $T_w \equiv T_m$, $\dot{S}(x, t) \neq 0$,

$$S(x, t) = \int_0^t \dot{S}(x, t) dt, \quad T_w = T(x, s, t).$$

方程(1)和边界条件(4)–(7)以及初始条件(8)式构成二维活动边界分布参数控制的数学问题。可以看出, 控制参数不仅出现在边界条件下, 同时出现在方程右端的分布参数控制系统。它的数学性质有待进一步探索。本文利用数学仿真方法, 研究控制参数对活动边界和温度影响的基本性质。

三、方程和边界条件差分化

差分方法是二阶项采用六点格式, 一阶项采用四点差分格式^[2]。将二维问题转化为一维问题进行交替求解^[3]。即在时间增长一个步长的过程中, 交替地对 x 方向和 y 方向分别进行类似一维的处理方法进行计算。对于内部节点 (i, j) 的两类基本差分公式如下:

$$\begin{aligned} \frac{T_{i,j}^{K+\frac{1}{2}} - T_{i,j}^K}{\frac{1}{2}\tau} &= \alpha \frac{T_{i+1,j}^{K+\frac{1}{2}} - 2T_{i,j}^{K+\frac{1}{2}} + T_{i-1,j}^{K+\frac{1}{2}}}{h_1^2} + \alpha \frac{T_{i,j+1}^K - 2T_{i,j}^K + T_{i,j-1}^K}{h_2^2} \\ &\quad + B_{i,j}^K \frac{T_{i,j+1}^K - T_{i,j-1}^K}{2h_2}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{T_{i,j}^{K+1} - T_{i,j}^{K+\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}\tau} &= \alpha \frac{T_{i+1,j}^{K+\frac{1}{2}} - 2T_{i,j}^{K+\frac{1}{2}} + T_{i-1,j}^{K+\frac{1}{2}}}{h_1^2} + \alpha \frac{T_{i,j+1}^{K+1} - 2T_{i,j}^{K+1} + T_{i,j-1}^{K+1}}{h_2^2} \\ &\quad + B_{i,j}^{K+1} \frac{T_{i,j+1}^{K+1} - T_{i,j-1}^{K+1}}{2h_2}, \end{aligned} \quad (10)$$

式中 i 和 h_1 为 x 方向节点和步长; j 和 h_2 为 y 方向节点和步长; K 和 τ 为时间节点和步长,

$$B_{i,j}^K = \beta + \dot{S}(x_i, t_K) \frac{l - y_i}{l - S(x_i, t_K)}$$

利用(9)式, 在对方程含第三边值条件的(6)和(7)式及含第二边值条件的(4)和(5)式进行差分化后, 得到由 $K\tau$ 到 $(K + \frac{1}{2})\tau$ 的三对角方程组是:

1). $y = S(x, t)$ 表面上

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ a_n & b_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_{1,1}^{K+\frac{1}{2}} \\ T_{2,1}^{K+\frac{1}{2}} \\ T_{3,1}^{K+\frac{1}{2}} \\ \vdots \\ T_{n-1,1}^{K+\frac{1}{2}} \\ T_{n,1}^{K+\frac{1}{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AF_{1,1}^K \\ AF_{2,1}^K \\ AF_{3,1}^K \\ \vdots \\ AF_{n-1,1}^K \\ AF_{n,1}^K \end{bmatrix}, \quad (11)$$

2) $s < y < l$ 内部

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ a_n & b_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_{1,j}^{K+\frac{1}{2}} \\ T_{2,j}^{K+\frac{1}{2}} \\ T_{3,j}^{K+\frac{1}{2}} \\ \vdots \\ T_{n-1,j}^{K+\frac{1}{2}} \\ T_{n,j}^{K+\frac{1}{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AF_{1,j}^K \\ AF_{2,j}^K \\ AF_{3,j}^K \\ \vdots \\ AF_{n-1,j}^K \\ AF_{n,j}^K \end{bmatrix}, \quad (12)$$

3) $y = l$ 内表面

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ a_n & b_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_{1,m}^{K+\frac{1}{2}} \\ T_{2,m}^{K+\frac{1}{2}} \\ T_{3,m}^{K+\frac{1}{2}} \\ \vdots \\ T_{n-1,m}^{K+\frac{1}{2}} \\ T_{n,m}^{K+\frac{1}{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AF_{1,m}^K \\ AF_{2,m}^K \\ AF_{3,m}^K \\ \vdots \\ AF_{n-1,m}^K \\ AF_{n,m}^K \end{bmatrix}, \quad (13)$$

其中系数公式为

$$a_i = -r_1, \quad a_n = -2r_1, \quad b_1 = (2r_1 + 1), \quad b_i = (2r_1 + 1), \\ b_n = (2r_1 + 1), \quad c_1 = -2r_1, \quad c_i = -r_1, \quad c_n = 0,$$

式中 $i = 2, 3, 4, \dots, n-1$.

$$AF_{i,1}^K = [1 - 2r_2 + 2h_2(r_2 - BT_{i,1}^K)f_1(x_i, t_K)]T_{i,1}^K + 2r_2T_{i,2}^K \\ - 2h_2(r_2 - BT_{i,1}^K)f_2(x_i, t_K),$$

$$AF_{i,j}^K = (r_2 - BT_{i,j}^K)T_{i,j-1}^K + (1 - 2r_2)T_{i,j}^K + (r_2 + BT_{i,j}^K)T_{i,j+1}^K \\ j = 2, 3, 4, \dots, m-1,$$

$$AF_{i,m}^K = 2r_2T_{i,m-1}^K + [1 - 2r_2 - 2h_2(r_2 + BT_{i,m}^K)g_1(x_i, t_K)]T_{i,m}^K \\ + 2h_2(r_2 + BT_{i,m}^K)g_2(x_i, t_K), \quad i = 1, 2, 3, \dots, n-1, n.$$

式中

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{\alpha\tau}{2h_1^2}, \quad r_2 = \frac{\alpha\tau}{2h_2^2}, \quad BT_{i,j}^K = \frac{B_{i,j}^K \cdot \tau}{4h_2}, \quad x_i = (i-1)h_1, \\ y_j &= (j-1)h_2, \quad t_K = K\tau, \\ B_{i,j}^K &= \beta + S(x_i, t_K) \frac{l - y_i}{l - S(x_i, t_K)}. \end{aligned}$$

再利用(10)式对方程和边界条件(4)–(7)差分化后进行化简, 得到由 $\left(K + \frac{1}{2}\right)\tau$ 到 $(K+1)\tau$ 的三对角方程组如下:

1) $x = 0$ 处

$$\begin{bmatrix} v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{m-1} & v_{m-1} & w_{m-1} \\ u_m & v_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_{1,1}^{K+\frac{1}{2}} \\ T_{1,2}^{K+\frac{1}{2}} \\ T_{1,3}^{K+\frac{1}{2}} \\ \vdots \\ T_{1,m-1}^{K+\frac{1}{2}} \\ T_{1,m}^{K+\frac{1}{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} BF_{1,1}^{K+\frac{1}{2}} \\ BF_{1,2}^{K+\frac{1}{2}} \\ BF_{1,3}^{K+\frac{1}{2}} \\ \vdots \\ BF_{1,m-1}^{K+\frac{1}{2}} \\ BF_{1,m}^{K+\frac{1}{2}} \end{bmatrix}, \quad (14)$$

其中系数为

$$v_1 = 2h_2(r_2 - BT_{1,1}^{K+\frac{1}{2}})f_1\left(0, \left(K + \frac{1}{2}\right)\tau\right) - (1 + 2r_2),$$

$$w_1 = 2r_2,$$

$$u_j = r_2 - BT_{1,j}^{K+\frac{1}{2}},$$

$$v_j = -(1 + 2r_2),$$

$$w_j = r_2 + BT_{1,j}^{K+\frac{1}{2}},$$

$$u_m = 2r_2,$$

$$v_m = -\left[1 + 2r_2 + 2h_2(r_2 + BT_{1,m}^{K+\frac{1}{2}}) \cdot g_1\left(0, t_K\right)\right],$$

$$\begin{aligned} BF_{1,1}^{K+\frac{1}{2}} &= (2r_1 - 1)T_{1,1}^{K+\frac{1}{2}} - 2r_1 T_{2,1}^{K+\frac{1}{2}} + 2h_2(r_2 - BT_{1,1}^{K+\frac{1}{2}}) \\ &\quad \cdot f_2\left(0, t_K\right), \end{aligned}$$

$$BF_{1,j}^{K+\frac{1}{2}} = (2r_1 - 1)T_{1,j}^{K+\frac{1}{2}} - 2r_1 T_{2,j}^{K+\frac{1}{2}},$$

$$\begin{aligned} BF_{1,m}^{K+\frac{1}{2}} &= (2r_1 - 1)T_{1,m}^{K+\frac{1}{2}} - 2r_1 T_{2,m}^{K+\frac{1}{2}} - 2h_2(r_2 + BT_{1,m}^{K+\frac{1}{2}}) \\ &\quad \cdot g_2\left(0, t_K\right), \end{aligned}$$

其中 $j = 2, 3, 4, \dots, m-1$. 同时 $t_K = K + \frac{1}{2}\tau$.

2) $0 < x < l_1$ 内部

$$\begin{bmatrix} v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{m-1} & v_{m-1} & w_{m-1} \\ u_m & v_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_{i,1}^{K+1} \\ T_{i,2}^{K+1} \\ T_{i,3}^{K+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ T_{i,m-1}^{K+1} \\ T_{i,m}^{K+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} BF_{i,1}^{K+\frac{1}{2}} \\ BF_{i,2}^{K+\frac{1}{2}} \\ BF_{i,3}^{K+\frac{1}{2}} \\ \vdots \\ \vdots \\ BF_{i,m-1}^{K+\frac{1}{2}} \\ BF_{i,m}^{K+\frac{1}{2}} \end{bmatrix}, \quad (15)$$

式中

$$\begin{aligned} v_1 &= 2h_2(r_2 - BT_{i,1}^{K+\frac{1}{2}}) \cdot f_1(x_i, t_K) - (1 + 2r_2), \\ v_m &= -[1 + 2r_2 + 2h_2(r_2 + BT_{i,m}^{K+\frac{1}{2}}) \cdot g_1(x_i, t_K)], \\ BF_{i,1}^{K+\frac{1}{2}} &= -r_1 T_{i-1,1}^{K+\frac{1}{2}} + (2r_1 - 1) T_{i,1}^{K+\frac{1}{2}} - r_1 T_{i+1,1}^{K+\frac{1}{2}} \\ &\quad + 2h_2(r_2 - BT_{i,1}^{K+\frac{1}{2}}) \cdot f_2(x_i, t_K) \\ BF_{i,j}^{K+\frac{1}{2}} &= -r_1 T_{i-1,j}^{K+\frac{1}{2}} + (2r_1 - 1) T_{i,j}^{K+\frac{1}{2}} - r_1 T_{i+1,j}^{K+\frac{1}{2}}, \\ i &= 2, 3, 4, \dots, n-1, \quad j = 2, 3, 4, \dots, m-1, \\ BF_{i,m}^{K+\frac{1}{2}} &= -r_1 T_{i-1,m}^{K+\frac{1}{2}} + (2r_1 - 1) T_{i,m}^{K+\frac{1}{2}} - r_1 T_{i+1,m}^{K+\frac{1}{2}} \\ &\quad - 2h_2(r_2 + BT_{i,m}^{K+\frac{1}{2}}) g_2(x_i, t_K). \quad i = 2, 3, 4, \dots, n-1. \end{aligned}$$

上式中 $x_i = (i-1)h_1$, $t_K = \left(K + \frac{1}{2}\right)\tau$, 其余系数与方程(14)的系数相同.

3) $x = l_1$ 处

$$\begin{bmatrix} v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{m-1} & v_{m-1} & w_{m-1} \\ u_m & v_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_{n,1}^{K+1} \\ T_{n,2}^{K+1} \\ T_{n,3}^{K+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ T_{n,m-1}^{K+1} \\ T_{n,m}^{K+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} BF_{n,1}^{K+\frac{1}{2}} \\ BF_{n,2}^{K+\frac{1}{2}} \\ BF_{n,3}^{K+\frac{1}{2}} \\ \vdots \\ \vdots \\ BF_{n,m-1}^{K+\frac{1}{2}} \\ BF_{n,m}^{K+\frac{1}{2}} \end{bmatrix}, \quad (16)$$

式中系数为

$$\begin{aligned} v_1 &= 2h_2(r_2 - BT_{n,1}^{K+\frac{1}{2}}) \cdot f_1(l_1, t_K) - (1 + 2r_2), \\ v_m &= -[1 + 2r_2 + 2h_2(r_2 + BT_{n,m}^{K+\frac{1}{2}}) \cdot g_1(l_1, t_K)], \\ BF_{n,1}^{K+\frac{1}{2}} &= -2r_1 T_{n-1,1}^{K+\frac{1}{2}} + (2r_1 - 1) T_{n,1}^{K+\frac{1}{2}} + 2h_2(r_2 - BT_{n,m}^{K+\frac{1}{2}}) \cdot f_2(l_1, t_K), \end{aligned}$$

$$B F_{n,j}^{K+\frac{1}{2}} = -2r_1 T_{n-1,j}^{K+\frac{1}{2}} + (2r_1 - 1) T_{n,j}^{K+\frac{1}{2}}, \quad j = 2, 3, 4, \dots, m-1.$$

$$BF_{n,m}^{K+\frac{1}{2}} = -2r_1 T_{n-1,m}^{K+\frac{1}{2}} + (2r_1 - 1) T_{n,m}^{K+\frac{1}{2}} - 2h_2(r_2 + BT_{n,m}^{K+\frac{1}{2}}) \cdot g_2(l_1, t_K),$$

式中 $t_k = \left(K + \frac{1}{2} \right) \tau$, 其余系数与方程(14)系数相同. 于是, 利用方程组(11)至(16), 可以对问题进行求解.

在实际仿真过程中,边界运动的规律是用下述方法实现的:扫描所有的 i, j 节点。当表面节点 ($j = 1$) 温度到达 T_m 时, 实际上是边界运动的开始时刻。经过 $K\tau$ 时间间隔, 使第二节点(或更多节点)到达 T_m 时, 此时边界后退率为 $s = \frac{j h_2}{K\tau}$ 。根据(8)中表达

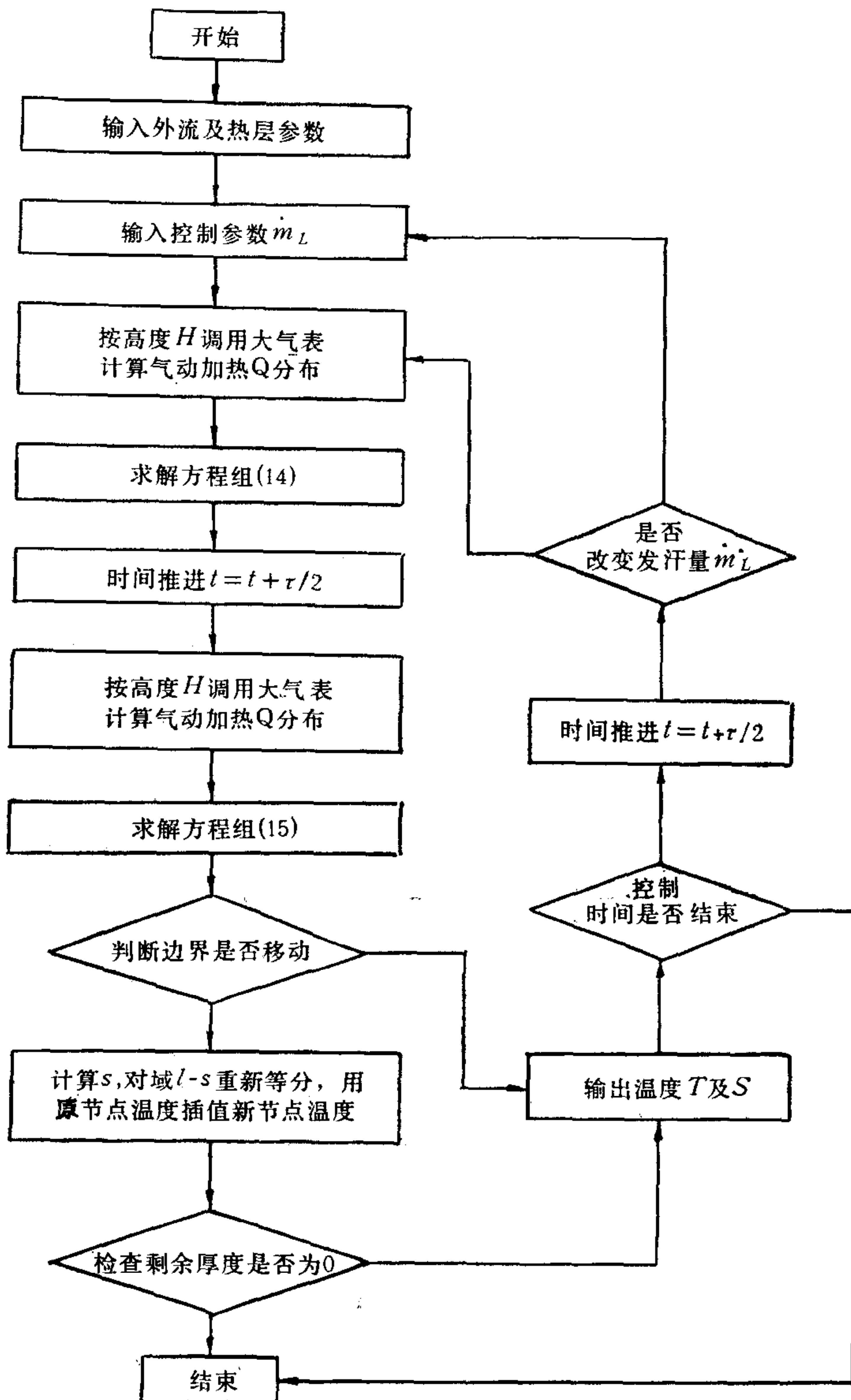


图 1 数学仿真流程框图

式, 可得 $S(x, t)$, 在得到 $S(x, t)$ 之后, 对 $I - S(x, t)$ 域重新等分节点, 并将表面节点移至新的表面边界 S 处。用前一刻的温度节点值扦值得到新位置的温度节点值。仿真流程框图见图 1。

四、数学仿真结果讨论

选择一个出口 5 km/s 的炮弹为数学仿真对象。让 x 轴沿旋转体母线, y 轴正交于

x 轴指向弹体内部并落在子午面内(弹头为有限厚度壳体)。坐标原点选在驻点。为简单起见, 本文取控制参数为阶跃函数。透气性材料为钨。发汗剂为氦气, 它的参数见文献[2]。

出口为 5 km/s 的炮弹在飞行第 1 秒驻点附近理论热流高达 $31000 \text{ kCal/m}^2\text{s}$ 。离开驻点即迅速下降, 梯度很大, 且随时间增加时, 前缘附近仍然保持较大梯度。在这种加热条件下所得到的温度分布示于图 2。可见, 在 x 方向和 y 方向同时存在较大的温度梯度。就是说 x 方向的传热来不及缓解加热梯度影响。因此, 在这种加热下, 用一维传热方程来处理是不恰当的, 会带来较大误差。

图 3 为选取不同 x 位置的四个断面观察的温度。在同一控制参数条件下, 驻点温度最高。离开驻点时, 温度逐渐降低。在每个断面处, 随着控制参数 \dot{m}_L 值的增加, 温度剖面迅速下降。表明控制温度场的有效性。上述结果与物理模型相符合。

图 4 中四组曲线是控制参数 \dot{m}_L 对边界移动规律的控制效果。当 $\dot{m}_L = 0$ 时, 边界移动最快。随时间增加, 移动越大。第 10 秒驻点附近移动量最多。当 x 增加时, 由于加热量下降, 边界移动量变小。随 \dot{m}_L 增加, 移动量更小。表明参数 \dot{m}_L 对活动边界的控制是很敏感的。

在得到图 2 至图 4 曲线的整个仿真过程中, 没有遇到仿真计算的异常现象。从数学理论角度讲, 在没有得到该数学问题解的存在、唯一和稳定性定理证明之前, 实现了数学仿真计算结果。反过来, 从数值角度讲, 它为二维活动边界分布参数控制问题数学性质的证明提供了依据。

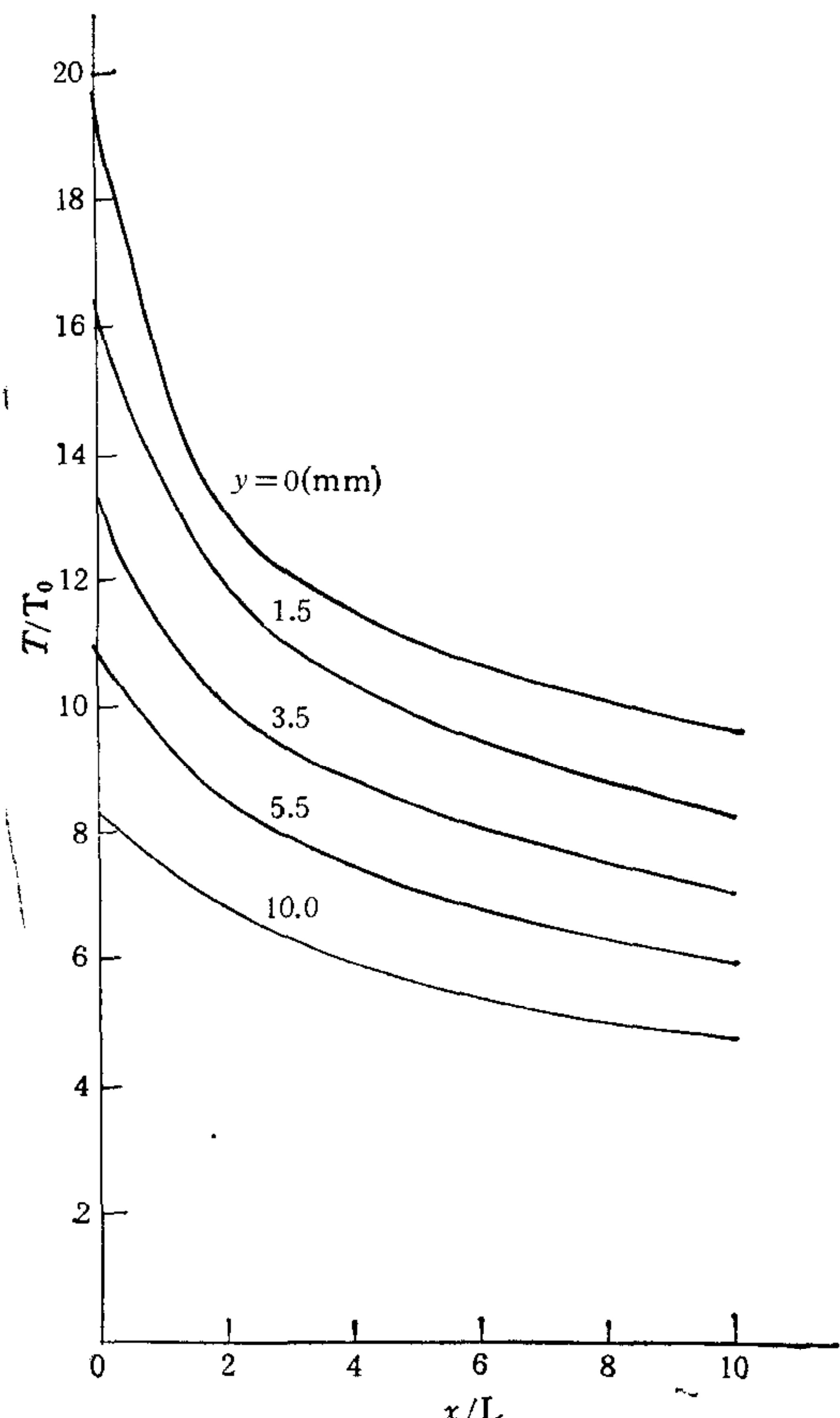
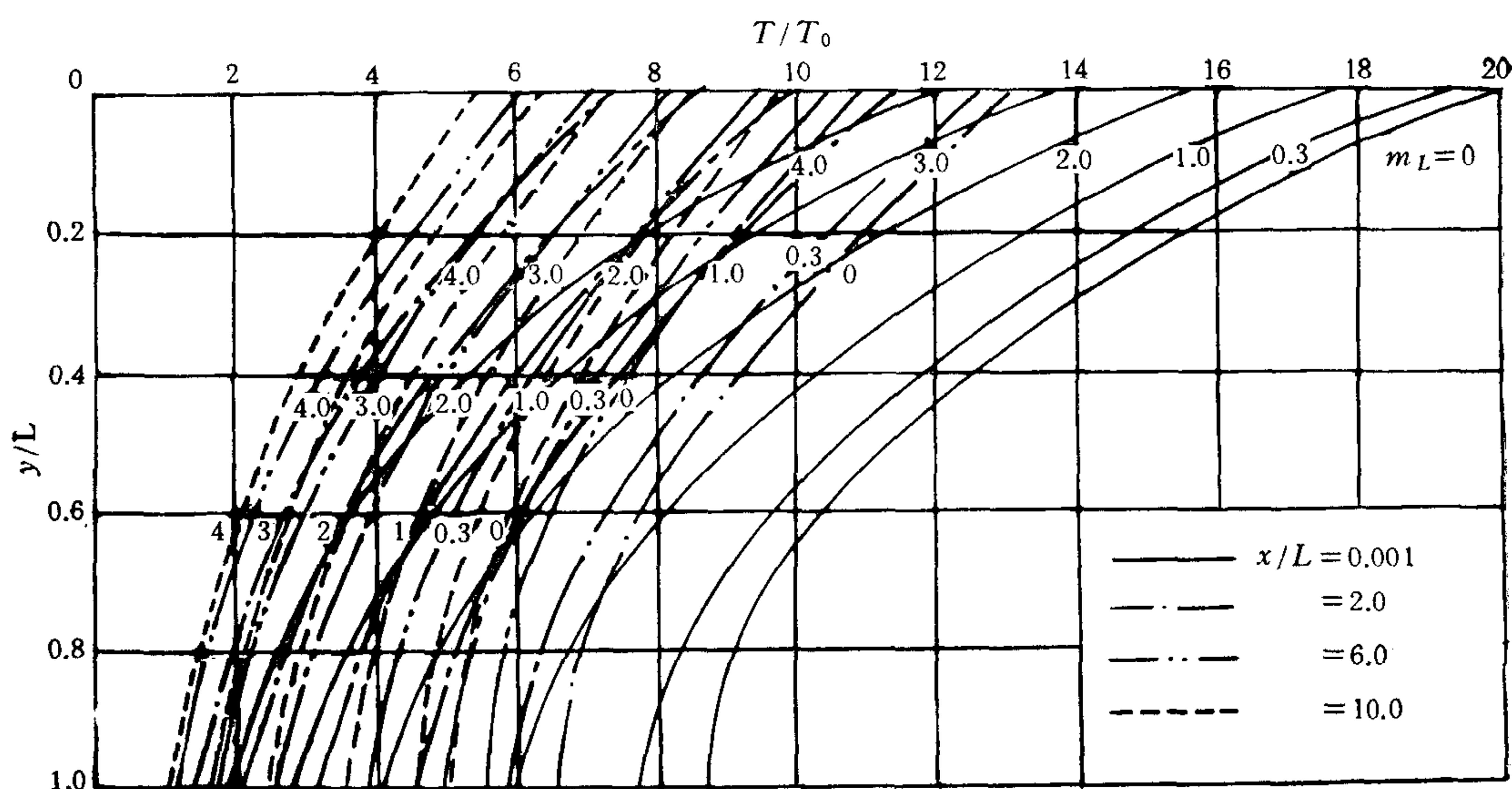
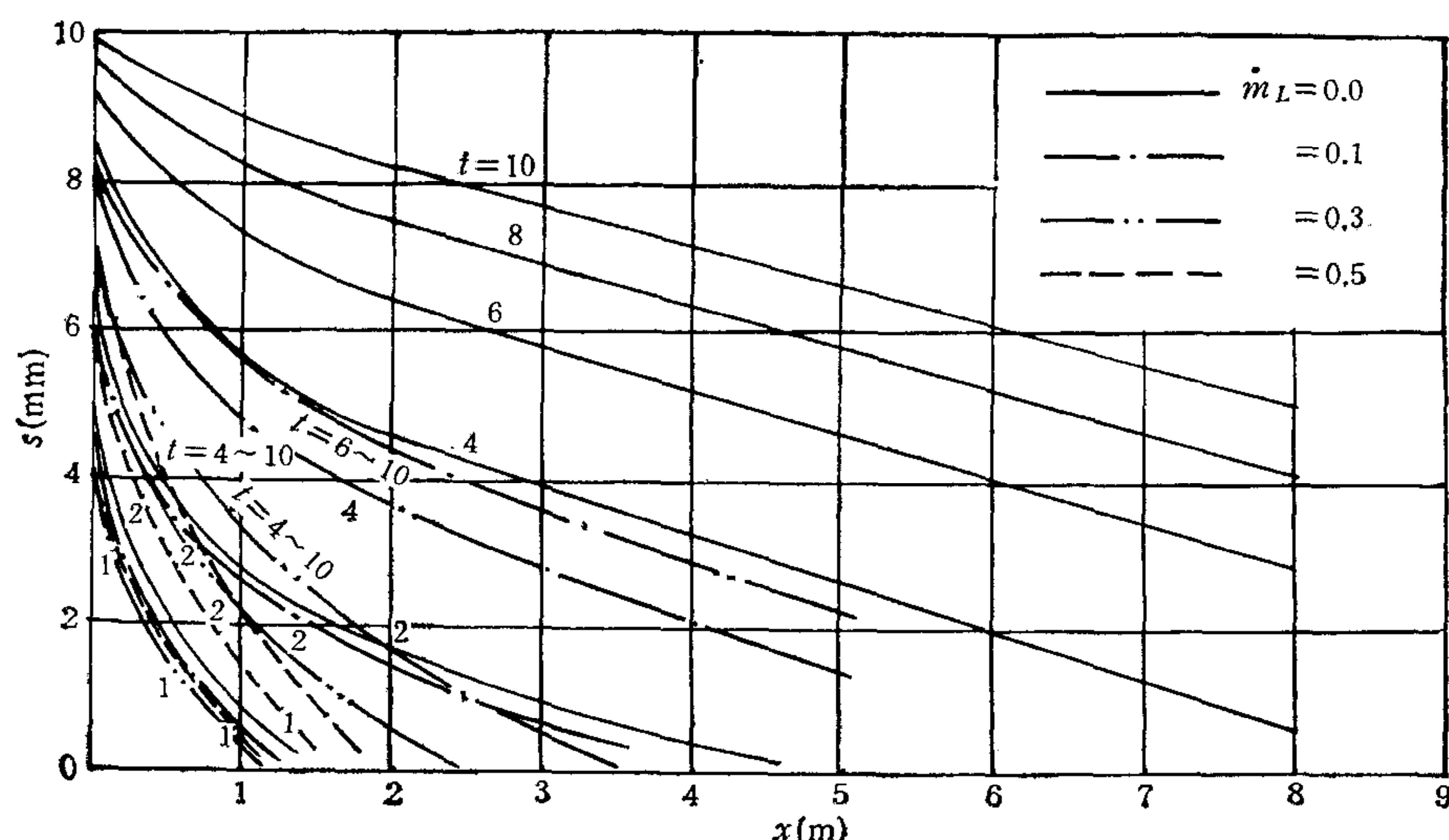


图 2 $t = 1$ 秒 y 方向分层温度随 x 变化曲线

图3 不同 x 位置温度剖面受控制参数影响曲线图4 不同 m_L 和不同时刻 x 方向动边界曲线

高超音速无动力飞行的电磁炮弹^④设计的一个重要问题是小阻力外形问题。若采用自然烧蚀,尖头会变成球头,于是,出口速度为2km/s的炮弹飞行20km,其动能降为0.当出现烧蚀时,如果能实现同步烧蚀控制,则为工程设计所希望的。 $\dot{m}_L - 1/x^{0.2}$ 函数具备此功能,它把图2中 $y = 0$ 的温度曲线变成图5中接近平直的温度曲线。该曲线除个别点,沿 x 母线的温度几乎是一常数。在同步烧蚀状态下,可以实现炮弹的小阻力设计,在工程上是可喜的。

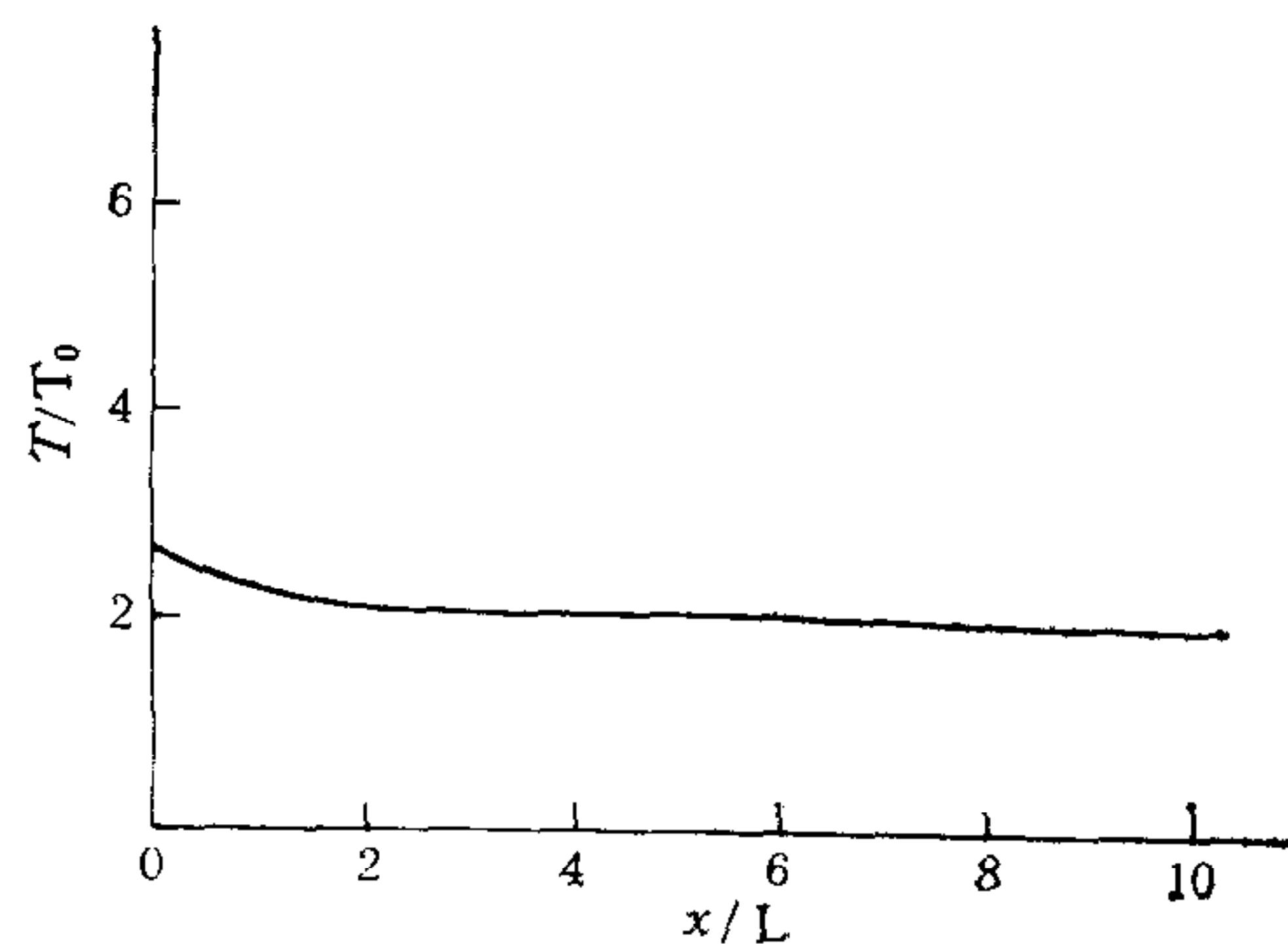


图5 $t = 1\text{ sec}$. $y = 0$ 的 x 方向温度分布曲线 ($\dot{m}_L = 1/x^{0.2}$)

五、结 论

- 1) 采用交替方向法可以实现对控制参数既出现在边界条件中又出现在方程右端的二维分布参数控制系统在第三边值条件下的求解。精度为 $O(h_1^2 + h_2^2 + \tau^2)$ 。
- 2) 数值结果表明：在大梯度加热条件下，加热梯度方向上的温度梯度不可忽略，不宜采用一维方法；同时发现，温度参数和烧蚀参数对控制参数的依赖关系是单调的，并在较广泛的范围内数值解是稳定的。这些性质对二维分布参数控制问题的数学理论上解析定理的证明奠定了基础。
- 3) 控制参数 \dot{m}_L 为 $1/x^{0.2}$ 的函数形式时，能使飞行器头部附近表面具备同步烧蚀性质，具有工程设计意义。

参 考 文 献

- [1] 杨学实,热防护发汗冷却控制,自动化学报, 11(1985),(4),345.
- [2] 杨学实,王侠超,发汗控制动态响应数值分析. 自动化学报, 14(1988),(3),184.
- [3] 杨学实,水发汗温度场控制. 自动化学报, 17(1991),(4),385.
- [4] 高伟,杨学实,发汗控制方程的数学求解. 计算物理, 8(1991),(2),165.
- [5] H. Schlichting, 徐燕侯等译,边界层理论,(上册),科学出版社, 1988,75,271.
- [6] 钱学森,宋健,工程控制论(修订版). 科学出版社,1980.
- [7] H. D. Fair, Electromagnetic Earth-to-Space Launch. IEEE. Transactions on Magnetics. 25 (1989),(1).
- [8] 俞昌铭,热传导及其数值分析,清华大学出版社,1981,225页.

A MATHEMATICAL SIMULATION RESEARCH OF TWO-DIMENSIONAL TRANSPARATION CONTROL WITH MOVING-BOUNDARY

YANG XUESHI

(P. O. Box 3924, Beijing)

YUAN ZHAODING

(Institute of Computer Application and Simulation Technology, Beijing)

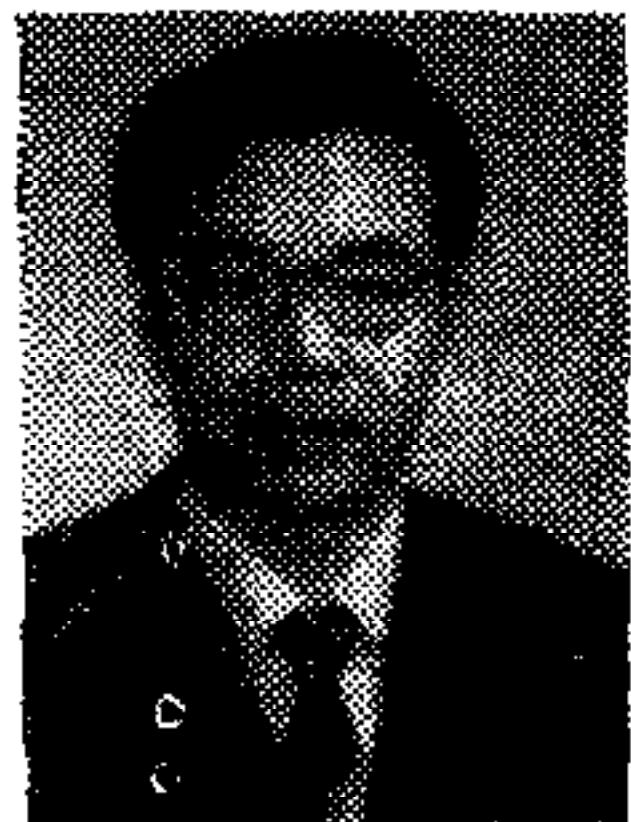
XU YANHOU

(University of Science and Technology of China)

ABSTRACT

This paper represents a mathematical model of transpiration cooling control system with two-dimensional heating and surface ablating. Applying time semistep alternating direction method to quantize this mathematical model, the tri-diagonal difference equations are obtained. The mathematical simulation results for the flying shell of the electromagnetic railgun show that the control parameter is effective for the control of temperature field and the boundary motion. The evidence of the analytic character on the mathematical theory is provided from the mathematical simulation. The characteristic of two-dimensional temperature field is given and the problem of the synchronization ablation is discussed.

Key words: Transpiration, varlable-boundary, heat transfer, mathematical simulation.



杨学实 高级工程师,1937年生于陕西安康。1962年毕业于兰州大学数学力学系,之后在中国科学技术大学近代力学系任教。现在航空航天部二院从事空气动力学、传热学及动边界分布参数控制研究。系北京市计算数学学会、中国空气动力学研究会和中国宇航学会成员。



袁兆鼎 航空航天部204所研究员,计算数学博士导师,1926年7月生,原籍山东济南。1949年北京师范大学数学系毕业,1958年在苏联莫斯科大学获数理科学副博士学位,从事数值计算和计算方法的研究工作。中国计算数学学会第一、二届常务理事,中国计算物理学会第一、二届常务理事,《计算数学》编委,《计算物理》副主编,译《抛物型方程网格积分法》,著《刚性常微分方程初值问题数值解法》,指导编写《104标准程序手册》、《FORTRAN 算法汇编》等书,并发表过一些计算数学方面的学术论文。



徐燕侯 中国科学技术大学近代力学系教授。1933年生于浙江杭州,1957年毕业于北京大学数学力学系。长期从事空气动力学、再入物理现象、磁流体力学和多相流研究。目前主要兴趣:发汗冷却控制、动边界分布参数控制、航天飞行器带电问题和气固两相流中激波的传播和特性。担任安徽省力学学会理事,合肥市力学学会理事长、安徽省仪器仪表学会副理事长等职。