第19卷 第4期 自动化学报 Vol. 19, No. 4
1993年7月 ACTA AUTOMATICA SINICA July, 1993

矩文

拓广的盒子定理[1)]

顾冬梅
(中国科学院自动化研究所,北京 100080)

摘 要

本文给出了当线性系统的传递函数为区间有理函数时的系统闭环鲁棒稳定性及多项式族 $\delta^{1}(s)=\sum_{i=0}^{m}Q_i(s)P_i(s)$ 的鲁棒稳定的充要条件。当 $Q_i(s)$ 满足某些假定条件后,得出了 $\delta(s)$ 鲁棒稳定性的有限检验的充要条件.

关键词: 区间有理函数, Kharitonov 定理,闭环鲁棒稳定性.

一、问题的提出

本文在文献[2]的基础上,研究单输入多输出系统的闭环稳定性问题,将 Box Theorem 推广到更一般的情形. 设闭环控制系统如图1所示:

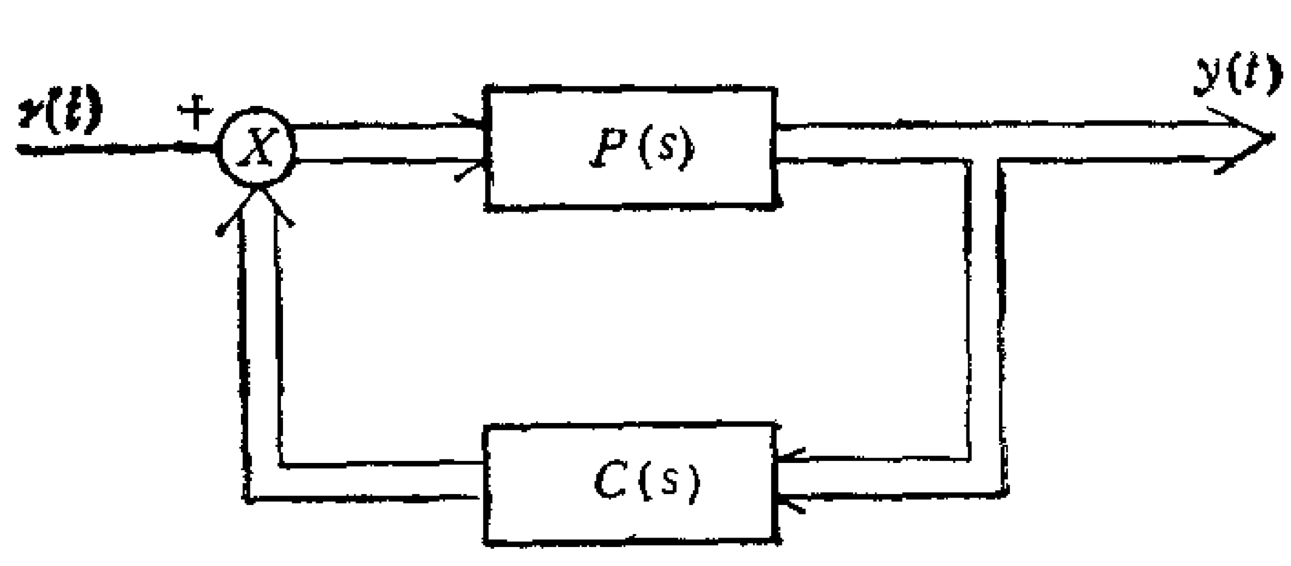

图 1

图中

$$P(s)=[P_1(s),\cdots,P_m(s)]^T/P_0(s), \quad (1.1)$$

$$C(s)=[C_1(s),\cdots,C_m(s)]/C_0(s), \quad (1.2)$$

式中 $P_i(s)$ 为区间多项式, $C_i(s)$ 为固定多项式, $i=0,1,2,\cdots,m$.

文献[1]给出了上述控制系统闭环传递函数 $\delta(s)=\sum_{i=0}^{m}P_i(s)C_i(s)$ 当 $C(s)$ 仅含奇次或偶次项时,多项式族 $\delta(s)$ 的鲁棒稳定性的有限检验,文献[2]对 $C_i(s)$ 的约束条件过于严格. 文献[2]提出了一阶补偿器,克服了文献[1]中的不足,但同时也限制了补偿器的结构. 由文献[3]中的反例可知: 对于一般意义下的补偿器 $C(s)$, 其闭环鲁棒稳定性的有限检验是不存在的, 而且文献[1,2,3]对补偿器 $C(s)$ 的限制也过于严格. 本文给出了比较一般的补偿器 $C(s)$ 及其闭环鲁棒稳定的有限检验的充要条件.

二、概念及假定条件

假设 1. 设多项式 $C_i(s)=C_{i0}+C_{i1}s+\cdots+C_{iu_i}s^{u_i}$ 满足

本文于1991年8月15日收到.
1) 本课题受国家自然科学基金资助.

1） $\sum_{l+k=h}(-1)^h(k-l)C_{i,2k}C_{i,2l+1}\geqslant 0$， (2.1)

2） $\text{degree}\{C_i(s)P_i(s)+C_j(s)P_j(s)\}$

$$=\max\{\text{degree}\{C_i(s)P_i(s)\},\text{degree}\{C_j(s)P_j(s)\}\}, \tag{2.2}$$

式中 $i=0,1,2,\cdots,m;h=0,1,\cdots,u_i-1;j=0,1,2,\cdots,m;k\geqslant 0,l\geqslant 0$.

区间多项式

$$P_i(s)=p_{i0}+p_{i1}s+\cdots+p_{iv_i}s^{v_i}, \tag{2.3}$$

其中 $p_{ij}\in[p_{ij}^-,p_{ij}^+],i=0,1,2,\cdots,m;j=0,1,\cdots,v_i$. $P_i(s)$ 的 4 个顶点多项式 $KP_{i,j}$ 分别如下：

$$\begin{aligned}KP_{i,1}&=p_{i0}^-+p_{i1}^-s+p_{i2}^+s^2+p_{i3}^+s^3+\cdots,\\KP_{i,2}&=p_{i0}^-+p_{i1}^+s+p_{i2}^+s^2+p_{i3}^-s^3+\cdots,\\KP_{i,3}&=p_{i0}^++p_{i1}^+s+p_{i2}^-s^2+p_{i3}^-s^3+\cdots,\\KP_{i,4}&=p_{i0}^++p_{i1}^-s+p_{i2}^-s^2+p_{i3}^+s^3+\cdots.\end{aligned} \tag{2.4}$$

多项式族 $\delta(s)=C_0(s)P_0(s)+C_1(s)P_1(s)+\cdots+C_m(s)P_m(s)$ 的边界多项式 $E\delta_A(s)$ 可表示为

$$E\delta_A(s)=\sum_{k=0}^{m}C_k(s)(\lambda_kKP_{k,i_k}+(1-\lambda_k)KP_{k,i_k'}), \tag{2.5}$$

其中 $A=(i_0,i_0',\cdots,i_m,i_m')$.

令 $KP_{k,i}=KP_{k,i'}$，则(2.5)式变成 $\delta(s)$ 的顶点多项式 $T\delta_A$

$$\begin{aligned}T\delta_A(s)&=C_0(s)KP_{0,i}+\cdots C_m(s)KP_{m,l},\\A&=(i,\cdots,e),\ i,\cdots,l=1,2,3,4.\end{aligned} \tag{2.6}$$

三、主 要 结 果

定理. 补偿器 $C(s)=[C_1(s),\cdots,C_m(s)]/C_0(s)$，则

1） $C(s)$ 镇定对象族 $P(s)=[P_1(s),\cdots,P_m(s)]^T/P_0(s)$ 的充要条件是 $C(s)$ 分别镇定 $P(s)$ 中的所有边界对象；

2） 若 $C(s)$ 满足假设 1，则 $C(s)$ 镇定对象族 $P(s)$ 的充要条件是 $C(s)$ 镇定 $P(s)$ 中的所有顶点对象；

3） 若 $C(s)$ 不满足假设 1，则 2) 中的充分性不成立.

四、定 理 的 证 明

引理 1. 考虑实系数多项式

$$P(s)=h(s^2)+sg(s^2), \tag{4.1}$$

这里 $h(\cdot),g(\cdot)$ 均为多项式并设其系数均为正，则 $P(s)$ 为 Hurwitz 的充要条件为复系数多项式：

$$P_1(s)=h(js)+jg(js), \tag{4.2}$$

$$P_2(s) = h(-js) + sg(-js), \tag{4.3}$$

(4.2)和(4.3)式均为 Hurwitz. 证明见文献[4].

引理 2. 若 $C_i(s)$ 满足假设 1,则函数 $d(\omega) = T_1(\omega)/T_2(\omega)$,当 $\omega \in [0, +\infty)$ 时函数 $d(\omega)$ 单调减. 其中

$$T_1(\omega) = C_{i1} - C_{i3}\omega + C_{i5}\omega^2 + \cdots, \tag{4.4}$$

$$T_2(\omega) = C_{i0} - C_{i2}\omega + C_{i4}\omega^2 + \cdots. \tag{4.5}$$

引理 3. 设 $p_1(s)$ 为一 n 阶多项式,并设 $p_2(s)$ 为另一多项式且其阶 $k < n - u$,且仅含奇次或偶次项,则对于任给一满足假设 1 的 u 阶多项式 $X(s)$, 多项式

$$p(s, \lambda) = p_1(s) + \lambda X(s) p_2(s). \tag{4.6}$$

当 $\lambda \in [0,1]$ 时为 Hurwitz 的充分必要条件是 $p(s,0)$ 及 $p(s,1)$ 为 Hurwitz.

证明. 利用文献[1]的结果和引理 1,2,本引理是显然的.

在上述 3 个引理的基础上,下面给出定理的证明.

先给出一基本事实如下:

设 $Z_1, Z_2 \subset \mathbb{C}$, 其边界分别为 $E[Z_1]$和 $E[Z_2]$, z_1, z_2 为两个任意固定的复数,则

$$E[z_1 Z_1 + z_2 Z_2] \subseteq z_1 E[Z_1] + z_2 E[Z_2]. \tag{4.7}$$

设 $C(s)$ 镇定 $P(s)$ 的所有边界,即

$$\begin{aligned} 0 \notin C_0(j\omega)[\lambda_0 KP_{0,i_0}(j\omega) + (1-\lambda_0) KP_{0,i'_0}(j\omega)] + \cdots \\ + C_m(j\omega)[\lambda_m KP_{m,i_m}(j\omega) + (1-\lambda_m) KP_{m,i'_m}(j\omega)] \end{aligned} \tag{4.8}$$

对所有的 $\omega \in \mathbb{R}, i = 0,1,2,\cdots,m$. 但存在 $\omega^* \in \mathbb{R}$, 使得

$$C_0(j\omega) P_0(j\omega) + \cdots + C_m(j\omega) P_m(j\omega) = 0. \tag{4.9}$$

由文献[5,6]可知

$$P_i(j\omega) = \sum_{k=1}^{4} \lambda_{i,k} KP_{i,k}(j\omega), \tag{4.10}$$

式中 $\sum_{k=1}^{4} \lambda_{i,k} = 1, \lambda_{i,k} \in [0,1], i = 0,1,2,\cdots,m.$

由(4.9)式有

$$C_0(j\omega) \sum_{k=1}^{4} \lambda_{0,k} KP_{0,k}(j\omega) + \cdots + C_m(j\omega) \sum_{k=1}^{4} \lambda_{m,k} KP_{m,k}(j\omega) = 0. \tag{4.11}$$

不失一般性,令 $\lambda_{i,3} = \lambda_{i,4} = 0$, 则(4.11)式即为(4.8)式. 显然这是相矛盾的. 故定理的第一部分证毕.

由定理的条件可知: 多项式族 $\delta(s)$ 的全部凸顶点 $T\delta_A(s)$ 是 Hurwitz 的. 反设存在 $\omega \in \mathbb{R}$, 使得

$$\delta(j\omega) = 0. \tag{4.12}$$

由 $\delta(j\omega)$ 在复平面上的连续性可知,存在 $\omega^* \in \mathbb{R}$, 使得 $0 \in E\delta_A(j\omega^*)$, 由基本事实(4.7)式可知

$$0 \in C_0(j\omega^*) EP_0(j\omega^*) + \cdots + C_m(j\omega^*) EP_m(j\omega^*).$$

亦即

$$C_0(j\omega^*)[\lambda_0 KP_{0,i_0}(j\omega^*) + (1-\lambda_0)KP_{0,i_0'}(j\omega^*) + \cdots$$
$$+ C_m(j\omega^*)[\lambda_m KP_{m,i_m}(j\omega^*) + (1-\lambda_m)KP_{m,i_m'}(j\omega^*) = 0. \tag{4.13}$$

不失一般性,选取

$$i_j = 2, i_j' = 3; i_m = 3, i_m' = 4; j = 0,1,2,\cdots,m-1.$$

(4.13)式成为

$$C_0(j\omega^*)[\lambda_0 KP_{0,2}(j\omega^*) + (1-\lambda_0)KP_{0,3}(j\omega^*) + \cdots$$
$$+ C_m(j\omega^*)[\lambda_m KP_{m,3}(j\omega^*) + (1-\lambda_m)KP_{m,4}(j\omega^*)] = 0.$$

不失一般性,令 $\lambda_0 = \cdots = \lambda_{m-1} = 0, \lambda_m \in [0,1]$, 于是有

$$C_0(j\omega^*)KP_{0,3}(j\omega^*) + \cdots + C_{m-1}(j\omega^*)KP_{m-1,3}(j\omega^*) +$$
$$+ C_m(j\omega^*)[\lambda_m KP_{m,3}(j\omega^*) + (1-\lambda_m)KP_{m,4}(j\omega^*)] = 0. \tag{4.14}$$

即

$$T\delta_{A1}(j\omega^*) + \lambda_m C_m(j\omega^*)[KP_{m,3}(j\omega^*) - KP_{m,4}(j\omega^*)] = 0. \tag{4.15}$$
$$A1 = (3,3,\cdots,3,4), \lambda_m \in [0,1].$$

显然,当 $\lambda_m = 0$ 时, (4.15)式的左端为 $T\delta_{A1}(j\omega^*)$, 当 $\lambda_m = 1$ 时, (4.15)式的左端为 $T\delta_{A2}(j\omega^*)$, $(A2 = (3,3,\cdots,3))$. 由假设知: $T\delta_{A1}(s)$ 及 $T\delta_{A2}(s)$ 均为 Hurwitz. 不失一般性, 可令 $\text{degree}\{T\delta_{A1}(s)\} > \text{degree}\{C_m KP_{m,3}(s) - C_m(s)KP_{m,4}(s)\}$, 由引理 3 的结论知(4.15)式不成立. 于是定理的第二部分证毕.

定理的第三部分的证明可利用文献[3]的反例给出,故此处省略.

五、结　论

本文给出的拓广的盒子定理的结果是基于假设 1 的条件. 对于一般的不确定性对象族,对 $C(s)$ 的限制是充分的.

参 考 文 献

[1] Chapellat, H. and Bhattacharyya, S. P., A Generalization of Kharitonov's Theorem: Robust Stability of Interval Plants, *IEEE Trans. on Automatic Control*, **34**(1989), 3, 306—311.

[2] Hollot, C. H. et al., Extreme Point Results for Robust Stabilization of Interval Plants with First Order Compensator, Proc. of American Control Conference, San Diego, 1990.

[3] Hoolt, C. H. and Yang, F., Robust Stabilization of Interval Plants Using Lead ot Lag Cmpensators, *Systems and Control Letters*, **14**(1990), 9—12.

[4] Jury, E. I., Innres and Stability of Dynamic Systems, Wiley, New York, 1974.

[5] Kharitonov, V. L., Asymptotic Stability of an Equilibrium Position of a Family of Systems of Linear Differential Equations, *Differential'nye Uraveniya*, **14**(1978) 1483—1485.

[6] Barmis, B. R., A Generalization of Kharitonov's Four-polynomial Concept ofr Robust Stability Problems with Linear Dependent Coefficient Perturbations, *IEEE Trans. on Automatic Control*, **34**(1989), 2, 157—165.

THE EXTENDED BOX THEOREM

GU DONGMEI

(Institute of Automation, Academia Sinica, Beijing 100080)

ABSTRACT

This paper shows the robust stablility of closed-loop systems with rational tranfer function, and gives a necessary and sufficient condition for robust stability of polynomial family $\delta(s) = Q_0(s)P_0(s) + \cdots + Q_m(s)P_m(s)$. It states a necessary and sufficient finite checking for robust stability of polynomial family $\delta(s)$ when $Q_i(s)$ satisfies some assumptions, and when $Q_i(s)$ is a general polynomial, a so-called edge-checking for robust stability of $\delta(s)$ is obtained.

Key words: Interval rational function; kharitonov's Theorem, robust stability of closed-loop systems.

国际自控联第七届交通系统工程 (IFAC TS'94) 学术讨论会征文

IFAC TS'94 将于 1994 年 7 月 23—25 日在天津召开，组织委员会主席为李光泉教授，国际程序委员会双主席，分别为法国国家交通安全研究所 J. M. Blosseville 博士和天津大学刘豹教授。

IFAC TS'94 是 IFAC 系列会议——交通系统学术讨论会的第七届会议。本届会议宗旨是将交通系统系列学术会议扩展，交流各种交通系统控制方面的研制和发展经验，同时也检查和探讨在控制信息系统、人工智能、知识基础与新型材料方面的新理论和新技术如何用来推动交通系统的规划、设计、建造、操作和维护。

本届会议的征文内容是：在各种交通领域的实时控制与监督；新型交通模型；在各类交通领域中应用的先进通信系统；先进的交通测量仪器及传感器；大规模或先进交通管理系统；先进驾驶信息系统；自动车辆；人的因素以及人机交互；软件安全性；教育与培训；新型交通系统的社会影响及有关其它领域。本届会议将附设小型展览，以展出交通系统与交通工程方面新的产品及研制品。

有关时间表及会议秘书处地址如下：

500 英文词的摘要四份在 1993.7.10 前寄交 IFAC TS'94 秘书处；

论文接收与否通知将在 1993.11.1 发出；论文全文将在 1994.1.15 前寄出；

1994.7.23—25 在中国天津召开 IFAC TS'94。

会议秘书处地址：中国・天津 天津大学系统工程研究所 (IFAC TS'94 秘书处) 贺国光教授 邮编 300072

Fax: 022—358329 Tel: 022—353701—2180