第19卷 第4期　　自 动 化 学 报　　Vol. 19, No. 4
1993年7月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　July, 1993

一类非线性动态系统的数字仿真

蒋珉　　柴干
(东南大学自动化研究所,南京 210018)

摘　　要

针对工业控制中常见的一类非线性动态系统，本文提出了一种仿真算法．与其它同阶精度算法相比,具有精度高、稳定性好和计算量小等优点.文中给出了五个不同类型的仿真算例,结果表明,该算法是有效可行的.

关键词: 仿真,非线性动态系统,算法.

一、引　　言

考虑如(1)式所描述的非线性动态系统[1]

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f[t, x(t)], \tag{1}$$

其中 $x(t) \in R^n, f[t, x(t)] \in R^n$, A 为 $n \times n$ 阶常矩阵，其特征值 $\lambda_i (i = 1, \cdots, n)$ 的实部小于或等于零．并常有

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n} |R_e \lambda_i| \gg \min_{1 \leqslant i \leqslant n} |R_e \lambda_i|, \|A\| > \left\| \frac{\partial f}{\partial x} \right\|$$

成立．式中范数为矩阵的最大特征值模．

由于矩阵A的作用,通常系统(1)为病态系统(stiff 系统)．用目前比较成熟的方法对其进行仿真,或者由于算法的数值稳定域太小,使仿真步长必须取得很小；或者计算量很大，导致仿真速度急剧下降．因此均不适合进行快速和实时仿真．本文的工作正是为克服这些算法的缺陷而进行的．

二、算 法 推 导

1.若干有用的公式

定义

$$G_i(h) \triangleq \frac{1}{h^i} e^{Ah} \int_0^h s^i e^{-As} ds. \tag{2}$$

则下列递推公式成立

本文于1991年6月11日收到.

$$e^{Ah}=AG_0(h)+I,\quad G_{i-1}(h)=\frac{h}{i}[AG_i(h)+I], \tag{3),(4}$$

$$G_i(h)=i!h\sum_{j=i+1}^{\infty}\frac{(Ah)^{j-i-1}}{j!}, \tag{5}$$

$$G_i(2h)=\frac{1}{2^i}\left[e^{Ah}G_i(h)+\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}G_j(h)\right]. \tag{6}$$

2.算法的推导

在 $[kh,(k+1)h]$ 上,系统(1)的解析解可写为

$$x[(k+1)h]=e^{Ah}x(kh)+\int_{kh}^{(k+1)h}e^{A[(k+1)h-t]}f[t,x(t)]\mathrm{d}t$$

$$\xlongequal{t=kh+s}e^{Ah}x(kh)+e^{Ah}\int_0^h e^{-As}f[kh+s,x(kh+s)]\mathrm{d}s. \tag{7}$$

取插值基点

$$t_{k+1}=(k+1)h,t_k=kh,t_{k-1}=(k-1)h,\cdots,t_{k-l+1}=(k-l+1)h,$$

用 Newton 后差公式 $N_{l+1}(t)$ 表示 $f[t,x(t)]$ 在$[t_{k-l+1},t_{k+1}]$上的 l 次插值多项式,有[2]

$$\boldsymbol{N}_{l+1}(t)=\boldsymbol{f}(k+1)+\frac{t-t_{k+1}}{1!h}\nabla\boldsymbol{f}(k+1)+\frac{(t-t_{k+1})(t-t_k)}{2!h^2}\nabla^2\boldsymbol{f}(k+1)$$

$$+\cdots+\frac{(t-t_{k+1})(t-t_k)\cdots(t-t_{k-l+2})}{l!h^l}\nabla^l\boldsymbol{f}(k+1)$$

$$\xlongequal{t=kh+s}\boldsymbol{f}(k+1)+\frac{s-h}{1!h}\nabla\boldsymbol{f}(k+1)+\frac{(s-h)s}{2!h^2}\nabla^2\boldsymbol{f}(k+1)$$

$$+\cdots+\frac{(s-h)s\cdots[s+(l-2)h]}{l!h^l}\nabla^l\boldsymbol{f}(k+1)$$

$$=\boldsymbol{f}(k+1)+\frac{s-h}{1!h}\nabla\boldsymbol{f}(k+1)+\sum_{i=2}^{l}\frac{\sum_{j=0}^{i-1}d_{j,i}s^{i-j}}{i!h^i}\nabla^i\boldsymbol{f}(k+1), \tag{8}$$

其中

$$\boldsymbol{f}(k+1)=\boldsymbol{f}[t_{k+1}\boldsymbol{x}(t_{k+1})],\quad \nabla\boldsymbol{f}(k+1)=\boldsymbol{f}(k+1)-\boldsymbol{f}(k)$$

$$\nabla^2\boldsymbol{f}(k+1)=\nabla\boldsymbol{f}(k+1)-\nabla f(k),\cdots\cdots;$$

$$d_{0,i}=1,d_{1,i}=g_{1,i}-hg_{0,i},\quad d_{2,i}=g_{2,i}-hg_{1,i},\cdots,\quad d_{i-2,i}=g_{i-2,i}-hg_{i-3,i},$$

$$d_{i-1,i}=-hg_{i-2,i};$$

$$g_{0,i}=1,\quad g_{1,i}=h\sum_{j=0}^{i-2}j,\quad g_{2,i}=h^2\sum_{\substack{p,j=1\\(p<j)}}^{i-2}p\cdot j,g_{3,i}=h^3\sum_{\substack{r,p,j=1\\(r<p<j)}}^{i-2}r\cdot p\cdot j,\cdots,g_{i-2,i}$$

$$=h^{i-2}(i-2)!.$$

将(8)式代入(7)式,得

$$\boldsymbol{x}(k+1)=e^{Ah}\boldsymbol{x}(k)+e^{Ah}\int_0^h e^{-As}\left[\boldsymbol{f}(k+1)+\frac{s-h}{1!h}\nabla\boldsymbol{f}(k+1)\right.$$

$$+\sum_{i=2}^{l}\frac{\sum_{j=0}^{i-1}d_{j,i}s^{i-j}}{i!h^i}\nabla^i f(k+1)\Bigg]ds$$

$$=e^{Ah}x(k)+G_0(h)f(k+1)+[G_1(h)-G_0(h)]\nabla f(k+1)$$

$$+\sum_{i=2}^{l}\frac{\sum_{j=0}^{i-1}d_{j,i}G_{i,j}(h)/h^j}{i!}\nabla^i f(k+1).$$

最后可得仿真递推公式

$$x_{k+1}=e^{Ah}x_k+\sum_{i=1}^{l}\Phi_i(h)f(t_{k+1-i},x_{k+1+i})+\Phi_0(h)f(t_{k+1},x_{k+1}),\tag{9}$$

其中 $\Phi_i(h)(i=0,1,\cdots,l)$ 为 $G_i(h)$ 的线性组合．相应的局部截断误差为

$$T_{l+1}(k+1)=\frac{e^{Ah}}{(l+1)!}\int_0^h e^{-As}f^{(l+1)}(kh+\eta h,x_{k+\eta})\prod_{j=-1}^{l-1}(s+jh)ds,\quad -l<\eta<1\tag{10}$$

同理，在(9)式的推导中，将基点 t_{k+1} 去掉，可得算法的实时递推公式和局部截断误差为

$$x_{k+1}=e^{Ah}x_k+\sum_{i=1}^{l}\Phi_i^*(h)f(t_{k+1-i},x_{k+1-i}),\tag{11}$$

$$T_l^*(k+1)=\frac{1}{l!}e^{Ah}\int_0^h e^{-As}f^{(l)}(kh+\eta^*h,x_{k+\eta^*})\prod_{j=0}^{l-1}(s+jh)ds,-l<\eta^*<0\tag{12}$$

3．若干预测-校正公式

用 l 阶实时公式(11)和 $l+1$ 阶非实时公式(9)组成预测-校正公式，得到仿真的一般递推公式

$$\begin{cases}x_{k+1}^*=e^{Ah}x_k+\sum_{i=1}^{l}\Phi_i^*(h)f(t_{k+1-i},x_{k+1-i}), & (13.1)\\ x_{k+1}=e^{Ah}x_k+\sum_{i=1}^{l}\Phi_i(h)f(t_{k+1-i},x_{k+1-i})+\Phi_0(h)f(t_{k+1},x_{k+1}^*); & (13.2)\end{cases}$$

$l=1$（二阶公式）

$$\begin{cases}x_{k+1}^*=e^{Ah}x_k+G_0(h)f(t_k,x_k), & (14.1)\\ x_{k+1}=e^{Ah}x_k+[G_0(h)-G_1(h)]f(t_k,x_k)+G_1(h)f(t_{k+1},x_{k+1}^*); & (14.2)\end{cases}$$

$l=2$（三阶公式）

$$\begin{cases}x_{k+1}^*=e^{Ah}x_k-G_1(h)f(t_{k-1},x_{k-1})+[G_0(h)+G_1(h)]f(t_k,x_k), & (15.1)\\ x_{k+1}=e^{Ah}x_k+\frac{1}{2}[-G_1(h)+G_2(h)]f(t_{k-1},x_{k-1})+[G_0(h)-G_1(h)]f(t_k,x_k)\\ \qquad+\frac{1}{2}[G_1(h)+G_2(h)]f(t_{k+1},x_{k+1}^*); & (15.2)\end{cases}$$

$l=3$（四阶公式）

$$
\left\{
\begin{aligned}
x_{k+1}^{*} &= e^{Ah}x_k + \frac{1}{2}[G_1(h)+G_2(h)]f(t_{k-2},x_{k-2}) - [2G_1(h) \\
&\quad + G_2(h)]f(t_{k-1},x_{k-1}) + \left[G_0(h)+\frac{3}{2}G_1(h)+\frac{1}{2}G_2(h)\right]f(t_k,x_k), \quad (16.1)\\
x_{k+1} &= e^{Ah}x_k + \frac{1}{6}[G_1(h)-G_3(h)]f(t_{k-2},x_{k-2}) + \frac{1}{2}[-2G_1(h)+G_2(h) \\
&\quad + G_3(h)]f(t_{k-1},x_{k-1}) + \left[G_0(h)+\frac{1}{2}G_1(h)-G_2(h)-\frac{1}{2}G_3(h)\right] \quad (16.2)\\
&\quad \times f(t_k,x_k) + \frac{1}{6}[2G_1(h)+3G_2(h)+G_3(h)]f(t_{k+1},x_{k+1}^{*}).
\end{aligned}
\right.
$$

三、讨 论

由于 $e^{Ah},\Phi_i^*(h),\Phi_i(h)$ $(i=0,1,\cdots,l)$ 均与序号 k 无关,可在仿真开始前预先算好,而仿真递推中 $f(t_{k+1-i},x_{k+1-i})$ $(i=2,3,\cdots,l)$ 均为存贮值，故计算量可以大大减少。事实上,(13)式的每步计算量与同阶 RK 法大致相当。

由文献[3]可知,预测、校正公式分别为 $l,l+1$ 阶与二者均为 $l+1$ 阶的整体效果相同,所组成的预测-校正公式均为 $l+1$ 阶收敛。

可以证明,本文提出的所有算法公式都是无条件稳定的(即 A-稳定的)。

四、仿真算例与仿真结果

在 Gould Concept 32167 超级小型机上对许多 Stiff 系统进行了仿真。根据文献[4],从五种类型中各选出一例，并分别用不同阶次的公式与 RK-4 法进行比较。其中作为比较基础的“精确值”是用该例中最小步长的百分之一为步长由 RKF-5 法计算所得。

算例 1. 线性具有实特例值

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -10^4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}e^{-0.01t}\sin 100t,\quad \begin{bmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix},\ t\in[0,10]$$

算例 2. 线性具有非实特征值

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1000 & -1000 & 0\\ 100 & -1000 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t\\ t^2\\ t^3\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\\ x_3(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix},\ t\in[0,7]$$

算例 3. 非线性耦合

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0&0&0\\0&-10&0&0\\0&0&-40&0\\0&0&0&-100\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\ x_1^2\\ 4(x_1^2+x_2^2)\\ 10(x_1^2+x_2^2+x_3^2)\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\\ x_3(0)\\ x_4(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\\ 1\end{bmatrix},\ t\in[0,2]$$

算例 4. 非线性具有实特征值

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -1 & -1999\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x_1x_2^2+x_2^2\\ x_1^2x_2+2x_1x_2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix},t\in[0,12]$$

算例 5. 非线性具有非实特征值

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\ 0&-40&20&0\\ 0&-20&-40&0\\ 0&0&0&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\\ x_2x_3+e^{-80x_1}(1-2\cos^2(20x_1))\end{bmatrix},\begin{bmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\\ x_3(0)\\ x_4(0)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 1\\ 1\end{bmatrix},\ t\in[0,5]$$

仿真结果分别见于表 1～表 5，其中 T 为总计算时间．从表中可知

1）当 h 在 RK-4 稳定域内时，RK-4 与文中四阶算法公式的精度相仿，比低阶公式的精度略高．

2）当 h 落到 RK-4 稳定域外时，RK-4 仿真结果发散；即使当 h 取到 RK-4 最大允许步长的几十倍甚至上百倍时，新算法的各阶公式仿真结果仍保持了足够的精度．这充分表明了其优越性．

3）仿真预计算时间(计算 e^{Ah}、$\Phi_i^*(h)$、$\Phi_i(h)$) 占了总计算时间中相当一部分(步长越大，所占比例越大)．而仿真递推时间并不大于 RK-4 仿真递推时间．因此新算法适合于实时仿真．

表 1　算例 1 仿真结果

h	RK-4	(16.2)式
0.0001	$1.65530E-06$	$1.34584E-06$
0.0005	$9.73996E+75$	$4.46819E-06$
0.005	$4.83265E+76$	$7.12500E-04$

表 2　算例 2 仿真结果

h	RK-4	(15.1)式
0.001	$2.81779E-04$	$6.52915E-04$
0.01	$3.56356E+75$	$9.23554E-04$
0.1	$4.46060E+76$	$3.38770E-03$

表 3　算例 3 仿真结果

h	RK-4	(14)式
0.001	$2.79317E-09$	$1.34541E-07$
0.01	$5.38165E-08$	$1.49071E-05$
0.1	$3.48053E+49$	$1.13383E-03$

表 4　算例 4 仿真结果

h	RK-4	(16)式
0.001	$6.55269E-08$	$1.03204E-06$
0.01	$2.36872E+84$	$3.46945E-06$
0.05	$2.36872E+84$	$2.49630E-04$

表 5　算例 5 仿真结果

h	RK-4	(15)式
0.01	$9.47424E-04$	$6.87221E-06$
0.1	$3.54745E+78$	$7.51100E-06$
0.5	$1.49828E+78$	$2.67400E-05$

参 考 文 献

[1] 袁兆鼎、费景高、刘德贵，刚性常微分方程初值问题的数值解法，科学出版社，北京，(1987)，359—416.

[2] 南京大学数学系计算数学专业，常微分方程数值解法，科学出版社，北京，(1978)，35—61.

[3] Shampine, L. E. and Gordon, M. K., Computer Solution of Ordinary Differential Equations. W. H. Freeman and Company, San Francisco, (1975), 53—59.

[4] Enright, W.H., Hull, T. E. and Lindberg, B., Comparing Numerical Methods for Stiff Systems of O.D.E. s. BIT, **15**(1975), 10—48.

NUMERICAL SIMULATION FOR A CLASS OF NONLINEAR DYNAMIC SYSTEMS

Jiang Min Chai Gan

(Research Institute of Automation, Southeast University, Nanjing 210018)

Abstract

In this paper, a simulation algorithm is presented for a class of nonlinear dynamic systems common in industrial control. Comparing with the other algorithms with the same order, it has the merits of higher accuracy, better stability, and small computing effort, etc. Five examples of different types are given and the esults show that the algorithm is feasible and effective.

Key words: Simulation; nonlinear dynamic systems; algorithm.