第19卷 第5期 自 动 化 学 报 Vol. 19, No. 5
1993 年 9 月 ACTA AUTOMATICA SINICA Sep., 1993

带前通的分散系统补偿谱与闭环谱相交问题

刘万泉 席裕庚 张钟俊
（曲阜师范大学，山东 273165） （上海交通大学自控系，200030）

摘 要

本文利用广义分散系统的性质，解决了带前通的分散系统的补偿谱与闭环谱相交性问题. 利用消失性的概念，得到了其闭环谱与补偿谱不相交的充要条件，且在此条件不成立时，得到了它们的交集. 该文的结果是文[1]中结果的推广.

关键词： 广义分散系统，固定模，消失性，补偿谱，闭环谱.

一、引 言

在控制理论与应用的研究中，动态补偿器的设计是十分重要的。一般来讲，除了保证闭环系统的稳定外，补偿器的设计有很大的冗余度，还可以利用这些冗余度使闭环系统或补偿器本身满足一些其它的要求。例如文[2]设计的动态补偿器不仅保证闭环系统稳定，而且还保证自身稳定。在一些实际系统中，由于某种约束，有时要求设计的补偿器极点属于一定的范围，而闭环系统的极点不在此范围之内，这样就要求研究系统的补偿谱与闭环谱相交性问题。

文[1]对于不带前通的分散系统已给出了此问题的彻底解决，得到了充要条件。由文[3,4]可知，对分散系统而言，带前通与不带前通的系统的动态补偿器设计有着本质的区别，且带前通的分散系统的许多结果并非是不带前通分散系统的一个简单推广。因此需要研究带前通的分散系统补偿谱与闭环谱相交性问题。

文[1]中的方法很难解决此文中的问题。近来，广义分散系统已经取得了一些结果[5,6]，尤其文[6]将广义分散系统与正常分散系统有机地结合起来，解决了无脉冲模的广义分散系统的控制问题。文[6]的方法具有很大的普遍性，本文正是利用该思想成功地解决了带前通的分散系统补偿谱与闭环谱的相交性问题。此方法对于带前通的广义分散系统的补偿谱与闭环谱的相交性问题仍然有效，可以得到与本文平行的结果，而且文[6]和本文的方法可以解决其它类似的问题。

本文于1991年11月26日收到.

二、预 备 知 识

对于线性系统

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u},\\ \boldsymbol{y} = C\boldsymbol{x} + D\boldsymbol{u},\end{cases} \tag{2.1}$$

其中 $\boldsymbol{x}\in \boldsymbol{R}^n$ 为系统的状态，$\boldsymbol{u}\in \boldsymbol{R}^m$、$\boldsymbol{y}\in \boldsymbol{R}^r$ 分别为系统的输入与输出．A,B,C,D 为适当维数实矩阵．

令　$\boldsymbol{C}$ 为全体复数组成的集合

$$V \triangleq \left\{s \mid s\in \boldsymbol{C},\ \operatorname{rank}\begin{bmatrix} SI - A & -B\\ C & D\end{bmatrix} < n+1\right\}. \tag{2.2}$$

定义 2.1.　V 称作系统(2.1)的消失零点；如果 $V = \boldsymbol{C}$，则称系统(2.1)为消失的．

易知，V 只有三种可能：空集、有限集或全体复数．由文[7]中引理 2.1 可得下列引理：

引理 2.1.　系统(2.1)为消失的充分必要条件为

$$C(sI - A)^{-1}B + D \equiv 0. \tag{2.3}$$

对于广义分散系统

$$\begin{cases} E\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \sum\limits_{i=1}^{N} B_i u_i,\\ y_i = C_i\boldsymbol{x} + \sum\limits_{j=1}^{N} D_{ij}u_j,\quad i\in \bar{N}\triangleq\{1, 2, \cdots, N\}.\end{cases} \tag{2.4}$$

其中　$\boldsymbol{x}\in \boldsymbol{R}^n$　为系统的状态变量，$u_i\in \boldsymbol{R}^{m_i}$，$y_i\in \boldsymbol{R}^{r_i}$　分别为第 i 个控制站的输入与输出，$i\in\bar{N}$．E，A，B_i，C_i,D_{ij}，i，$j\in\bar{N}$ 为适当维数的实矩阵．E 一般为奇异方阵，且 (E,A) 为正则对．令

$$B\triangleq[B_1, B_2, \cdots, B_N],\quad C^T\triangleq[C_1^T, C_2^T, \cdots, C_N^T],$$

$$B_\varphi\triangleq[B_{i_1}, B_{i_2}, \cdots, B_{i_p}],\quad C_\varphi^T\triangleq[C_{i_1}^T, C_{i_2}^T, \cdots, C_{i_p}^T],$$

$$D\triangleq\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12}\cdots & D_{1N}\\ \vdots & & \vdots\\ D_{N1} & D_{N2}\cdots & D_{NN}\end{bmatrix},\quad D_{\bar{N}-\varphi,\varphi}\triangleq\begin{bmatrix} D_{j_1 i_1}, & \cdots D_{j_1 i}\\ \vdots & \\ D_{j_{N-p} i_1} & \cdots D_{j_{N-p} i_p}\end{bmatrix}.$$

其中 $\varphi = \{i_1, i_2, \cdots, i_p\}$，$\bar{N} - \varphi = \{j_1, j_2, \cdots, j_{N-p}\}$ 为 φ 的补集．

$$\boldsymbol{K} = \{K \mid K = \operatorname{blockdiag}(K_1,\ K_2, \cdots, K_N),\ K_i\in \boldsymbol{R}^{m_i\times r_i},\ i\in\bar{N},\ \det(I - KD)\neq 0\}.$$

定义 2.2[5]**.**　系统(2.4)的有穷固定模为

$$U = \{s \mid s\in \boldsymbol{C},\ \det(sE - A - B(I - KD)^{-1}KC) = 0,\ \forall K\in \boldsymbol{K}\}.$$

引理 2.2[5]**.**　对于给定的分散系统(2.4)，$s\in\sigma(E,A)$ 为系统的有穷固定模充要条件为，存在 $\bar{N}$ 的分划 φ 及 $\bar{N} - \varphi$，使得下列不等式成立：

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} sE - A & B_\varphi\\ C_{\bar{N}-\varphi} & D_{\bar{N}-\varphi,\varphi}\end{bmatrix} < n. \tag{2.5}$$

定义 2.3. 集合 $\boldsymbol{F}$ 称为 $\boldsymbol{R}^n$ 中的一个真子集簇如果 $\boldsymbol{F}$ 为 $\boldsymbol{R}^n$ 中的一真子集,且 $\boldsymbol{F}$ 为有限个实系数多项式的零点.

引理 2.3. 令 $\boldsymbol{U}$ 为系统(2.4)的有穷固定模集合,那么对于任何有限个点的集合 $P=\{P_1,P_2,\cdots,P_n\}\subset\boldsymbol{C}/\boldsymbol{U}$, 集合 $\boldsymbol{K}_P\triangleq\{K\in\boldsymbol{K},\sigma(E,A+B(I-KD)^{-1}KC)\cap P\neq\phi\}$ 在 $\boldsymbol{R}^{\sum_{i=1}^{N}m_i\times r_i}$ 中为一真子集簇.

证略.

三、集中系统情形

对于给定的系统(2.1),有下列定理成立:

定理 3.1 对于系统(2.1),那么对于任意给定的正整数 q, 存在 q 阶动态补偿器

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{z}}=Q\boldsymbol{z}+R\boldsymbol{y},\\ \boldsymbol{u}=S\boldsymbol{z}+K\boldsymbol{y},\end{cases}\tag{3.1}$$

使得补偿器的谱 $\sigma(Q)$ 与闭环系统(2.1),(3.1)的谱不相交的充要条件为,系统(2.1)为非消失的.

证明 充分性. 假设系统(2.1)为非消失的,那么消失零点集合 V 或为空集或为有限集. 易知系统(2.1),(3.1)的闭环系统为

$$\begin{pmatrix}\dot{\boldsymbol{x}}\\ \dot{\boldsymbol{z}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A+B(I-KD)^{-1}KC & B(I-KD)^{-1}S\\ RC+RD(I-KD)^{-1}KC & Q+RD(I-KD)^{-1}S\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{z}\end{pmatrix},\tag{3.2}$$

闭环系统的状态矩阵为

$$\bar{A}=\begin{pmatrix}A+B(I-KD)^{-1}KC & B(I-KD)^{-1}S\\ RC+RD(I-KD)^{-1}KC & Q+RD(I-KD)^{-1}S\end{pmatrix}.$$

欲选择 K,R,Q,S, 满足

$$\sigma(Q)\cap\sigma(\bar{A})=\phi.\tag{3.3}$$

为此首先选择 $K\in\boldsymbol{K}$, 然后选择 Q 满足下列条件

(i) Q 没有重根.

(ii) $\sigma(Q)\cap[V\cup\sigma(A+B(I-KD)^{-1}KC]=\phi$.

由于 V 为有限集合,上述选择易实现. 此时对任意 $s\in\sigma(Q)$, 有

$$\operatorname{rank}[sI-Q]=q-1,\tag{3.4}$$

$$\operatorname{rank}[sI-A-B(I-KD)^{-1}KC]=n,\tag{3.5}$$

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}sI-A, & -B\\ C & D\end{bmatrix}\geqslant n+1,\tag{3.6}$$

注意到 $\bar{A}=A_0+B_0(I-KD)^{-1}C_0$, 其中

$$A_0=\begin{pmatrix}A & 0\\ RC & Q\end{pmatrix},\quad B_0=\begin{pmatrix}B\\ RD\end{pmatrix},\quad C_0=(KC,S).$$

由文[6]易知,

$$\sigma(\bar{A})=\sigma\left[\begin{pmatrix} I & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} A_0, & B_0\\ C_0, & KD-I\end{pmatrix}\right].\tag{3.7}$$

由于

$$\begin{pmatrix} A & 0 & B\\ RC & Q & RD\\ KC & S & KD-I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & 0 & B\\ 0 & Q & 0\\ KC & 0 & KD-I\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ I\\ 0\end{pmatrix}R(C\ \ 0\ \ D)+\begin{pmatrix}0\\ 0\\ I\end{pmatrix}S(0\ \ I\ \ 0),$$

因此，

$$\sigma\left(\begin{pmatrix} I & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} A_0 & B_0\\ C_0 & KD-I\end{pmatrix}\right),$$

为系统

$$\begin{cases}\begin{pmatrix} I & 0 & 0\\ 0 & I & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{z}\\ \dot{z}_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & 0 & B\\ 0 & Q & 0\\ KC & 0 & KD-I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ z\\ z_0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ I\\ 0\end{pmatrix}u_1+\begin{pmatrix}0\\ 0\\ I\end{pmatrix}u_2\\ y_1=(C\ \ 0\ \ D)\begin{pmatrix}x\\ z\\ z_0\end{pmatrix}\\ y_2=(0\ \ I\ \ 0)\begin{pmatrix}x\\ z\\ z_0\end{pmatrix}\end{cases}\tag{3.8}$$

用输出反馈 $u_1=Ry_1$，$u_2=Sy_2$ 所得到闭环系统的谱．用 Λ 表示系统(3.8)有穷固定模的集合，由引理 2.2 及(3.4)—(3.6)式可知，$\sigma(Q)\cap\Lambda=\phi$．由于 $\sigma(Q)$ 不是系统(3.8)式的有穷固定模，因此存在 R, S，使得

$$\sigma\left(\begin{pmatrix} I & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} A_0 & B_0\\ C_0 & KD-I\end{pmatrix}\right)\cap\sigma(Q)=\phi,$$

亦即 $\sigma(\bar{A})\cap\sigma(Q)=\phi$，充分性得证．

必要性．如果存在 (Q,R,S,K)，使得 $\sigma(\bar{A})\cap\sigma(Q)=\phi$，要证明系统一定为非消失的．现证明其逆命题．若系统(2.1)为消失的，则 $V=\boldsymbol{C}$，那么对于任意的 $Q\in\boldsymbol{R}^{q\times q}$ 及 $s\in\sigma(Q)$，由于

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} sI-A & 0 & -B & 0\\ 0 & sI-Q & 0 & 0\\ -KC & 0 & I-KD & I\\ C & 0 & D & 0\end{pmatrix}=\operatorname{rank}\begin{pmatrix} sI-A & -B\\ C & D\end{pmatrix}+\operatorname{rank}(sI-Q)$$
$$+\operatorname{rank}(I_m)<n+1+q-1+m=n+m+q,$$

因此 s 为系统(3.8)的有穷固定模，故 $\sigma(\bar{A})\cap\sigma(Q)\neq\phi$，必要性得证．

推论 3.1. 假设系统(2.1)为消失的，那么对于任意的动态补偿器(3.1)有

$$\sigma(Q)\subset\Lambda\subset\sigma(\bar{A}).$$

推论 3.2. 假设系统(1.2)为非消失的，那么对于任何正整数 q，集合

$$\Omega_q=\{(Q\ \ R\ \ S\ \ K)_L\mid(Q\ \ R\ S\ K)\in\boldsymbol{R}^{q\times q}\times\boldsymbol{R}^{q\times r}\times\boldsymbol{R}^{m\times q}\times\boldsymbol{K},\sigma(Q)\cap\sigma(\bar{A})\neq\phi\},$$

为 $\boldsymbol{R}^{q^2+rq+qm+mr}$ 中的一真子集簇，其中 $(Q\ R\ S\ K)_L$ 为一由 $(Q\ R\ S\ K)$ 元素组成的向量.

四、分散系统情形

对于分散系统(2.4)中 $E=I$ 的情形,用下列动态补偿器:

$$\begin{cases}\dot{z}_i = Q_i z_i + R_i y_i, \\ u_i = S_i z_i + K_i y_i,\ i\in\bar{N},\end{cases} \tag{4.1}$$

其中 $z_i\in\boldsymbol{R}^{q_i}$, $i\in\bar{N}$ 为动态补偿器的状态. $\bigcup_{i=1}^{N}\sigma(Q_i)$ 称为系统(4.1)的谱. 易知(4.1)及(4.2)的闭环系统矩阵为

$$\bar{A}=\begin{pmatrix} A+B(I-KD)^{-1}KC & B(I-KD)^{-1}S \\ RC+RD(I-KD)^{-1}KC & Q+RD(I-KD)^{-1}S\end{pmatrix},$$

其中 $K\in\boldsymbol{K}$, $R=\text{blockdiag}\ (R_1,\ R_2,\cdots,\ R_N)$,$S=\text{blockdiag}\ (S_1,\ S_2,\ \cdots,\ S_N)$ $Q=\text{bolockdiag}(Q_1,\ Q_2,\ \cdots,\ Q_N)$. 欲寻求 $\sigma(\bar{A})\cap\sigma(Q)=\phi$ 的设计要求. 同上节

$$\sigma(\bar{A})=\sigma\left(\begin{pmatrix} I & 0 & 0\\ 0 & I & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} A & D & B\\ RC & Q & RD\\ KC & S & KD-I\end{pmatrix}\right), \tag{4.2}$$

而

$$\begin{pmatrix} A & 0 & B\\ RC & Q & RD\\ KC & S & KD-I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & 0 & B\\ 0 & Q & 0\\ KC & 0 & KD-I\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ I\\ 0\end{pmatrix}R(C\ 0\ D)+\begin{pmatrix}0\\ 0\\ I\end{pmatrix}S(0\ I\ 0)$$

$$=\begin{pmatrix} A & 0 & B\\ 0 & Q & 0\\ KC & 0 & KD-I\end{pmatrix}+\sum_{i=1}^{N}\begin{pmatrix}0\\ \begin{pmatrix}0\\ I_{q_i}\\ 0\end{pmatrix}\\ 0\end{pmatrix}R_i(C_i\ \ 0\ \ D_i)$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \begin{pmatrix}0\\ I_{m_i}\\ 0\end{pmatrix}\end{pmatrix}S_i(0\ \ (0\ \ I_{q_i}\ \ 0)\ \ 0)$$

因此(4.2)式为广义分散系统

$$\left\{\begin{pmatrix} I & 0 & 0\\ 0 & I & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{z}\\ \dot{z}_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & 0 & B\\ 0 & Q & 0\\ KC & 0 & KD-I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ z\\ z_0\end{pmatrix}+\sum_{i=1}^{N}\begin{pmatrix}0\\ \begin{pmatrix}0\\ Iq_i\\ 0\end{pmatrix}\\ 0\end{pmatrix}u_i+\sum_{j=1}^{N}\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \begin{pmatrix}0\\ I_{m_j}\\ 0\end{pmatrix}\end{pmatrix}v_j,\right.$$

$$\begin{cases} y_i = (C_i \ \ 0 \ \ D_i)\begin{pmatrix} x \\ z \\ z_0 \end{pmatrix}, \quad i \in \bar{N}, \\ y_j = (0 \ \ (0 \ \ I_{q_j} \ \ 0) \ \ 0)\begin{pmatrix} x \\ z \\ z_0 \end{pmatrix}, \quad j \in \bar{N}, \end{cases} \tag{4.3}$$

用输出反馈 $u_i = R_i y_i$，$V_j = S_j y_j$，i，$j \in \bar{N}$，所得到的闭环系统的谱。

定义 $\boldsymbol{P}$ 为 $\bar{N} \times \bar{N}$ 的子集，$\boldsymbol{P} = \{(i_1, i_2, \cdots, i_s)\ (j_1, j_2, \cdots, j_t) \in \bar{N} \times \bar{N}$；$(i'_1, i'_2, \cdots, i'_{N-s}) \cap (j'_1, j'_2, \cdots, j'_{N-t}) = \phi$，$1 \leqslant s, t \leqslant N, s + t = N + 1\}$，其中 $(i'_1, i'_2 \cdots i'_{N-s})$ 为 $(i_1, i_2, \cdots, i_s)$ 的补集．对于 $((i_1, i_2, \cdots, i_s)\ (j_1, j_2, \cdots, j_t)) \in \bar{N} \times \bar{N}$，定义下列系统：

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + [B_{i_1}, B_{i_2}, \cdots, B_{i_s}]u, \\ y = \begin{bmatrix} C_{j_1} \\ \vdots \\ C_{j_t} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} D_{j_1 i_1} & \cdots D_{j_1 i_s} \\ \vdots & \vdots \\ D_{j_t i_1} & \cdots D_{j_t i_s} \end{bmatrix} u. \end{cases} \tag{4.4}$$

定理 4.1. 对于系统(2.4)中 $E = I$ 的情形，给定正整数 $(q_1, q_2, \cdots, q_N)$，那么存在 $(q_1, q_2, \cdots, q_N)$ 阶分散补偿器 (4.1) 使得补偿器的谱与闭环系统的谱不相交的充要条件为：对于任意的 $((i_1, i_2, \cdots, i_s), (j_1, \cdots, j_t)) \in \boldsymbol{P}$，相应的系统(4.4)为非消失的．

证明．充分性．假设对于所有 $((i_1, i_2, \cdots, i_s)(j_1, \cdots, j_t)) \in \boldsymbol{P}$，相应的系统(4.4)为非消失的，则易证对于所有的 $((i_1, i_2, \cdots, i_s)(j_1, j_2, \cdots, j_t)) \in \boldsymbol{P}'$，其对应的系统亦为非消失的，其中

$$\boldsymbol{P}' = \{(i_1, \cdots, i_s)(j_1, \cdots, j_t) \in \bar{N} \times \bar{N}, (i'_1, \cdots, i'_{N-s}) \cap (j'_1, \cdots, j'_{N-t}) = \phi, \\ 1 \leqslant s, t \leqslant N, s + t \geqslant N + 1\}.$$

首先选择 $K \in \boldsymbol{K}$，然后选择 $Q_i \in \boldsymbol{R}^{q_i \times q_i}$ $i \in \bar{N}$ 满足下列条件：

i) Q_i 没有重根，即 $\operatorname{rank}(sI - Q_i) = q_i - 1$，$\forall s \in \sigma(Q_i)$，

　且 $\sigma(Q_i) \cap \sigma(Q_j) = \phi$，$i \neq j$，$i$，$j \in \bar{N}$．

ii) $\sigma(A + B(I - KD)^{-1}KC) \cap \sigma(Q) = \phi$，

iii) $\sigma(Q) \cap [V_{(i_1, i_2, \cdots, i_s)(j_1, j_2, \cdots, j_t)}] = \phi$，

$$\forall((i_1, i_2, \cdots, i_s)(j_1, j_2, \cdots, j_t)) \in \boldsymbol{P}'.$$

其中 $V_{((i_1, i_2, \cdots, i_s)(j_1 j_2, \cdots, j_t))}$ 表示(4.4)式的消失零点集合．由题设易知，$V_{((i_1, \cdots, i_s)(j_1, \cdots, j_t))}$ 为有限集合或者空集．为了证明充分性，只需证明 $\sigma(Q)$ 不是广义分散系统(4.3)的有穷固定模即可．

注意到系统 (4.3) 为 $2N$ 个控制站的广义分散系统，要验证 $\sigma(Q)$ 不是其有穷固定模，由引理 2.2 可知，只需验证对 $\bar{N} \times \bar{N}$ 的任何一个分划，都成立矩阵秩的不等式．注意到对 $2N$ 个控制站的任何一个分划，都可以表成相应的两部分 $((i_1, i_2, \cdots, i_s)\ (j_1, j_2, \cdots, j_t)) \in \bar{N} \times \bar{N}$ 与 $((i'_1, i'_2, \cdots, i'_{N-s})(j'_1, j'_2, \cdots, j'_{N-t})) \in \bar{N} \times \bar{N}$．因此，对任意的分划及 $s \in \sigma(Q)$，有

$$
\operatorname{rank}\begin{bmatrix} s\begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A & 0 & B \\ 0 & Q & 0 \\ KC & 0 & KD \end{pmatrix} & B'_{j,i} \\ C'_{i,i'} & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
= \operatorname{rank}\begin{bmatrix}
sI - A & 0 & \cdots & 0 & -B_1 - B_2 & \cdots & -B_N & 0 & 0 \\
0 & sI - Q_1 & & & \vdots & & & I_{j'} & 0 \\
\vdots & & \ddots & & & & & & \\
0 & & & sI - Q_N & \vdots & & & & \\
-K_1C_1 & 0 & \cdots & 0 & I - K_1D_{11} & \cdots & -K_1D_{1N} & 0 & I_i \\
\vdots & \vdots & & & \vdots & & \vdots & & \\
-K_NC_N & 0 & \cdots & 0 & -K_ND_{N1} & \cdots & I - K_ND_{NN} & & \\
C_{i_1} & 0 & \cdots & 0 & D_{i_11} & \cdots & D_{i_1N} & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & & & & & \vdots & & \\
C_{i_t} & 0 & \cdots & 0 & D_{i_t1} & \cdots & D_{i_tN} & & \\
0 & & I_{i'} & & 0 & & & 0 &
\end{bmatrix}
$$

$$
= \operatorname{rank}\left[\begin{array}{ccccc|cc}
sI - A & -B_1 & \cdots & -B_N & 0 & & \\
-K_1C_1 & I - K_1D_{11} & \cdots & -K_1D_{1N} & I_i & & \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & 0 & \\
-K_NC_N & -K_ND_{N_1} & \cdots & I - K_ND_{NN} & & & \\
C_{i_1} & D_{i_11} & \cdots & D_{i_1N} & 0 & & \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & & \\
C_{i_t} & D_{i_t1} & \cdots & D_{i_tN} & & & \\
\hline
 & & & & & \begin{matrix} sI - Q_1 & & \\ & \ddots & \\ & & sI - Q_N \end{matrix} & I_{j'} \\
 & & 0 & & & & \\
\cline{6-7}
 & & & & & I_{i'} &
\end{array}\right], \tag{4.5}
$$

其中

$$
I_i = \begin{bmatrix} I_{i_1} & & \\ & \ddots & \\ & & I_{i_s} \end{bmatrix}, \quad I_{i'} = \begin{bmatrix} I_{i'_1} & & \\ & \ddots & \\ & & I_{i'_{N-s}} \end{bmatrix}, \quad I_{j'} = \begin{bmatrix} I_{j'_1} & & \\ & \ddots & \\ & & I_{j'_{N-t}} \end{bmatrix}.
$$

注意到当 $((i_1,\cdots,i_s),\ (j_1,\cdots,j_t)) \in \boldsymbol{P}'$ 时,有

$$
(i_1,\cdots,i_s) \cup (j_1,\cdots,j_t) = \bar{N}.
$$

此时(4.5)式的左上角矩阵为

$$
\operatorname{rank}\begin{bmatrix} sI - A & -B & 0 \\ 0 & I_m & I_i \\ C_j & D_{jN} & 0 \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} sI - A & -B_i \\ C_j & D_{ji} \end{bmatrix} + m \geqslant n + 1 + m,
$$

而右下角矩阵的秩至少为 $\sum_{i=1}^{N} q_i - 1$，因此(4.5)式矩阵的秩 $\geqslant n + m + q$.

当 $((i_1,\cdots,i_s)(j_1,\cdots,j_t))\bar{\in}\boldsymbol{P}'$ 时,(4.5)式左上角矩阵的秩满足

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} sI - A & -B & 0 \\ -KC & I - KD & I_i \\ C_j & D_{jN} & 0 \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} sI - A - B(I - KD)^{-1}KC & 0 & 0 \\ C_j + D_{jN}(I - KD)^{-1}KC & 0 & 0 \\ 0 & I & I_i \end{bmatrix}$$
$$\geqslant m + n.$$

右下角矩阵的秩分两种情形讨论:

a) 当 $s + t \leqslant N$ 且 $(i'_1,\cdots,i'_{N-s})\cap(j'_1,\cdots,j'_{N-t}) = \phi$ 时,有 $(i'_1,\cdots,i'_s)\cup(j'_1,\cdots,j'_{N-t}) = \bar{N}$，且右下角恰有 N 个单位矩阵，其秩为 $q = \sum_{i=1}^{N} q_i$.

b) 当 $(i'_1,\cdots,i'_{N-s})\cap(j'_1,\cdots,j'_{N-t}) = \phi$ 时，取 i_0 属于上述两集合之交，易证右下角矩阵的秩为 $\sum_{i=1}^{N} q_i + (q_{i_0} - 1) \geqslant q$.

无论何种情形,都有(4.5)式矩阵的秩 $\geqslant n + m + q$ 因此 s 不是系统(4.3)的固定模.充分性得证.

必要性. 如果存在 $(i_1^0, i_2^0, \cdots, i_s^0)(j_1^0, j_2^0,\cdots, j_t^0)\in\boldsymbol{P}$，使相应的系统(4.4)为消失的,那么只需证对任意的 $(Q\ \ R\ \ S\ \ K)$ 都有 $\sigma(Q)\cap\sigma(\bar{A}) \neq \phi$.

由于 $(i_1^0, i_2^0,\cdots,i_s^0)\cup(j_1^0,\cdots,j_t^0) = \bar{N}$，因此(4.5)式左上角矩阵的秩,对所有 $s\in\boldsymbol{C}$ 有

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} sI - A & -B & 0 \\ -KC & I - KD & I_{i_0} \\ C_{j_0} & D_{j_0} & 0 \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} sI - A & B_{i_0} \\ C_{j_0} & D_{j_0 i_0} \end{bmatrix} + m \leqslant n + m,$$

其中 $i_0 = (i_1^0,\cdots,i_s^0)$，$j_t^0 = (j_1^0,\cdots,j_t^0)$.

对 $s\in\sigma(Q)$，由于 $\boldsymbol{P}$ 的约束，与文[1]同理可得，右下角矩阵的秩对于 $s\in\sigma(Q_k)$，$K\in(i_1^0,\cdots,i_s^0)\cap(j_1^0,\cdots,j_t^0)$，有 $\sigma(Q_k)\subset\Lambda\subset\sigma(\bar{A})$. 这与题设矛盾,由此必要性得证.

证毕

易知系统(2.4)的强关联性可以保证定理 4.1 中的非消失性,由此得下列推论:

推论 4.1. 若系统(2.4)中 $E = I$ 时的分散系统为强关联的,那么对于任意的正整数 $(q_1, q_2,\cdots,q_N)$ 都存在 $(q_1, q_2,\cdots,q_N)$ 阶的分散补偿器(4.1),使得闭环谱与补偿器的谱不相交.

推论 4.2. 对于系统(2.4)中 $E = I$ 的情形且对任给的 $((i_1,\cdots,i_s)(j_1,j_2,\cdots,j_t))\in\boldsymbol{P}$ 系统(4.4)为非消失的,则

$$\Omega_{(q_1,q_2,\cdots,q_N)} = \Big\{(Q_i\ \ R_i\ \ S_i\ \ K_i)_{L_i}\in\boldsymbol{R}^{q_i\times q_i}\times\boldsymbol{R}^{q_i\times r_i}\times\boldsymbol{R}^{m_i\times q_i}\times\boldsymbol{R}^{m_i\times r_i},$$
$$i\in\bar{N}，且\ \Big[\bigcup_{i=1}^{N}\sigma(Q_i)\Big]\cap\sigma(\bar{A}) = \phi\Big\}$$

为 $R^{\sum_{i=1}^{N}(q_i^2+q_i\cdot r_i+m_i\cdot r_i+q_i\cdot m_i)}$ 中的一真子集簇.

定理 4.2 如果系统(2.4)当 $E=I$ 时的固定模都是稳定的，且对任意 $((i_1,\cdots,i_s),(j_1,j_2,\cdots,j_t))\in \boldsymbol{P}$，系统(4.4)为非消失的，那么存在形如式(4.1)的动态补偿器使得

i) $\sigma(\bar{A})\subset \boldsymbol{C}^-$.

ii) 补偿谱与闭环谱不相交 $\sigma(\bar{A})\cap\sigma(Q)=\phi$.

证明. 若固定模为稳定的，由文[3]可知存在形如(4.1)的动态补偿器使得 $\sigma(\bar{A})\subset \boldsymbol{C}^-$，再由推论 4.2 可知，对构造的补偿器进行小参数扰动，即可使 i), ii) 同时成立.

五、结 束 语

本文用分散控制的方法得到了分散控制系统的补偿谱与闭环谱不相交的充要条件. 该方法有普遍意义，对带前通的分散系统问题可以化为一高阶的广义分散控制系统的问题来解决，由此揭示了广义分散系统与正常分散系统的内在联系. 且对于系统(2.4)中 E 为奇异情形可以得到类似的结论. 本文的结果预示着非消失性与强关联性密切相关，作者对此将另文讨论.

参 考 文 献

[1] Yan Weiyong and Wang Enping, On the Intersection Problem of Compensating Spectra and Closed-loop Spectra, 控制理论与应用, **4**(1987),(4),57—69.
[2] Youla D. C., Bongiorno J. J. and C. N. Lu, Single loop Feedback Stabilization of Linear Multivariable Dynamic Plants, *Automatica* **10**(1974), 159—173.
[3] Davison E. J. and T. N. Chang, Decentralized Stabilization and Pole Assignment for General Improper Systems, Proc. American Control Conf. 1987, 1669—1675.
[4] W. Y. Yan and R. R. Bitmead, Decentralized Control of Multi-Channel Systems With Direct Control Feedthrough, *Int. J. of Control*, **49**(1989), (6), 2050—2075.
[5] 刘万泉，带前馈的广义分散系统的固定模，自动化学报，**17**(1991),(5),629—631.
[6] 刘万泉、严伟勇，无脉冲模广义分散系统的可控性，控制理论及应用，**9**(1992),(3),1—6.
[7] 刘万泉、王恩平，广义系统的一些性质，曲阜师范大学学报，**4**(1991),41—45.

ON THE INTERSECTION PROBLEM OF COMPENSATING SPECTRA AND CLOSED-LOOP SPECTRA FOR DECENTRALIZED CONTROL SYSTEMS WITH DIRECT CONTROL FEEDTHROUGH

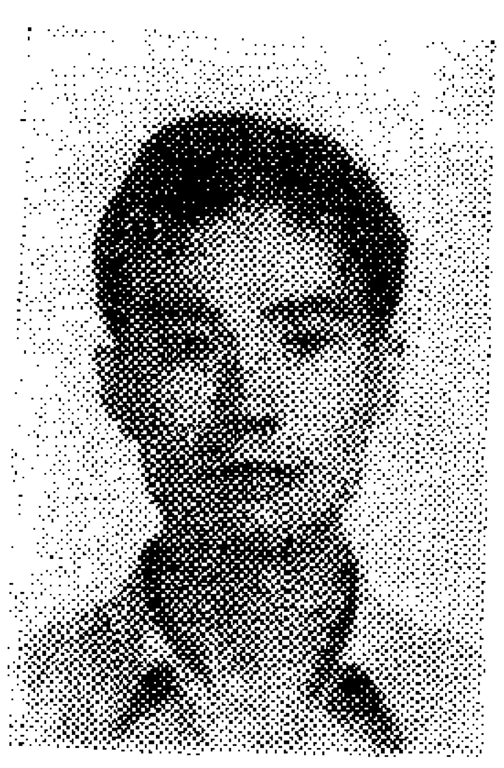
Liu Wanquan
(*Qufu Normal University, Shandong* 273165)
Xi Yugeng   Zhang Zhongjun
(*Shanghai Jiaotong University, Shanghai* 200030)

Abstract

In this paper, the intersection problem of compensating spectra and closed-loop spectra for decentralized systems with direct control feedthrough is studied by the properties of singular decentralized systems. With the concept of vanishing, necessary and sufficient condition is got for the problem. Moreover, the intersection of compensating spectra and its closed-loop spectra are also obtained when the conditions fail to hold.

Key words: Singular decentralized systems; fixed modes; vanishing property; compensating spectra; closed loop spectra.

刘万泉 1965 年生于山东临清. 1988 年在中科院系统所获硕士学位，1988 年至今在曲阜师范大学自动化研究所工作，1989 年考取上海交通大学在职博士生. 感兴趣的研究方向有广义系统、分散系统及机器人的协调控制.



席裕庚 1946 年 9 月生，上海市人. 1968 年毕业于哈尔滨军事工程学院，1984 年在慕尼黑工业大学获德国工学博士学位. 现任上海交通大学教授、自动控制理论及应用专业博士研究生导师. 目前的主要研究方向为复杂工业过程和智能机器人控制的理论和方法。

张仲俊 照片、简介见本刊第 17 卷第 6 期.