第19卷 第4期　　自 动 化 学 报　　Vol. 19, No. 4
1993 年 7 月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　July, 1993

矩文

关于自适应控制系统的鲁棒稳定性条件

顾兴源　邵诚
（东北工学院自动控制系，沈阳　110006）

摘　　要

本文用统一的方法对于由自适应控制系统的鲁棒稳定性分析提出的一类时变动态系统的有界解问题给出了一个充分条件. 它为鲁棒自适应控制器的设计以及进行相应的理论分析带来了方便.

关键词: 自适应控制，时变系统，鲁棒稳定性.

一、问题的提出

从实际应用的角度来说，鲁棒稳定性是保证自适应控制算法可以应用的最基本和最重要的条件。尽管在理论上这是一件比较困难的工作，但仍有大量结果涌现出来. Egardt[1], Samson[2] 及 Kreisselmeier[3] 等人讨论了在有界扰动情况下的鲁棒自适应控制问题；Kreisselmeier[4] 及 Middleton[5,6] 等人讨论了在有未建模动态情况下的鲁棒自适应控制问题；Middleton[7] 及 Wen[8] 等人还讨论了时变系统的鲁棒自适应控制问题. 在进行鲁棒稳定性分析时，虽然他们提出的条件都具有一定的概括性，但用来处理一般的鲁棒稳定性分析问题还有很大的局限性. 为此，Giri[9] 等人对这一问题进行了一些研究. 他们指出，很多自适应控制系统的鲁棒稳定性分析都可转化成关于如下时变动态系统的有界解问题:

$$X(t+1)=F(t)X(t)+W(t)+V(t) \tag{1}$$

其中 $\{X(t)\}$ 是由实际对象的输入和输出构成的状态向量序列；$\{F(t)\}$ 是由对象的系统参数和参数估计或由控制器的参数和参数估计组成的矩阵序列；$\{W(t)\}$ 是由时变参数及未建模动态的影响构成的向量序列；$\{V(t)\}$ 是由外部扰动的影响和参考信号产生的向量序列，所以一般都假定 $V(t)$ 是有界的. 在自适应算法的设计中，目的都是要使对象的输出能跟随指定的参考信号，并保证闭环系统的输入和输出有界 (BIBO 稳定). 为此，针对不同的被控对象，通过提出不同的模型假设以及选择合适的控制律和参数估计方案，最终归结为要使得(1)式中的 $F(t)$ 和 $W(t)$ 具有某些性质来保证(1)式能够给出有界的 $X(t)$. 因此，如果能够仅用一些关于 $F(t)$ 和 $W(t)$ 的比较弱的条件建立动态方程 (1) 的解的有界性，将为自适应控制算法的设计提供采用较为松弛的模型假设的可能性，从而也为采用更为有效的控制策略及参数估计方案去处理更为复杂的实际对象提供了方

本文于1991年12月27日收到.

便.

本文正是为上述目的而提出的．一个新的充分条件提出在这里．证明的方法也与文献 [9] 有着很大不同．这个充分条件以及相应的分析方法对于解决自适应控制系统的鲁棒稳定性具有一定意义.

二、主要结果

首先给出如下基本假设

1）$F(t)$ 有界并对任意时刻 $t\geqslant 0$ 一致地有

$$\rho(F(t))\leqslant\rho_F<1,\tag{2}$$

其中 $\rho(\cdot)$ 表示矩阵的谱半径；

2）存在非负常数 μ 使得

$$\|W(t)\|\leqslant\mu m(t)\tag{3}$$

其中非负序列 $\{m(t)\}$ 满足

$$m(t)\leqslant\sigma m(t-1)+\sum_{\kappa=0}^{n}\|X(t-\kappa)\|+m_0\tag{4}$$

其中 $0\leqslant\sigma<1$，$0\leqslant m_0<\infty$，n 为某个正整数，$m(0)\geqslant 0$；

3）$V(t)$ 有界.

对上述假设作一些说明.

（1）在自适应控制系统中，假设 1）相关于闭环系统的极点．通过采用象极点配置等控制策略，都能保证假设 1）成立[1-8].

（2）在文献[4]中，称满足假设 2）的 $W(t)$ 是相对有界的．这里考虑了 $W(t)$ 相关于过去(包括现在)的 n 步输入输出的一般情况，因而更便于处理模型阶次不匹配的鲁棒自适应控制问题．然而很多人都是在使用一些特殊的自适应算法的情况下来获得鲁棒稳定性的(比如文献[4—8]).

在给出本文结论之前先证明如下预备引理.

预备引理．设非负实序列 $\{Z(t)\},\{a(t)\},\{b(t)\}$ 对于任意整数 $t>0$ 满足

$$Z(t)\leqslant a(t)+\sum_{s=0}^{t-1}\rho^{t-s}b(s)Z(s),\tag{5}$$

其中常数 $\rho\geqslant 0$．若存在常数 $\rho^*>0$ 使得对任意 $t\geqslant 0$：$\rho^*b(t)\leqslant r<1$，则对于 ρ：$0\leqslant\rho<\min(1-r,\rho^*)$

（1）当 $a(t)$ 有界时，$Z(t)$ 有界；

（2）当 $a(t)\to 0(t\to+\infty)$ 时，$Z(t)\to 0$ $(t\to+\infty)$.

证明．将 (5) 式乘以 ρ^{-t} 并由离散的 Grownwall 引理[10]有

$$\rho^{-t}Z(t)\leqslant\rho^{-t}a(t)+\sum_{s=0}^{t-1}\Gamma(t-1,s+1)b(s)\rho^{-s}a(s),\tag{6}$$

其中 $\Gamma(t-1,s+1)=\prod_{\tau=s+1}^{t-1}(1+b(\tau))$，$\Gamma(t-1,t)=1$．于是对于 ρ：$0\leqslant\rho<$

$\min(1-r,\rho^*)$ 有

$$\rho^{t-s}T(t-1,s+1)=\rho\prod_{\tau=s+1}^{t-1}(\rho+\rho b(\tau))\leqslant\rho(\rho+\gamma)^{t-s-1}$$

从而由 (6) 式有

$$Z(t)\leqslant a(t)+\sum_{s=0}^{t-1}\rho^{t-s}T(t-1,s+1)b(s)a(s)\leqslant a(t)+\sum_{s=0}^{t-1}(\rho+\gamma)^{t-s-1}\rho b(s)a(s)$$

$$\leqslant a(t)+\gamma\sum_{s=0}^{t-1}(\rho+\gamma)^{t-s-1}a(s) \tag{7}$$

于是由 (7) 式可知

(1) 当 $a(t)$ 有界时，$Z(t)$ 的有界性显然；

(2) 对于任给时刻 $t_0>0$

$$Z(t)\leqslant a(t)+\gamma\sum_{s=0}^{t_0-1}(\rho+\gamma)^{t-s-1}a(s)+\gamma\sum_{s=t_0}^{t-1}(\rho+\gamma)^{t-s-1}a(s)$$

$$\leqslant a(t)+\frac{\gamma(\rho+\gamma)^{t-t_0}}{1-\rho-\gamma}\max_{0\leqslant s\leqslant t_0-1}\{a(s)\}+\frac{\gamma}{1-\rho-\gamma}\max_{t_0\leqslant s\leqslant t-1}\{a(s)\}$$

由此式不难推得：当 $a(t)\to 0$ $(t\to+\infty)$ 时必有 $Z(t)\to 0$. 证毕

本文的主要结果由下面的引理和推论给出.

引理. 设动态系统 (1) 满足基本假设 1)—3). 则当 ρ_F,μ,σ 充分小时，对任何有界的初始条件，动态方程 (1) 的解是有界的.

证明. 对于任给时刻 t_0，记 $F_0=F(t_0)$，$X_0=X(t_0)$，由动态方程 (1) 的解有

$$X(t)=\sum_{\tau=t_0}^{t-1}F_0^{t-\tau-1}X(\tau+1)-\sum_{\tau=t_0}^{t-1}F_0^{t-\tau}X(\tau)+F_0^{t-t_0}X_0$$

$$=\sum_{\tau=t_0}^{t-1}F_0^{t-\tau-1}(F(\tau)-F_0)X(\tau)+\sum_{\tau=t_0}^{t-1}F_0^{t-\tau-1}W(\tau)$$

$$+\sum_{\tau=t_0}^{t-1}F_0^{t-\tau-1}V(\tau)+F_0^{t-t_0}X_0 \tag{8}$$

由假设 1)，对任意小的 $\varepsilon>0$ 存在 $\rho\in(\rho_F,\rho_F+\varepsilon)$ 及 $M_F\geqslant 0$ 使得对于所有 $t\geqslant 0$ 及正整数 s 有

$$\|(F(t))^s\|\leqslant M_F\rho^s \tag{9}$$

其中 $\|\cdot\|$ 表示 Euclidean 范数. 于是由 (8) 式有

$$\|X(t)\|\leqslant 2M_F^2\sum_{\tau=t_0}^{t-1}\rho^{t-\tau}\|X(\tau)\|+M_F\sum_{\tau=t_0}^{t-1}\rho^{t-\tau-1}\|W(\tau)\|$$

$$+M_F\sum_{\tau=t_0}^{t-1}\rho^{t-\tau-1}\|V(\tau)\|+M_F\rho^{t-t_0}\|X_0\| \tag{10}$$

考虑动态方程

$$\tilde{m}(t)=\sigma\tilde{m}(t-1)+\sum_{\kappa=0}^{n}\|X(t-\kappa)\|+m_0 \tag{11}$$

由 (4) 式知：当 $\tilde{m}(0) \geqslant m(0)$ 时，对任意 $t \geqslant 0$ 有 $\tilde{m}(t) \geqslant m(t)$. 利用方程 (11) 的解和 (3) 式有

$$\sum_{\tau=t_0}^{t-1} \rho^{t-\tau-1}\|W(\tau)\| \leqslant \mu \sum_{\tau=t_0+1}^{t-1} \rho^{t-\tau-1} m(\tau) + \mu \rho^{t-t_0-1} m(t_0)$$

$$\leqslant \mu \tilde{m}(t_0) \sum_{\tau=t_0+1}^{t-1} \rho^{t-\tau-1}\sigma^{\tau-t_0} + \mu \rho^{t-t_0-1} m(t_0) + \mu \sum_{\tau=t_0+1}^{t-1} \sum_{\tau_1=t_0+1}^{\tau} \sigma^{\tau-\tau_1}\rho^{t-\tau-1} m_0$$

$$+ \mu \sum_{\tau=t_0+1}^{t-1} \sum_{\tau_1=t_0+1}^{\tau} \rho^{t-\tau-1}\sigma^{\tau-\tau_1}\left(\sum_{\kappa=0}^{n} \|X(\tau_1-\kappa)\|\right). \tag{12}$$

对于充分小的 $\sigma \in [0, \rho_F)$ 有

$$\sum_{\tau=t_0+1}^{t-1} \rho^{t-\tau-1}\sigma^{\tau-t_0} = \rho^{t-1}\sigma^{-t_0} \sum_{\tau=t_0+1}^{t-1} \left(\frac{\sigma}{\rho}\right)^{\tau} \leqslant \frac{\sigma}{\rho-\sigma} \rho^{t-t_0-1}. \tag{13}$$

$$\sum_{\tau=t_0+1}^{t-1} \sum_{\tau_1=t_0+1}^{\tau} \sigma^{\tau-\tau_1}\rho^{t-\tau-1} \leqslant \frac{1}{1-\sigma} \cdot \frac{1}{1-\rho}. \tag{14}$$

令

$$g(\tau, \tau_1) = \begin{cases} \sigma^{\tau-\tau_1}, & \text{当 } \tau \geqslant \tau_1 \text{ 时} \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$$

那么

$$\sum_{\tau=t_0+1}^{t-1} \sum_{\tau_1=t_0+1}^{\tau} \rho^{t-\tau-1}\sigma^{\tau-\tau_1}\left(\sum_{\kappa=0}^{n} \|X(\tau_1-\kappa)\|\right)$$

$$= \sum_{\tau=t_0+1}^{t-1} \sum_{\tau_1=t_0+1}^{t-1} \rho^{t-\tau-1} g(\tau, \tau_1)\left(\sum_{\kappa=0}^{n} \|X(\tau_1-\kappa)\|\right)$$

$$= \sum_{\tau_1=t_0+1}^{t-1} \sum_{\tau=\tau_1}^{t-1} \rho^{t-\tau-1}\sigma^{\tau-\tau_1}\left(\sum_{\kappa=0}^{n} \|X(\tau_1-\kappa)\|\right)$$

$$= \sum_{\tau_1=t_0+1}^{t-1} \rho^{t-1}\sigma^{-\tau_1}\left(\sum_{\kappa=0}^{n} \|X(\tau_1-\kappa)\|\right) \sum_{\tau=\tau_1}^{t-1} \left(\frac{\sigma}{\rho}\right)^{\tau}$$

$$\leqslant \frac{\rho}{\rho-\sigma} \sum_{\tau_1=t_0+1}^{t-1} \sum_{\kappa=0}^{n} \|X(\tau_1-\kappa)\| \rho^{t-\tau_1-1}$$

$$= \frac{\rho}{\rho-\sigma} \sum_{\tau_1=t_0+1}^{t-1} \sum_{s=\tau_1-n}^{\tau_1} \rho^{t-\tau_1-1}\|X(s)\|. \tag{15}$$

令

$$f_n(\tau_1, s) = \begin{cases} 1, & \text{当 } \tau_1 - n \leqslant s \leqslant \tau_1 \text{ 时} \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

那么由(15)式有

$$\sum_{\tau=t_0+1}^{t-1} \sum_{\tau_1=t_0+1}^{\tau} \rho^{t-\tau-1}\sigma^{\tau-\tau_1}\left(\sum_{\kappa=0}^{n} \|X(\tau_1-\kappa)\|\right) \leqslant \frac{\rho}{\rho-\sigma} \sum_{\tau_1=t_0+1}^{t-1} \sum_{s=t_0+1-n}^{t-1} \rho^{t-\tau_1-1} f_n(\tau_1, s)\|X(s)\|$$

$$\leqslant \frac{\rho}{\rho-\sigma} \sum_{s=t_0+1-n}^{t-1} \left(\sum_{\tau_1=s}^{s+n} \rho^{t-\tau_1-1}\right) \|X(s)\|$$

$$\leqslant \frac{1}{(\rho-\sigma)(1-\rho)\rho^n} \sum_{s=t_0+1-n}^{t-1} \rho^{t-s}\|X(s)\| \tag{16}$$

将式(13),(14)和(16)代入(12)式后再将(12)式代入(10)式有

$$\|X(t)\| \leqslant a(t) + \sum_{s=0}^{t-1} b(s)\rho^{t-s}\|X(s)\| \tag{17}$$

其中

$$a(t) = M_F \sum_{\tau=t_0}^{t-1} \rho^{t-\tau-1}\|V(\tau)\| + M_F\rho^{t-t_0}\|X_0\| + \frac{\mu\sigma M_F}{\rho-\sigma}\rho^{t-t_0-1}\widetilde{m}(t_0)$$

$$+ \mu M_F\rho^{t-t_0-1}m(t_0) + \frac{\mu M_F m_0}{(1-\sigma)(1-\rho)},$$

$$b(t) = 2M_F^2 + \frac{\mu M_F}{(\rho-\sigma)(1-\rho)\rho^n}.$$

由假设3)易见 $a(t)$ 是有界的;并且当 μ, ρ_F 充分小时, 存在 $\rho^* \in (\rho_F, \rho_F+\varepsilon)$ 使得 $\rho^* b(t) \leqslant \gamma < 1$; 故由预备引理结论得证.

推论. 设动态方程(1)满足基本假设1)—3),并且 $V(t)=0$, $m_0=0$. 则当 ρ_F, μ, σ 充分小时,对于任何有界的初始条件,其解 $X(t)\to 0(t\to+\infty)$.

证明. 当 $V(t)=0$, $m_0=0$ 时,在上面引理的证明中,

$$a(t) = M_F\rho^{t-t_0}\|X_0\| + \frac{\mu\sigma M_F}{\rho-\sigma}\rho^{t-t_0-1}\widetilde{m}(t_0) + \mu M_F\rho^{t-t_0-1}m(t_0),$$

故有 $\lim\limits_{t\to+\infty} a(t)=0$. 由(17)式和预备引理结论得证. 证毕

三、结 论

本文提出的充分条件表明:只要自适应控制系统具有稳定的闭环极点,并且这些极点充分地靠近原点,那么对于相对有界的未建模动态和有界的外部扰动,自适应系统能保证是鲁棒稳定的. 很多鲁棒稳定的自适应算法(比如[4,8])也能用本文的充分条件得到验证.

参 考 文 献

[1] Egardt, B., Stability of Adaptive Controllers, Lecture Notes in Control and Information Sciences, New York: Springer-Verlag, 1979.

[2] Kreisselmeier, G. and Narendra, K. S., Stable Model Reference Adaptive Control in the Presence of Bounded Disturbances, *IEEE Trans.* **AC-27**(1982), 1169—1175.

[3] Samson, C., Stability Analysis of Adaptively Controlled System Subject to Bounded Disturbances, *Automatica*, **19**(1983), 81—86.

[4] Kreisselmeier, G. and Anderson, B. D. O., Robust Model Reference Adaptive Control, *IEEE Trans.* **AC-31**(1986), 127—133.

[5] Middleton, R. H., Goodwin, G. C., Hill, D. J. and Mayne, D. Q., Design Issues in Adaptive Control, *IEEE Trans.* **AC-33**(1988), 50—58.

[6] Middleton, R. H., Goodwin, G. C. and Wang, S., On the Robustness of Adaptive Controllers Using Relative Deadzones, *Automatica*, **25**(1989), 889—896.

[7] Middleton, R. H. and Goodwin, G. C., Adaptive Control of Time-varying Linear Systems, *IEEE Trans.*

AC-33(1988), 150—155.

[8] Wen, C. A. and Hill, D. J., Robustness of Adaptive Control Without Deadzones, Data Normalization or Persistence of Excitation, *Automatica*, **25**(1989), 943—947.

[9] Giri, F., Msaad, M., Dion, J. M. and Dugard, L., General Lemma for the Stability Analysis of Discrete-time Adaptive Control, Int. J. Control, **51**(1990), 283—288.

[10] Desoer, C. A. and Vidyasagar, M., Feedback Systems: Input-Output Properties, Academic Press, New York, 1975.

ON THE ROBUSTNESS STABILITY CONDITION FOR ADAPTIVE CONTROL SYSTEMS

Gu Xingyuan and Shao Cheng

(Dept. of Automatic Control, Northeast University of Technology, Shenyang 110006)

Abstract

In this paper, with a unified approach a sufficient condition is proposed to ensure the boundedness of the solutions of a class of time-varying systems which result from robust stability analysis of certain adaptive control systems. This condition is useful for the designer to construct robust adaptive control algorithm and to analyze the stability of the system.

Key words: Adaptive control; time-varying system; robust stability.