第19卷 第5期　　自 动 化 学 报　　Vol. 19, No. 5
1993 年 9 月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　Sep., 1993

取证过程的多目标控制[1)]

刘立平　陈珽
(华中理工大学系统工程研究所,武汉 430074)

摘　要

本文研究制订决策的取证问题,对这一问题构造了一个多目标最优控制模型,推导了求解模型的 Hamilton-Jacobi-Bellman 方程,并讨论了多目标模型解与相应的加权单目标模型解之间的关系和多层取证问题.

关键词: 多目标连续型控制,取证,决策信息,Hamilton-Jacobi-Bellman 方程.

一、引　言

要制订一项决策,首先必须知道决策所必须的信息. 决策信息包括决策方案集 A,目标集 C 和方案的结局评价 $[Y_t, Q_t]$,其中 Q_t 表示结局 Y_t 的概率. 记 $ISD^0=\{A, C, [Y_t, Q_t]\}$,称 ISD^0 为决策单元. 有了 ISD^0 的信息,结合决策人的偏好结构,就可制订决策. 但在实际决策过程中,ISD^0 并不是事前已知的,它需要决策人主动去获取. 称获取 ISD^0 信息的过程为决策取证过程.

取证是制订决策的前期工作,它对决策的正确与否有决定性影响. 采取不同的取证过程,可以将 ISD^0 从 $ISD^0(0)$ 推向不同的 $ISD^0(T)$,其中 T 为决策时刻. 不同的 $ISD^0(T)$ 对最终制订决策有不同的效果. 另一方面,不同的取证过程会导致不同的资源消耗(包括物质的和精神的). 因此取证过程的决策(元决策)必须在一定资源消耗下,取得最好的取证效果.

本文研究这样一类简化的决策取证问题:将原决策中所需的 ISD^0 的信息归结为要取得 $E_1, E_2, \cdots, E_J$ 个证据. 事先已知有 m 种取证行动 $a_1, a_2, \cdots, a_m$. 有 H 个渠道,例如 H 个专家,去估计每种行动获得每个证据的概率. 其中由第 h 渠道估计、由行动 a_i 获得证据 E_j 的概率为 $\theta^h(i,j)$. 赋予第 h 渠道所估计的概率的正确性的权重为 η_h,$\sum_{h=1}^{H}\eta_h=1$,$\eta_h\geqslant 0$. 随着取证过程的进行,权重 $\boldsymbol{\eta}=(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_H)$ 将动态地被修正. 设资源总量为 1,在时刻 t 分配给 a_i 行动的资源份额为 $\alpha^i(t)$,$\boldsymbol{\alpha}(t)=(\alpha^1(t), \alpha^2(t), \cdots, \alpha^m(t))\in S^m$,$S^m=\left\{\boldsymbol{\alpha}: \sum_{i=1}^{m}\alpha_i=1, \alpha_i\geqslant 0\right\}$. 要解决的问题是,如何分配资源份额 $\alpha^i(t)(i=1, \cdots, m) t\in[0, T]$,使得在 $[0, T]$ 时限内,获得证据 $E_1, E_2, \cdots, E_J$ 的可能

本文于 1991 年 3 月 11 日收到.
1) 国家自然科学基金资助项目.

性最大.

二、多目标取证模型

令 $q_h^j(s|\boldsymbol{\alpha}) = q_h^j(s)$ 表示在 $\boldsymbol{\alpha}(s)=\boldsymbol{\alpha}$ 和在采用第 h 概率估计渠道（以下简称第 h 渠道)的条件下,直到 s 时刻不能获得证据 E_j 的概率,则有

定理 1. $q_h^j(s) = \exp\left\{-\sum_{i=1}^{m} \theta^h(i,j) \int_0^s \alpha^i(u)\mathrm{d}u\right\}$. (1)

证明. 若采用第 h 渠道，则在 $[s,s+ds)$ 小区间内获得证据 E_j 的概率 $P^h(\boldsymbol{\alpha}(s), j)ds$ 为

$$P^h(\boldsymbol{\alpha}(s), j)ds = \sum_{i=1}^{m} \alpha^i(s)\theta^h(i,j)ds. \tag{2}$$

因而在 $[s,s+ds)$ 内不能获得 E_j 的概率是 $1-\sum_{i=1}^{m}\alpha^i(s)\theta^h(i,j)ds$. 根据 $q_h^j(s)$ 的定义显然有

$$q_h^j(s+ds) = q_h^j(s)\left(1-\sum_{i=1}^{m}\alpha^i(s)\theta^h(i,j)ds\right).$$

设 $ds\to 0$，取微分得

$$\dot{q}_h^j(s) = -q_h^j(s)\sum_{i=1}^{m}\alpha^i(s)\theta^h(i,j). \tag{3}$$

利用 $q_h^j(0)=1$，积分上式即得(1)式.

推论 1. 设取证 $E_1,E_2,\cdots,E_J$ 是互相独立的事件，则采用第 h 渠道，直到时刻 S，未取得任何证据的概率是 $q_h(s)$:

$$q_h(s) = \exp\left\{-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{J}\theta^h(i,j)\int_0^s \alpha^i(u)\mathrm{d}u\right\}. \tag{4}$$

设在小区间 $[s,s+ds)$ 内,如果 $\boldsymbol{\eta}(s)=\boldsymbol{\eta}$，获得证据 E_j 的概率为 $P^{\eta}(\boldsymbol{\alpha}(s), j)ds$，则

$$P^{\eta}(\boldsymbol{\alpha}(s),j) = \sum_{h=1}^{H}\eta_h P^h(\boldsymbol{\alpha}(s),j) = \sum_{h=1}^{H}\sum_{i=1}^{m}\eta_h\alpha^i(s)\theta^h(i,j). \tag{5}$$

令 $q^j(s)=\sum_{h=1}^{H}\eta_h q_h^j(s)$，并设取证 $E_1,E_2,\cdots,E_J$ 是互相独立的事件,且直到 S 未获得任何证据,则权重 $\boldsymbol{\eta}$ 的后验分布按 Bayes 规则可如下计算:

$$\eta_h(s) = \eta_h q_h(s)/q(s), \tag{6}$$

式中

$$q(s) = \sum_{h=1}^{H}\eta_h q_h(s). \tag{7}$$

在决策分析中,先验分布 $\eta_h(h=1,\cdots,H)$ 一般为主观概率. 关于主观概率的若干估计

方法可参阅文献[1]. 微分(7)式,并利用(3),(5)式,得到

$$\dot{q}(s)=\Sigma\eta_h\dot{q}_h(s)=\sum_{h=1}^{H}\eta_h\left(-\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{m}\theta^h(i,j)\alpha^i(s)\right)q_h(s)$$

$$=-q(s)\sum_{j=1}^{J}P^{\eta(s)}(\boldsymbol{\alpha}(s),j). \tag{8}$$

微分(6)式,得到

$$\dot{q}(s)\eta_h(s)+q(s)\dot{\eta}_h(s)=\eta_h\dot{q}_h(s).$$

代入(3)和(8)式,经整理后得到

$$\dot{\eta}_h(s)=\eta_h(s)\sum_{j=1}^{J}[P^{\eta(s)}(\boldsymbol{\alpha}(s),j)-P^h(\boldsymbol{\alpha}(s),j)]. \tag{9}$$

式中的 $\eta_h(s)$ 是采用第 h 渠道,直到 $s+ds$ 未获得任何证据时，η_h 的后验分布. 另一种情况是,如果在 $[s,s+ds)$ 区间内获得证据 E_j，则由 Bayes 公式，相应的 η_h 的后验估计为

$$\eta_h(s)=[T^j(\eta)]_h=\eta_hP^h(\boldsymbol{\alpha}(s),j)\Big/\sum_{h=1}^{H}\eta_hp^h(\boldsymbol{\alpha}(s),j). \tag{10}$$

由于问题的目的是获得证据 $E_1,E_2,\cdots,E_J$，并且 $E_1,E_2,\cdots,E_J$ 只须发现一次，同一证据重复发现被认为浪费资源. 据此,可将问题的目标描述为“在给定的时限 $[0,T]$ 内，设计控制策略(分配资源份额) $\boldsymbol{\alpha}(s)$，使得获取一次 $E_1,E_2,\cdots,E_J$ 的概率极大”.

令 $p^j(s)$ 为直到 s 只获得一次 E_j 的概率,则 $p^j(s+ds)$ 为

$$p^j(s+ds)=p^j(s)[1-p^{\eta(s)}(\boldsymbol{\alpha}(s),j)ds]+q^j(s)p^{\eta(s)}(\boldsymbol{\alpha}(s),j)ds,$$

或

$$\dot{p}^j(s)=p^{\eta(s)}(\boldsymbol{\alpha}(s),j)[q^j(s)-p^j(s)]. \tag{11}$$

类似于(8)式的推导,可得到

$$\dot{q}^j(s)=-q^j(s)p^{\eta(s)}(\boldsymbol{\alpha}(s),j). \tag{12}$$

积分上式得到

$$q^j(s)=\exp\left\{-\int_0^s p^{\eta(u)}(\boldsymbol{\alpha}(u),j)\mathrm{d}u\right\}$$

$$=\exp\left\{-\sum_{h=1}^{H}\sum_{i=1}^{m}\theta^h(i,j)\int_0^s\alpha^i(u)\eta_h(u)\mathrm{d}u\right\}. \tag{13}$$

将(12)式代入(11)式得到

$$\dot{p}^j(s)+\dot{q}^j(s)=-p^{\eta(s)}(\boldsymbol{\alpha}(s),j)p^j(s). \tag{14}$$

积分(14)式得到

$$p^j(s)+q^j(s)=1-\sum_{h=1}^{H}\sum_{i=1}^{m}\theta^h(i,j)\int_0^s\eta_h(u)\alpha^i(u)p^j(u)\mathrm{d}u. \tag{15}$$

可验证式中 $\sum_{h=1}^{H}\sum_{i=1}^{m}\theta^h(i,j)\int_0^s\eta_h(u)\alpha^i(u)p^j(u)\mathrm{d}u$ 为到 s 获得证据 E_j 两次以上的概率. 因此取证过程的数学模型可表示为

$$\max_{\alpha(s)}\{P^1(T),P^2(T),\cdots,P^J(T)\}, \tag{16}$$

受约束于

$$P^i(s)+q^i(s)=1-\sum_{h=1}^{H}\sum_{i=1}^{m}\theta^h(i,j)\int_0^s\eta_h(u)\alpha^i(u)p^j(u)\mathrm{d}u,$$

$$q^j(s)=\exp\left\{-\sum_{h=1}^{H}\sum_{i=1}^{m}\theta^h(i,j)\int_0^s\alpha^i(u)\eta_h(u)\mathrm{d}u\right\},$$

$$\begin{cases}\dot{\eta}_h(s)=\eta_h(s)\sum\limits_{j=1}^{J}[P^{\eta(s)}(\boldsymbol{\alpha}(s),j)-P^h(\boldsymbol{\alpha}(s),j)],\text{ 或者}\\ \eta_h(s)=\eta_hP^h(\boldsymbol{\alpha}(s),j)\Big/\sum\limits_{h=1}^{H}\eta_hP^h(\boldsymbol{\alpha}(s),j),\end{cases}$$

$$P^\eta(\boldsymbol{\alpha}(s),j)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{h=1}^{H}\eta_h\alpha^i(s)\theta^h(i,j),$$

$$P^h(\boldsymbol{\alpha}(s),j)=\sum_{i=1}^{m}\alpha^i(s)\theta^h(i,j),$$

$$\boldsymbol{\alpha}(s)\in s^m,\ \eta_h(0)=\eta_h^0\in s^H(h=1,\cdots,H).$$

如化成一个多目标的经典控制问题,则成为求控制策略 $\boldsymbol{\alpha}(s)$,使系统从状态($\eta_1^0,\cdots,\eta_H^0,0,\cdots,0$) 运动到 ($\eta_1(T),\cdots,\eta_H(T),P^1(T),\cdots,P^J(T)$), 并且使终点状态的后 J 个目标极大化. 这个模型是一个典型的左端固定右端自由的多目标约束控制问题[2]:

$$\max_{\boldsymbol{\alpha}(s)}\left\{\int_0^T\dot{P}^1(s)\mathrm{d}s,\int_0^T\dot{P}^2(s)\mathrm{d}s,\cdots,\int_0^T\dot{P}^J(s)\mathrm{d}s\right\},\tag{17}$$

受约束于

$$\dot{P}^j(s)=P^{\eta(s)}(\boldsymbol{\alpha}(s),j)[q^j(s)-P^j(s)],$$

(17)式其余的约束与(16)式的约束相同.

下面对上述取证模型进行简化. 一般一阶线性常微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的通解为

$$y=\exp\left(-\int P(x)\mathrm{d}x\right)\left[\int q(x)\exp\left(\int P(x)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x+c\right].$$

将初始条件 $P^j(0)=0$ 和(11),(13)式中的有关项代入上式并简化得到

$$P^j(s)=\left(\int_0^sP^{\eta(\tau)}(\boldsymbol{\alpha}(\tau),j)\mathrm{d}\tau\right)\left[\exp\left(-\int_0^sP^{\eta(\tau)}(\boldsymbol{\alpha}(\tau),j)\right)\mathrm{d}\tau\right].\tag{18}$$

已知函数 $f(x)=xe^{-x}$ 在 $x=1$ 处达到全局极大值, $f(1)=1/e$. 而在$[-\infty,1]$上 $f(x)$ 是递增函数,在$[1,+\infty)$上是递减函数. 由于

$$\int_0^sP^{\eta(\tau)}(\boldsymbol{\alpha}(\tau)\cdot j)\mathrm{d}\tau\leqslant1,$$

故有

定理 2. 在$[0,T]$内获得证据 E_j 一次的最大概率是 $\frac{1}{e}$, 并且 $P^j(T)$ 的极大值问题与

$$\int_0^TP^{\eta(\tau)}(\boldsymbol{\alpha}(\tau),j)\mathrm{d}\tau$$

的极大化等值.

如将以上取值的数学模型用矩阵形式表示，则更简洁．为此令

$$\boldsymbol{\alpha}(s)=(\alpha^1(s),\cdots,\alpha^m(s)),\ \boldsymbol{\eta}(s)=(\eta_1(s),\cdots,\eta_H(s)),$$

$$\Theta(j)=\begin{pmatrix}\theta^1(1,j),\cdots,\theta^H(1,j)\\ \vdots \\ \theta^1(m,j),\cdots,\theta^H(m,j)\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\theta}^h(j)=\begin{pmatrix}\theta^h(1,j)\\ \vdots \\ \theta^h(m,j)\end{pmatrix}.$$

因此

$$\Theta(j)=(\boldsymbol{\theta}^1(j),\cdots,\boldsymbol{\theta}^H(j)),$$

再令

$$\sum_{j=1}^{J}\Theta(j)=\Theta,\quad \sum_{j=1}^{J}\boldsymbol{\theta}^h(j)=\boldsymbol{\theta}^h\ (h=1,\cdots,H),$$

于是由(5)式有

$$P^{\eta(s)}(\boldsymbol{\alpha}(s),j)=\boldsymbol{\alpha}(s)\Theta(j)\boldsymbol{\eta}^T(s). \tag{19}$$

由(9)式有

$$\dot{\eta}_h(s)=\eta_h(s)\sum_{j=1}^{J}[\boldsymbol{\alpha}(s)\Theta(j)\boldsymbol{\eta}^T(s)-\boldsymbol{\alpha}(s)\theta^h(j)], \tag{20}$$

由此可推得

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}(s)=\boldsymbol{\alpha}(s)\Theta(\boldsymbol{\eta}^T(s)\boldsymbol{\eta}(s)-\mathrm{diag}\boldsymbol{\eta}(s)], \tag{21}$$

其中

$$\mathrm{diag}\,\boldsymbol{\eta}(s)=\begin{pmatrix}\eta_1(s)\cdots & 0\\ \vdots\ \ddots & \vdots\\ 0\ \cdots & \eta_H(s)\end{pmatrix}.$$

(10)式也可写成矩阵形式

$$\boldsymbol{\eta}(s)=T^j(\boldsymbol{\eta})=(\boldsymbol{\alpha}(s)\Theta(j)\boldsymbol{\eta}^T)^{-1}\boldsymbol{\alpha}(s)\Theta(j)\mathrm{diag}\boldsymbol{\eta}. \tag{22}$$

根据定理 2 和(19)—(22)式，简化后取证问题的数学模型可表示为（EFM）

$$\max_{\alpha(s)}\left\{\int_0^T\boldsymbol{\alpha}(s)\Theta(1)\boldsymbol{\eta}^T(s)\mathrm{d}s,\cdots,\int_0^T\boldsymbol{\alpha}(s)\Theta(J)\boldsymbol{\eta}^T(s)\mathrm{d}s\right\}, \tag{23}$$

受约束于

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{\eta}}(s)=\boldsymbol{\alpha}(s)\Theta[\boldsymbol{\eta}^T(s)\boldsymbol{\eta}(s)-\mathrm{diag}\boldsymbol{\eta}(s)],\ \text{或者}\\ \boldsymbol{\eta}(s)=T^j(\boldsymbol{\eta})=(\boldsymbol{\alpha}(s)\Theta(j)\boldsymbol{\eta}^T)^{-1}\boldsymbol{\alpha}(s)\Theta(j)\mathrm{diag}\boldsymbol{\eta},\end{cases}$$

$$\boldsymbol{\eta}(0)=\boldsymbol{\eta}^0,\ \boldsymbol{\alpha}(s)\in s^m.$$

三、Hamilton-Jacobi-Bellman 方程

下面用 Bellman 原理导出上述模型的求解方程，即 Hamilton-Jacobi-Bellman 方程[3]．

令 $V^j(t,\boldsymbol{\eta})$ 为

$$V^j(t,\eta)=\max_{\alpha(s)\in s^m}\left\{\int_t^T\boldsymbol{\alpha}(s)\Theta(j)\boldsymbol{\eta}^T(s)ds\right\}, \tag{24}$$

其边界条件为 $V^j(T,\boldsymbol{\eta}(T))=0$．现设系统以控制 $\alpha(t)$ 从状态 $(t,\boldsymbol{\eta}(t))$ 转移到 $(t+dt,\boldsymbol{\eta}(t+dt))$，而在 $(t+dt,\boldsymbol{\eta}(t+dt))$ 以后，则使用最优控制策略．因此在区间 $[t+$

$dt, T]$ 上的最优值为 $V^j(t+dt,\boldsymbol{\eta}(t+dt))$. 在区间 $[t, t+dt)$ 内，采用的控制为 $\boldsymbol{\alpha}(t)$ 时，$V^j(t,\boldsymbol{\eta}(t))$ 的增量为 $\boldsymbol{\alpha}(t)\Theta(j)\boldsymbol{\eta}^T(t)dt$. 根据 Bellman 最优性原理可知

$$V^j(t,\boldsymbol{\eta}(t)) = \max_{\boldsymbol{\alpha}(s)\in s^m}\{\boldsymbol{\alpha}(t)\Theta(j)\boldsymbol{\eta}^T(t)dt + V^j(t+dt,\boldsymbol{\eta}(t+dt))\}. \tag{25}$$

由于在 $[t,t+dt)$ 内,系统的权重 $\boldsymbol{\eta}$ 可以按(9)式或(10)式两种规律进行转移，它们分别对应于在 $t+dt$ 以前未获得任何证据和在 $[t,t+d_t)$ 区间内获得证据 E_k 时 η_h 的后验分布. 在区间 $[t,t+dt)$ 内获得证据 E_k 的概率为 $P^\eta(\boldsymbol{\alpha}(s),k)dt$, 即 $\boldsymbol{\alpha}(t)\Theta(k)\boldsymbol{\eta}^T dt + O(dt)$, 而直到 $t+dt$ 未获得任何证据的概率为 $\left(1-\sum_{k=1}^{J}\boldsymbol{\alpha}(t)\Theta(k)\boldsymbol{\eta}^T dt\right)$, 因此 $V^j(t+dt,\boldsymbol{\eta}(t+dt))$ 的期望值为

$$V^j(t+dt,\boldsymbol{\eta}(t+dt)) = \sum_{k=1}^{J}\boldsymbol{\alpha}(t)\Theta(k)\boldsymbol{\eta}^T V^j(t+dt,T^k(\boldsymbol{\eta}))dt + \left(1-\sum_{k=1}^{J}\boldsymbol{\alpha}(t)\Theta(k)\boldsymbol{\eta}^T dt\right)V^j(t+dt,\boldsymbol{\eta}+d\boldsymbol{\eta}) + o(dt),$$

式中的 $d\boldsymbol{\eta}$ 应按(9)式计算,而 $T^k(\boldsymbol{\eta})$ 应按(10)式计算. 由此可推得

$$V^j(t+dt,\boldsymbol{\eta}(t+dt)) = \sum_{k=1}^{J}\boldsymbol{\alpha}(t)\Theta(k)\boldsymbol{\eta}^T V^j(t,T^k(\boldsymbol{\eta}))dt + V^j(t,\boldsymbol{\eta}) + \frac{\partial V^j(t,\boldsymbol{\eta})}{\partial t}dt + \sum_{h=1}^{H}\frac{\partial V^j(t,\boldsymbol{\eta})}{\partial \eta_h}d_{\eta_h} - \sum_{k=1}^{J}\boldsymbol{\alpha}(t)\Theta(k)\eta^T V^j(t,\boldsymbol{\eta})dt + o(dt).$$

将上式代入(25)式,并略去高阶项 $o(dt)$, 得到 Hamilton-Jacobi-Bellman 方程为

$$-\frac{\partial V^j(t,\boldsymbol{\eta})}{\partial t} = \max_{\boldsymbol{\alpha}(t)\in s^m}\left\{\boldsymbol{\alpha}(t)\Theta(j)\boldsymbol{\eta}^T + \sum_{k=1}^{J}\boldsymbol{\alpha}(t)\Theta(k)\boldsymbol{\eta}^T V^j(t,T^k(\boldsymbol{\eta})) - V^j(t,\boldsymbol{\eta})\boldsymbol{\alpha}(t)\Theta\boldsymbol{\eta}^T + \sum_{h=1}^{H}\frac{\partial V^j(t,\boldsymbol{\eta})}{\partial \eta_h}\dot{\eta}_h\right\}. \tag{26}$$

其矩阵形式为

$$\begin{aligned}-\frac{\partial V^j(t,\boldsymbol{\eta})}{\partial t} &= \max_{\boldsymbol{\alpha}(t)\in s^m}\left\{\boldsymbol{\alpha}(t)\left[\Theta(j)\boldsymbol{\eta}^T + \sum_{k=1}^{J}\Theta(k)\boldsymbol{\eta}^T V^j(t,T^k(\boldsymbol{\eta})) - V^j(t,\boldsymbol{\eta})\Theta\boldsymbol{\eta}^T + \Theta(\boldsymbol{\eta}^T\boldsymbol{\eta} - \mathrm{diag}\,\boldsymbol{\eta})\nabla_\eta V^j(t,\boldsymbol{\eta})\right]\right\} \\ &= \max_{\boldsymbol{\alpha}(t)\in s^m}\{\boldsymbol{\alpha}(t)\boldsymbol{F}_j(t,\boldsymbol{\eta})\},(j=1,\cdots,J).\end{aligned} \tag{27}$$

这是一组一阶的非线性偏微分方程组，相应的边界条件为 $V^j(T, \boldsymbol{\eta}(T)) = 0(j=1,\cdots,J)$. 因此，取证模型的求解成为对如下问题的求解：求 $\boldsymbol{\alpha}(t)\in s^m$, 使得(21),(22)式有唯一解,且有某组 $V^1(t,\boldsymbol{\eta}),\cdots,V^J(t,\boldsymbol{\eta})$, 使方程组(27)成为等式.

由于取证模型是一个多目标控制模型,一般情况下,很难得到同一控制策略 $\boldsymbol{\alpha}(t)$ 和对应的状态方程的解 $\boldsymbol{\eta}(t)$, 使得所有目标泛函都取极大. 为此,对多个目标应进行调和折中. 在多目标决策中,常用的有两种方法,即加权法和约束法[1], 由此求得的解称为非

劣解(有效解)．采用加权法应根据证据 $E_1, E_2, \cdots, E_J$ 的相对重要程度，赋予第 i 个目标的权重为 w_j,($(w_1, \cdots, w_J) = \boldsymbol{w} \in s^J$)．于是可将取证模型 EFM 变换为单目标控制模型 SEFM(w)：

$$\max_{\alpha(j) \in s^m} \int_0^T \sum_{j=1}^J w_j \boldsymbol{\alpha}(s) \Theta(j) \boldsymbol{\eta}^T(s) \mathrm{d}s,$$

受约束于

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\eta}}(s) = \boldsymbol{\alpha}(s) \Theta [\boldsymbol{\eta}^T(s) \boldsymbol{\eta}(s) - \mathrm{diag} \boldsymbol{\eta}(s)] \text{ 或者} \\ \boldsymbol{\eta}(s) = T^j(\boldsymbol{\eta}) = (\boldsymbol{\alpha}(s) \Theta(j) \boldsymbol{\eta}^T)^{-1} \boldsymbol{\alpha}(s) \Theta(j) \mathrm{diag} \boldsymbol{\eta}, \end{cases}$$

$$\boldsymbol{\eta}(0) = \boldsymbol{\eta}^0, \ \boldsymbol{\alpha}(s) \in s^m, \ \forall s \in [0, T].$$

令 $F(t, \boldsymbol{\eta}) = (F_1(t, \boldsymbol{\eta}), F_2(t, \boldsymbol{\eta}), \cdots, F_J(t, \boldsymbol{\eta}))$, $\boldsymbol{V}(t, \boldsymbol{\eta}) = (V^1(t, \eta), V^2(t, \boldsymbol{\eta}), \cdots V^J(t, \boldsymbol{\eta}))$，则对应于 SEFM($\boldsymbol{\omega}$) 的 Hamilton-Jacobi-Bellman 方程为

$$-\frac{\partial \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{V}^T(t, \boldsymbol{\eta})}{\partial t} = \max_{\alpha(t) \in s^m} \{\boldsymbol{\alpha}(t) \cdot \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{F}^T(t, \eta)\}.$$

在多目标决策理论中已论证[1,4]，如加权向量 $\boldsymbol{\omega} > 0$，或对 $\boldsymbol{\omega} \in s^J$ 的加权优化问题有唯一解，就能保证所得到的解是原来的向量优化问题的非劣解．这个结论对于本文所讨论的动态多目标优化问题仍然成立．因篇幅限制，证明从略．

四、结 束 语

当决策问题所需的证据 $E_1, E_2, \cdots, E_J$ 和相应的决策单元 ISD^0 为部分未知时，本文导出了一个取证决策问题．这个问题是论证资源的最优分配，在给定时限内，使获得证据 $E_1, E_2, \cdots, E_J$ 的可能性最大．设取证决策问题的决策单元为 ISD^1，本文的模型推导是建立在 ISD^1 已知的基础上．如果 ISD^1 也是部分未知的，那么可以类似地导出新一层的取证决策问题，其决策单元为 ISD^2，如此等等．对这种多层决策问题仍有待继续研究．

参 考 文 献

[1] 陈珽，决策分析，科学出版社，(1987).
[2] 庞特里雅金，П. С.，最佳过程的数学理论，陈祖浩等译，上海科学技术出版社，(1965).
[3] 叶庆凯、王肇明，优化与最优控制中的计算方法，科学出版社，(1986).
[4] Chankong, V. and Haimes, Y.Y., Multiobjective Decision Making, Theory and Methodology, North-Holland, Amsterdam, (1983).

MULTIOBJECTIVE CONTROL FOR EVIDENCE-FINDING PROCESS

LIU LIPING CHEN TING

(*Institute of Systems Engineering, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan* 430074)

ABSTRACT

In this paper, the problem of evidence-finding process for decision making is studied. A multiobjective optimal control model is constructed for the evidence finding problem, which yields the Hamilton-Jacobi-Bellman equation to get the optimal solution. The relation between the solution of the multiobjective model and the solution of the weighted single objective model is discussed and an interesting multilayer evidence-finding problem for further investigation is presented.

Key words: Multiobjective Control; evidence-finding; decision information; Hamilton-Jacobi-Bellman equation.

刘立平 照片、简历见本刊第 19 卷第 2 期.

陈 珽 照片、简历见本刊第 19 卷第 2 期.