第 19 卷 第 4 期 自 动 化 学 报 Vol. 19, No. 4
1993 年 7 月 ACTA AUTOMATICA SINICA July, 1993

矩文

奇异摄动分散系统的反馈控制

刘 万 泉 席 裕 庚 张 钟 俊
(曲阜师范大学自动化所) (上海交通大学自动控制系)

摘 要

本文讨论了线性时不变奇异摄动分散控制系统的反馈控制问题. 提出了该系统的近似固定模、摄动固定模及固定模的概念,并给出了相应的充要条件. 利用上述概念,得到了该系统在分散反馈下单通道可控、可观的充分条件.

关键词: 奇异摄动系统、分散系统、广义系统、反馈控制、固定模.

一、引 言

众所周知,奇异摄动系统是自动控制理论研究的一个重要方向,而且已经取得了许多漂亮的结果[1-4]. 然而对某些奇异摄动系统而言,由于信息结构的限制,从控制的角度而言,具有分散性,这样我们就很有必要研究一类新的系统一奇异摄动分散系统. 实际上,导航系统中的稳定回路与修正回路组成的系统就是一个典型的奇异摄动分散系统.

从下文可以看出,奇异摄动分散系统与广义分散系统密切相关. 最近,广义分散系统的研究已经取得了一些很好的结果[5-8], 文献[8]解决了广义分散控制系统的反馈控制问题,本文就是在文献[8]的基础之上,对奇异摄动分散系统的反馈控制问题进行研究,并得到了一些重要结果.

二、问题的描述与预备知识

考虑下面线性时不变奇异摄动分散系统

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=A_{11}\boldsymbol{x}(t)+A_{12}\boldsymbol{z}(t)+\sum_{j=1}^{N}B_j^1\boldsymbol{u}_j(t)\\ \varepsilon\dot{\boldsymbol{z}}(t)=A_{21}\boldsymbol{x}(t)+A_{22}\boldsymbol{z}(t)+\sum_{j=1}^{N}B_j^2\boldsymbol{u}_j(t)\\ \boldsymbol{y}_j=C_j\boldsymbol{x}(t)+D_j\boldsymbol{z}(t)\quad j=1,2,\cdots N\end{cases}\tag{2.1}$$

其中 $x\in\boldsymbol{R}^{n_1},z\in\boldsymbol{R}^{n_2}$ 是系统的状态矢量, $u_j\in\boldsymbol{R}^{m_j}$, $y_j\in\boldsymbol{R}^{r_j}$ 分别是第 j 个控制站的输入

本文于 1991 年 9 月 17 日收到.

和输出矢量，$j=1,2,\cdots N, n_1+n_2=n$，$A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, B_j^1, B_j^2, C_j$，$D_j$ 是相应维数的实矩阵，ε 是摄动参数，$0<\varepsilon\ll 1$，且假设 A_{22} 是非奇异矩阵.

我们的问题可以描述为：当系统（2.1）满足何条件时，存在静态输出反馈 $\boldsymbol{u}_j(t)=K_j\boldsymbol{y}_j(t)+\boldsymbol{V}_j(t)$ 及 $\varepsilon^*>0$，使得闭环系统对第 i 个控制站，当 $0<\varepsilon<\varepsilon^*$ 时都是可控与可观的．此问题是奇异摄动分散系统研究中的基本问题，称之为反馈控制问题.

按照奇异摄动理论[2]，我们把系统(2.1)分解成慢子系统

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}_s(t)=A_{11}\boldsymbol{x}_s(t)+A_{12}\boldsymbol{z}_s(t)+\sum\limits_{j=1}^{N}B_j^1\boldsymbol{u}_{js}(t)\\ 0=A_{21}\boldsymbol{x}_s(t)+A_{22}\boldsymbol{z}_s(t)+\sum\limits_{j=1}^{N}B_j^2\boldsymbol{u}_{js}(t)\\ \boldsymbol{y}_{js}=C_j\boldsymbol{x}_s+D_j\boldsymbol{z}_s\quad j=1,2,\cdots N\end{cases}\tag{2.2}$$

与快子系统

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{z}}_f(\tau)=A_{22}\boldsymbol{z}_f(\tau)+\sum\limits_{j=1}^{N}B_j^2u_{jf}(\tau)\\ \boldsymbol{y}_{jf}(\tau)=D_j\boldsymbol{z}_f(\tau)\quad j=1,2,\cdots N\end{cases}\tag{2.3}$$

其中 $\tau=\frac{t-t_0}{\varepsilon}$. 易知系统(2.2)是一无脉冲模的广义分散系统，而(2.3)是一个正常的分散系统.

对(2.2)作输出反馈 $u_{js}=K_{js}y_{js}+v_{js}, j=1,2,\cdots N$，则闭环系统为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}_s=\left(A_{11}+\sum\limits_{j=1}^{N}B_j^1K_{js}C_j\right)\boldsymbol{x}_s+\left(A_{12}+\sum\limits_{j=1}^{N}B_j^1K_{js}D_j\right)\boldsymbol{z}_s+\sum\limits_{j=1}^{N}B_j^1\boldsymbol{v}_{js}\\ o=\left(A_{21}+\sum\limits_{j=1}^{N}B_j^2K_{js}C_j\right)\boldsymbol{x}_s+\left(A_{22}+\sum\limits_{j=1}^{N}B_j^2K_{js}D_j\right)\boldsymbol{z}_s+\sum\limits_{j=1}^{N}B_j^2\boldsymbol{v}_{js}\end{cases}\tag{2.4}$$

由于 A_{22} 是非奇异矩阵，故

$$\boldsymbol{K}^s=\left\{K\in\boldsymbol{K}\triangleq\mathrm{blockdiag}(K_{1s},K_{2s},\cdots K_{Ns})\,|\det\left[A_{22}+\sum_{j=1}^{N}B_j^2K_{js}D_j\right]=0\right\}$$

为 $\boldsymbol{R}^{\sum\limits_{i=1}^{N}m_i x r_i}$ 中的一超曲面或空集．记 $\boldsymbol{K}_s\triangleq\boldsymbol{K}\backslash\boldsymbol{K}^s$

令
$$A_{11}(K)=A_{11}+\sum_{j=1}^{N}B_j^1K_{js}C_j\quad A_{12}(K)=A_{12}+\sum_{j=1}^{N}B_j^1K_{js}D_j$$
$$A_{21}(K)=A_{21}+\sum_{j=1}^{N}B_j^2K_{js}C_j\quad A_{22}(K)=A_{22}+\sum_{j=1}^{N}B_j^2K_{js}D_j$$

则(2.4)化为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}_s=A_{11}(K)\boldsymbol{x}_s+A_{12}(K)\boldsymbol{z}_s+\sum\limits_{j=1}^{N}B_j^1\boldsymbol{v}_{js}\\ 0=A_{21}(K)\boldsymbol{x}_s+A_{22}(K)\boldsymbol{z}_s+\sum\limits_{j=1}^{N}B_j^2\boldsymbol{v}_{js}\end{cases}\tag{2.5}$$

引理 2.1. 当 $K\in \boldsymbol{K}_s$ 时，系统(2.5)对第 i 个控制站是 R- 可控的充要条件为：下面系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}_s(t)=(A_{11}(K)-A_{12}(K)A_{22}^{-1}(K)A_{21}(K))\boldsymbol{x}_s+\sum_{j=1}^{N}(B_j^1-A_{12}(K)A_{22}^{-1}(K)B_j^2)\boldsymbol{v}_{js}\quad(2.6)$$

对第 i 个控制站是可控的.

现在考虑系统(2.2)，由于 A_{22} 可逆，因此可将系统(2.2)化成下列系统

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}_s=\bar{A}\boldsymbol{x}_s+\sum_{j=1}^{N}\bar{B}_j\boldsymbol{u}_{js}\\ y_{js}=\bar{C}_j\boldsymbol{x}_s+\sum_{j=1}^{N}\bar{D}_{ij}u_{js}\end{cases}\qquad(2.7)$$

其中

$$\bar{A}=A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}\quad \bar{B}_j=B_j^1-A_{12}A_{22}^{-1}B_j^2$$
$$\bar{C}_j=C_j-D_jA_{22}^{-1}A_{21}\quad \bar{D}_{ij}=-D_iA_{22}^{-1}B_j^2$$

对系统(2.7)作输出反馈 $\boldsymbol{u}_{js}=K_{js}\boldsymbol{y}_{js}+\boldsymbol{v}_{js}$，则闭环系统为

$$\dot{\boldsymbol{x}}_s=\bar{A}(K)\boldsymbol{x}_s+\sum_{j=1}^{N}\bar{B}_j(K)\boldsymbol{v}_{js}\qquad(2.8)$$

其中　$\bar{A}(K)=\bar{A}+\bar{B}K(I-\bar{D}K)^{-1}\bar{C},\bar{B}_j(K)=\bar{B}_j+\bar{B}K(I-\bar{D}K)^{-1}\bar{D}$;

$$\bar{B}\triangleq[\bar{B}_1,\bar{B}_2,\cdots\bar{B}_N],\ \bar{D}\triangleq[\bar{D}_1,\bar{D}_2,\cdots\bar{D}_N]$$
$$\bar{D}_i=[\bar{D}_{1i}^T,\bar{D}_{2i}^T,\cdots\bar{D}_{Ni}^T]^T\quad K\in\boldsymbol{K}_p\triangleq\{K\in\boldsymbol{K}\,|\det[I-\bar{D}K]\neq 0\}$$

引理 2.2[8]　当 $K\in\boldsymbol{K}_p\cap\boldsymbol{K}_s$ 时，有

$$\bar{A}(K)=A_{11}(K)-A_{12}(K)A_{22}^{-1}(K)A_{21}(K)$$
$$\bar{B}_j(K)=B_j^1-A_{12}(K)A_{22}^{-1}(K)B_j^2\quad j=1,2,\cdots N.$$

三、反 馈 控 制

引入下列符号：$\boldsymbol{N}\triangleq\{1,2,\cdots N\}$，若 $\boldsymbol{\varphi}\triangleq\{i_1,i_2,\cdots i_r\}$，则 $\boldsymbol{N}-\boldsymbol{\varphi}$ 表示 $\boldsymbol{\varphi}$ 的补集；$P(N)\triangleq\{\varphi\,|\,\varphi=\{i_1\cdots i_r\}\subset\boldsymbol{N}\}$；$\boldsymbol{\varphi}^+(i)\triangleq\boldsymbol{\varphi}\cup\{i\}$；其余符号同[8].

引理 3.1[8]. 若对任意 $\boldsymbol{\varphi}\in P(N)$，都有

$$[C_{N-\phi^+(i)},D_{N-\phi^+(i)}]\begin{bmatrix}\lambda I-A_{11} & -A_{12}\\ -A_{21} & -A_{22}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}B^1_{\phi^+(i)}\\ B^2_{\phi^+(i)}\end{bmatrix}\neq 0,\qquad(3.1)$$

那么存在 K_{js}，$j=1,2,\cdots N$，使得系统(2.5)对第 i 个控制站 R- 可控的充要条件为：对任意的 $\boldsymbol{\varphi}\in P(N)$，有

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\lambda I-A_{11} & -A_{12} & B^1{}_{\phi^+(i)},\\ -A_{21} & -A_{22} & B^2{}_{\phi^+(i)}\\ C_{N-\phi^+(i)}, & D_{N-\phi^+(i)} & 0\end{bmatrix}\geqslant n,\ \forall\lambda\in\sigma(A_{11})\qquad(3.2)$$

对于系统(2.3)，有下列引理

引理 3.2[9]. 存在输出反馈 $\boldsymbol{u}_{jf}(\tau)=K_{jf}\boldsymbol{y}_{jf}(\tau)+\boldsymbol{v}_{jf}(\tau)$ 使得下列闭环系统

$$\dot{z}_f(\tau)=\left(A_{22}+\sum_{j=1}^{N} B_j^2 K_{jf} D_j\right) z_f(\tau)+\sum_{j=1}^{N} B_j^2 v_{jf}(\tau) \tag{3.3}$$

对第 i 个控制站可控的充要条件为：对任意 $\varphi \in P(N)$ 有

$$D_{N-\varphi^{+}(i)}(\lambda I-A_{22})^{-1} B_{\varphi^{+}(i)}^{2} \neq 0 \tag{3.4}$$

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\lambda I-A_{22} & B_{\varphi^{+}(i)}^{2} \\ D_{N-\varphi^{+}(i)} & 0\end{bmatrix} \geqslant n_2 \qquad \forall \lambda \in \sigma(A_{22}), \tag{3.5}$$

由上面的引理可得下列定理

定理 3.1. 对于系统(2.1)，存在静态输出反馈 $u_j(t)=K_j y_j(t)+v_j(t)$，$j=1,2,\cdots N$ 及 $\varepsilon^*>0$，使得闭环系统对第 i 个控制站，当 $0<\varepsilon<\varepsilon^*$ 时为可控的充分条件为：(3.1)、(3.2)、(3.4)，(3.5)式同时成立，即分别存在 K_{js} 与 $K_{jf}, j=1,2,\cdots N$，使得(2.1)的慢子系统与快子系统对第 i 个控制站分别为 R- 可控与可控的.

证明：由已知条件可知，存在 $K_{js}, j=1,2,\cdots N$，使得系统 (2.5) 对第 i 个控制站是 R-可控的，由引理2.1可知，系统(2.6)对同样选择的 K_{js} 对第 i 个控制站是可控的；同理存在 K_{jf}，使得系统(3.3)对第 i 个控制站是可控的. 记

$$\boldsymbol{K}_s^*=\{K \in \boldsymbol{K} \mid K \text{ 使得系统(2.6)对第 } i \text{ 个控制站可控}\}$$

$$\boldsymbol{K}_f^*=\{K \in \boldsymbol{K} \mid K \text{ 使得系统(3.3)对第 } i \text{ 个控制站可控}\}$$

易知 $\boldsymbol{K}_s^* \cap \boldsymbol{K}_f^*$ 不空，取 $K \in \boldsymbol{K}_f^* \cap \boldsymbol{K}_s^*$，那么 K 使得系统(2.6)与(3.3)同时对第 i 个控制站是可控的. 由[2]中的结论可知，此时存在 $\varepsilon^*>0$，使得当 $0<\varepsilon<\varepsilon^*$ 时，系统

$$\begin{cases}\dot{x}=A_{11}(K) x+A_{12}(K) z+B_i^1 v_i \\ \varepsilon \dot{z}=A_{21}(K) x+A_{22}(K) z+B_i^2 v_i\end{cases} \tag{3.6}$$

是可控的. 证毕.

定理 3.2. 对于系统 (2.1)，存在输出反馈 $u_j=K_j y_j+v_j \; j=1,2,\cdots N$，及 $\varepsilon^*>0$，使得闭环系统对第 i 个控制站，当 $0<\varepsilon<\varepsilon^*$ 为可观的充分条件为：分别存在 K_{js} 与 $K_{jf}, j=1,2,\cdots N$，使 (2.1) 的慢子系统与快子系统对第 i 个控制站分别为 R-可观与可观的.

四、固 定 模

定义 4.1 广义分散系统(2.2)的有穷固定模[6]称为系统(2.1)的近似固定模；分散系统(2.3)的固定模称为系统(2.1)的摄动固定模；近似固定模与摄动固定模之并，称为系统(2.1)的固定模.

近似固定模反映了系统(2.1)在边界层外的不可控不可观模态；摄动固定模反映了系统(2.1)在边界层内的不可控不可观模态. 由[6]中的结论可得下面的定理

定理 4.1 λ_0 为系统 (2.1) 的固定模的充要条件为：存在 $\boldsymbol{N}$ 的一个分划 φ_0 与 $\boldsymbol{N}-\varphi_0$，使下列不等式之一成立

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\lambda_0 I-A_{11} & -A_{12} & B_{\varphi_0}^1 \\ -A_{21} & -A_{22} & B_{\varphi_0}^2 \\ C_{N-\varphi_0} & D_{N-\varphi_0} & 0\end{bmatrix}<n \tag{4.1}$$

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\lambda_0 I - A_{22} & B^2_{\varphi_0}\\ D_{N-\varphi_0} & 0\end{bmatrix} < n_2 \tag{4.2}$$

定义 4.2. 如果对于任意的 $\varphi\in P(N)$，都有

$$[C_{N-\varphi}, D_{N-\varphi}]\begin{bmatrix}\lambda I - A_{11} & -A_{12}\\ -A_{21} & -A_{22}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}B^1_{\varphi}\\ B^2_{\varphi}\end{bmatrix}\not\equiv 0 \tag{4.3}$$

$$D_{N-\varphi}(\lambda I - A_{22})^{-1}B^2_{\varphi}\not\equiv 0 \tag{4.4}$$

则称系统(2.1)是强关联的.

定理 4.1. 如果系统(2.1)是强关联的，那么系统(2.1)通过静态输出反馈使得其闭环系统单通道可控且可观的充分条件为：系统(2.1)没有固定模.

推论 4.1. 若系统(2.1)是强关联的，那么系统(2.1)通过静态输出反馈使得其闭环系统单通道可稳与可检测的充分条件为：固定模落在左半开平面.

定义 4.3. 定义

$$\varphi_\varepsilon(\lambda)=\underset{K\in\boldsymbol{K}}{\text{g.c.d.}}\det\begin{bmatrix}\lambda I - A_{11}-\sum_{j=1}^{N}B^1_j K_j C_j & -A_{12}-\sum_{j=1}^{N}B^1_j K_j D_j\\ -A_{21}-\sum_{j=1}^{N}B^2_j K_j C_j & \varepsilon\lambda I-\sum_{j=1}^{N}B^2_j K_j D_j\end{bmatrix}$$

$$\varphi(\lambda)=\underset{\varepsilon\in\boldsymbol{R}}{\text{g.c.d}}\,\varphi_\varepsilon(\lambda),\quad \Omega_{\Sigma'}=\{\lambda\,|\,\varphi(\lambda)=0\}.$$

记系统(2.2)的固定模集合为 Ω_Σ，则

定理 4.2 (1) $\Omega_\Sigma\subset\sigma(A_{22})\cup\sigma(A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})$

(2) $\Omega_{\Sigma'}\subset\Omega_\Sigma$

关于固定模更进一步的结果有

定理 4.3. 若系统(2.1)是强关联的，且 $\Omega_\Sigma=\phi$，则存在 $\varepsilon^*>0$，使得 $\Omega(\varepsilon^*)=\phi$，其中

$$\Omega(\varepsilon^*)=\{\lambda\,|\,\varphi_\varepsilon(\lambda)=0,\ 0<\varepsilon<\varepsilon^*\}$$

五、小　结

本文研究了奇异摄动分散系统的反馈控制问题，得到了一些基本结果. 由于该系统的研究刚刚起步，因此仍然有许多工作待进一步去做.

作者十分感谢审稿者提出的建议.

参　考　文　献

[1] Kokotovic, P. V., O'Malley, R. E., Sannuti, Tr.&P., Singular Perturbation and Order Reduction in Control Theory-an Overview, *Automatica*, **12** (1976), 123—132

[2] 许可康，控制系统中的奇异摄动，科学出版社，1986

[3] Kokotovic, P. V. & Haddad, A. H., Controllability and Time-Optimal Control of Systems With Slow and Fast Modes, *IEEE. Trans.* **AC-20** (1975), 111—113

[4] Chow, J. H., Preservation of Controllability in Linear Time-Invariant Perturbed Systems, Int.

J. Control, **25**(1977) 679—704
[5] 刘万泉 广义分散控制系统可以正则化的一个充要条件. 控制与决策,**1**(1989),47—48
[6] 王恩平,刘万泉,广义分散控制系统的有穷固定模,自动化学报,**16**(1990)(4),358—362
[7] 王朝珠,王恩平,广义分散控制系统的无穷远固定模,系统科学与数学,**2**(1988),142—150
[8] 刘万泉,严伟勇,无脉冲模广义分散系统的控制,控制理论及应用**9**(1992)(3),232—237
[9] Yan, W. Y. & Bitmead, R. R., Decentrah zed Control of Multi-Channel Systems With Direct Control Feedthrough, *Int. J. Control*, **49**(1989)(6),2057—2075

FEEDBACK CONTROL OF SINGULAR PERTURBED DECENTRALIZED CONTROL SYSTEMS

LIU WANQUAN
(Qufu Normal Univ.)
XI YUGENG ZHANG ZHONGJUN
(Shanghai Jiaotong Univ.)

ABSTRACT

In this paper, the feedback control problem for singular perturbed decentralized systems is discussed. The concepts of "Approximated fixed modes, perturbed fixed modes and fixed modes for the system" are proposed at the first time, the corresponding necessary and sufficient conditions are obtained. Furthermore, the sufficient conditions of controllability and observability through single channel are obtained.

Key words: Singual perturbed systems; decentralized systems; singular systems; feedback control; fixed modes.