第19卷 第5期 自 动 化 学 报 Vol. 19, No. 5
1993 年 9 月 ACTA AUTOMATICA SINICA Sep., 1993

Morgan 问题:输入数=输出数+1 情形

陈 树 中
(华东师范大学数学系,上海 200062)

摘 要

本文给出了 m 个输出, $m+1$ 个输入时线性系统的 Morgan 问题有解的充要条件,该条件是核对一组向量的相关性和解线性方程组.

关键词: 解耦,状态反馈,可逆性.

一、引 言

Morgan 问题(即解耦问题)自 1964 年 Morgan[1] 提出以来,吸引了大批研究者. 对于方可逆系统,文献[2—6]给出了不同形式的充要条件. 对于非方右可逆系统,文献[7]研究了一类特殊的反馈形式, $u=Fx+Gv$, $I_mF\subset I_mG$. 文献[9]研究了一般反馈律,认为它们的条件是充要的. 1988 年 Descusse 等人[8]指出文献 [9] 的结论仅是充分条件,给出了新的条件,并认为是充要的. IFAC 委员会在 1988 年发布的控制理论与应用的进展情况介绍中宣布, Morgan 问题已在文献[8]中解决. 但最近, Lafag, J.F. (文献[8]的作者之一)给出了一个反例[10],说明文献[8]的条件不充分,因此 Morgan 问题仍未解决. 本文研究输入数比输出数多 1 时的情形,给出的充要条件是核对一组向量的相关性和解线性方程组.

二、问题和初步结果

考虑右逆系统

$$\begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu,\\ y=Cx,\end{cases} \tag{1}$$

其中 $x\in R^n$, $y\in R^m$, $u\in R^p$, $p\geqslant m$.

Morgan 问题是寻找状态反馈律 (K,G)

$$u=Kx+Gv, \tag{2}$$

使闭环传递函数为

$$C(sI-A-BK)^{-1}BG=\operatorname{diag}(g_{11}(s),\cdots,g_{mm}(s)),\ g_{ii}(s)\not\equiv 0,\ i\in \underline{m}, \tag{3}$$

若存在反馈律(2)使(3)式成立,则称系统(1)是可解耦的,系统右可逆是可解耦的必

本文于 1991 年 12 月 10 日收到.

要条件.

定义 1. 若G是满秩方阵，则称(2)式为正则反馈，否则称为非正则反馈. 若 (K,G) 使闭环右逆，则称(2)式为允许反馈.

正则反馈和使系统(1)解耦的反馈都是允许反馈，Morgan 问题只需允许反馈，以下简称反馈. 记C的第 i 行为 c_i，对右逆系统，必存在 $j, c_iA^jB \neq 0$，$i \in \underline{m}$.

定义

$$\begin{cases} n_i = \min\{j / c_iA^{j-1}B \neq 0\}, \\ \gamma_i = c_iA^{n_i-1}B, \qquad i \in \underline{m}, \end{cases} \tag{4}$$

$$D = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_m \end{bmatrix}. \tag{5}$$

记 $A_K = A + BK$，对反馈产生的闭环系统，用 A_K, BG 代替(4)式中的A和 B，类似地可以定义 $\bar{n}_i, \bar{r}_i$ 和 $\bar{D}$.

定理 1.[2] 方可逆系统 (C,A,B) 可以解耦的充要条件是D满秩.

记 $(\mathscr{K},\mathscr{G}) = \{(K,G)/(C,A+BK,BG)$ 是方可逆可解耦$\}$,

显然，(1)式可解耦的充要条件是 $(\mathscr{K},\mathscr{G})$ 非空.

下面几个引理是明显的，证略.

引理 1. $A_K^i = A^i + \sum_{j=1}^{i} A^{i-j}Bf_j(K)$, $f_j(K) = K(A+BK)^{j-1}$.

引理 2. 若 $c_iA^jB = 0$, $j < l$, $c_iA^lB \neq 0$, 则对一切 K, $c_iA_K^jB = 0$, $j < l$, $c_iA_K^lB = c_iA^lB$.

引理 3. 对正则反馈 (K,G), *a*) (C,A,B) 可解耦的充要条件是 $(C, A+BK, BG)$ 可解耦. *b*) $\bar{n}_i = n_i$, $\bar{r}_i = r_iG$, $i \in \underline{m}$.

引理 4. 若 (K,G) 是非正则反馈，$r_iG \neq 0$, 则 $\bar{n}_i = n_i$, $\bar{r}_i = r_iG$.

引理 5. 若 $(K,G) \in (\mathscr{K},\mathscr{G})$, 则 $\operatorname{rank} G = m$.

三、$p=m+1$ 情形

定义 2. 实矩阵M的第 i 行称为M的基本行，若它不是其它行的线性组合.

引理 6. 若 $\operatorname{rank}D = d < m$, 则 $(\mathscr{K}, \mathscr{G})$ 非空的必要条件是D中有 $d-1$ 个行向量是基本的.

证明. 不妨设 $r_i, i \in \underline{d}$ 线性无关，$(K,G) \in (\mathscr{K},\mathscr{G})$, 则 $\bar{D}$ 满秩，若引理不真，只能有两种情形.

1) $r_{d+1}, \cdots, r_m$ 中至少存在两个向量是 r_i, $i \in \underline{d}$ 中两个向量的倍式，如 $r_{d+1} = \alpha_1 r_1$, $r_{d+2} = \alpha_2 r_2$. 因为 $\operatorname{rank}G = m, r_1G, r_2G$ 中至少一个非零，设 $r_1G \neq 0$, 由引理 4, $\bar{r}_{d+1} = \alpha_1 \bar{r}_1$, $\bar{D}$ 不满秩.

2) $r_{d+1}, \cdots, r_m$ 中存在某个向量，如 r_{d+1}, 有

$$r_{d+1}=\sum_{j=1}^{t}\alpha_{i_j}r_{i_j},\ \alpha_{i_j}\neq 0,\ i_j\in \underline{d},\ t\geq 2,$$

a）若 $r_{d+1}G=0$，则

$$\sum_{j=1}^{t}\alpha_{i_j}r_{i_j}G=0,$$

$r_{i_j}G$ 中至多一个为零,设为 $r_{i_1}G$，当 $t=2$ 时，$r_{i_2}G=0$，与 $\mathrm{rank}G=m$ 矛盾，$t\geq 3$ 时,由引理 4．$\bar r_{i_2},\cdots,\bar r_{i_t}$ 线性相关,与 $\bar D$ 满秩矛盾．

b）若$r_{d+1}G\neq 0$，类似推出 $\bar D$ 不满秩．

下设 r_i，$i\in\underline{d-1}$ 是基本的，否则对 C 作置换，不影响可解耦性．$r_i=\alpha_i r_d$，$i\in(d+1,\cdots,m)$，记输出和输入的第 i 个分量为 y_i 和 u_i，相应的 j 阶导数记为 $y_i^{(j)}$，$u_i^{(j)}$，由 r_i 的定义知

$$y_i^{(n_i)}=c_iA^{n_i}x+r_iu,\ i\in\underline{d},$$
$$y_i^{(n_i)}=c_iA^{n_i}x+\alpha_ir_du,\ i\in(d+1,\cdots,m).$$

记 e_i^m 为m维单位向量,即 $e_i^m=(0,\cdots,0\ 1,0,\cdots,0)$,其中 1 在第 i 个位置,由 $r_i,i\in\underline{d}$ 线性无关,可用正则反馈消去 $c_iA^{n_i}x$，$i\in\underline{d}$．不妨设

$$y_i^{(n_i)}=u_i,\ r_i=e_i^{m+1},\ i\in\underline{d},\tag{6a}$$
$$y_i^{(n_i)}=c_iA^{n_i}x+\alpha_iu_d,\ r_i=\alpha_ie_d^{m+1},\ i\in(d+1,\cdots,m).\tag{6b}$$

现在逐次对 $y_{d+1},\cdots,y_m$，求更高阶导数,对 y_{d+1}，存在 m_{d+1} 使得

$$y_{d+1}^{(n_{d+1}+m_{d+1})}=c_{d+1}A^{n_{d+1}+m_{d+1}}x+c_{d+1}A^{n_{d+1}+m_{d+1}-1}Bu+\sum_{j=n_{d+1}-1}^{n_{d+1}+m_{d+1}-2}c_{d+1}A^jBu^{(n_{d+1}+m_{d+1}-1-j)},\tag{7a}$$

$$c_{d+1}A^jB\in\mathrm{span}\{r_1,\cdots,r_d\},j\in(n_{d+1}-1,\cdots,n_{d+1}+m_{d+1}-2),\tag{7b}$$
$$c_{d+1}A^{n_{d+1}+m_{d+1}-1}B\bar\in\mathrm{span}\{r_1,\cdots,r_d\},\tag{7c}$$

事实上若 m_{d+1} 不存在，则对一切 i，$y_{d+1}^{(n_{d+1}+i)}$ 仅为 x 和 $u_1,\cdots,u_d$ 及其导数的线性组合，为简单起见，记为

$$y_{d+1}^{(n_{d+1}+i)}=T_ix+Q_i(u_1,\cdots,u_d,u_1^{(1)},\cdots,u_d^{(1)},\cdots,u_d^{(i)}),\ i=0,1,\cdots,$$

由于 $n+1$ 个 n 维向量必相关，所以存在 j，使 T_j 是 T_i，$i\in(0,\cdots,j-1)$ 的线性组合,消去 T_j 得

$$y_{d+1}^{(n_{d+1}+j)}=Q_j(y_{d+1}^{n_{d+1}},\cdots,y_{d+1}^{n_{d+1}+j-1},u_1,\cdots,u_d,u_1^{(1)},\cdots,u_d^{(1)},\cdots,u_d^{(j)}),$$

即 $u_1,\cdots,u_d$ 和 y_{d+1} 间的传递函数有如下形式:

$$y_{d+1}(s)=\sum_{i=1}^{d}R_i(s)u_i(s),$$

由 (6a) 式，$y_i(s)=u_i(s)/s^{n_i}$，$i\in\underline{d}$，因此系统(1)的传递函数前边 $d+1$ 行的秩为 d，和系统右逆矛盾．

由(7c)式,不妨设 $c_{d+1}A^{n_{d+1}+m_{d+1}-1}B=e_{d+1}^{m+1}$，取 $u_{d+1}=k_{d+1}x+v_{d+1}$ 可消去 (7a) 式右边第一项，而(7b)式仍然成立．对 $y_{d+2},\cdots,y_m$，用同样推理知存在适当正则反馈和 m_i，$i\in(d+1,\cdots,m)$，使

$$y_i^{(n_i)}=u_i,\ r_i=e_i^{m+1},\ i\in\underline{d},\tag{8a}$$

$$y_i^{(n_i+m_i)} = c_iA^{n_i+m_i-1}Bu + \sum_{j=n_i-1}^{n_i+m_i-2} c_iA^jBu^{(n_i+m_i-1-j)},\ i \in (d+1,\cdots,m), \tag{8b}$$

$$c_iA^{n_i+m_i-1}B = e_i^{m+1},\ r_i = \alpha_i e_d^{m+1},\ i \in (d+1,\cdots,m), \tag{8c}$$

$$c_iA^jB \in \operatorname{span}\{e_1^{m+1},\cdots,e_{i-1}^{m+1}\},\ i \in (d+1,\cdots,m),$$
$$j \in (n_i-1,\cdots,n_i+m_i-2), \tag{8d}$$

引理 7. 设 $(K,G)\in(\mathscr{K},\mathscr{G})$, $r_du = u_d$,

$$K = \begin{bmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_{m+1} \end{bmatrix},\quad G = \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_{m+1} \end{bmatrix},\quad K_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ k_d \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},\quad G_0 = \begin{bmatrix} e_1^m \\ \vdots \\ e_{d-1}^m \\ 0 \\ e_d^m \\ \vdots \\ e_m^m \end{bmatrix},$$

其中 k_d 在 K_0 的 d 行,则 1) $g_d = 0$, 2) $(K_0,G_0)\in(\mathscr{K},\mathscr{G})$.

证明. 若 1) 不成立,由 $r_du = u_d$ 知 $r_dG = g_d \neq 0$, 即 $\bar r_d \neq 0$, 从而 $\bar r_j = \alpha_j \bar r_d$, $j\in(d+1,\cdots,m)$, 与 $\bar D$ 满秩矛盾。对于 2),记 $\bar K,\bar G$ 是 K 和 G 中删去 d 行后的矩阵,因为 $\operatorname{rank} G = m$, $\bar G$ 是满秩方阵, $G = G_0\bar G$, $K = K_0 + G_0\bar K$, 对系统 $(C,\ A+BK_0,\ BG_0)$ 作正则反馈得到 $(C, A+BK, BG)$, 由引理 3 即得结论.

因此 $(\mathscr{K},\mathscr{G})$ 非空等价于存在 k_d, 使 $(K_0,G_0)\in(\mathscr{K},\mathscr{G})$. 记 B 的 d 列为 b_d,则 $A+BK_0 = A + b_dk_d$. 经反馈 (K_0,G_0), y_i 的 j 阶导数记为 $y_i^{(j)}(k)$, 因闭环右逆, 存在 m_d, 使 $\bar n_d = m_d + n_d$, 即

$$y_d^{(n_d+m_d)}(k) = c_dA_{k_0}^{n_d+m_d}x + \bar r_dv. \tag{9}$$

定理 2. 设系统(1)的矩阵满足(8)式, 则 k_d 使 $(K_0,G_0)\in(\mathscr{K},\mathscr{G})$ 的充要条件是

1) 记 $f_0(K_0) = 0$, $f_i(K_0) = k_d(A+b_dk_d)^{i-1}$, $i \geqslant 1$, 则

a) $f_i(K_0)BG_0 = 0$, $i\in(0,\cdots,m_d-1)$.

b) $\bar r_d = f_{m_d}(K_0)BG_0$, 且最后一个分量不为零.

2) $m_d \geqslant m_i$, $i\in(d+1,\cdots,m)$.

3) (8b) 式中求和号内的向量满足

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} c_iA^{n_i-1}B \\ \vdots \\ c_iA^{n_i+m_i-2}B \end{bmatrix} = \operatorname{rank} c_iA^{n_i-1}B = 1,\ i\in(d+1,\cdots,m),$$

证明. 必要性,下面直接计算 $\bar r_i$, 显然

$$\bar r_i = r_iG_0 = e_i^m,\ i \in \underline{d-1}, \tag{10}$$

对于 $\bar r_d$, 由(8a)式, $c_dA^{n_d} = 0$, 从而 $c_dA^i = 0$, $\forall i \geqslant n_d$, 由(9)式和引理 1 可得

$$\bar r_d = c_dA_{k_0}^{n_d+m_d-1}BG_0 = c_dA^{n_d-1}b_df_{m_d}(K_0)BG_0 = f_{m_d}(K_0)BG_0. \tag{11}$$

由(9)式得

$$c_dA_{k_0}^iBG_0 = 0, i\in(0,\cdots,n_d+m_d-2), \tag{12}$$

若 $m_d = 1$, 条件 1) 的 a) 自然成立。当 $m_d > 1$ 时,由(12)式, 从 $c_dA_{k_0}^{n_d}BG_0 = 0$, 可

得 $f_1(K_0)BG_0=0$，类似地直到 n_d+m_d-2，即得条件 1) 的 a).

对于 $\bar{r}_{d+1}$，由 n_{d+1} 的定义和引理 2 知,当 $i<n_{d+1}$ 时,有 $c_{d+1}A_k^iBG_0=0$.

$$
\begin{aligned}
c_{d+1}A_{k_0}^{n_{d+1}+i}BG_0 = c_{d+1}(&A^{n_{d+1}+i}+A^{n_{d+1}+i-1}b_df_1(K_0) \\
&+\cdots+A^{n_{d+1}-1}b_df_{i+1}(K_0))BG_0,
\end{aligned} \tag{13}
$$

若条件 3) 对 $i=d+1$ 不成立,则存在 j 使得

$$
j=\min\{i/c_{d+1}A^{n_{d+1}+i}BG_0\neq 0, i\in(0,\cdots,m_{d+1}-2)\}, \tag{14}
$$

由条件 1)的 a),(11),(13)式,当 $m_d=1$ 时,有

$$
\bar{r}_{d+1}=\begin{cases} c_{d+1}A^{n_{d+1}}BG_0+\alpha_{d+1}\bar{r}_d\in \operatorname{span}(\bar{r}_1,\cdots,\bar{r}_d), & j=0, \quad (15a)\\ \alpha_{d+1}\bar{r}_d, & 0<j\leqslant m_{d+1}-2, \quad (15b)\end{cases}
$$

因此和 $\bar{D}$ 满秩矛盾. 此时若条件 3)成立而条件 2)不成立,即 $m_{d+1}>m_d=1$，则(15b)式成立,因此 $m_d=1$ 时,条件 2),3)均成立,当 $m_d>1$ 时,有

$$
\bar{r}_{d+1}=\begin{cases} c_{d+1}A^{n_{d+1}+j}BG_0\in\operatorname{span}(\bar{r}_1,\cdots,\bar{r}_{d-1}), \ 0\leqslant j\leqslant m_d-2, & (16a)\\ c_{d+1}A^{n_{d+1}+j}BG_0+\alpha_{d+1}\bar{r}_d\in\operatorname{span}(\bar{r}_1,\cdots,\bar{r}_d), \ j=m_d-1, & (16b)\\ \alpha_{d+1}\bar{r}_d, \ m_d-1<j\leqslant m_{d+1}-2, & (16c)\end{cases}
$$

当 $m_{d+1}>m_d$ 时,(16)式中必有一式成立,当 $m_{d+1}\leqslant m_d$ 时(16a)式必成立，即条件 3) 对 $i=d+1$ 时成立,在此条件下,若 $m_{d+1}>m_d$，直接由(13)式知，$\bar{r}_{d+1}=\alpha_{d+1}\bar{r}_d$，因此条件 2) 对 $i=d+1$ 时成立. 此时当 $m_d>m_{d+1}$ 时，$\bar{r}_{d+1}=e_d^m$；当 $m_d=m_{d+1}$ 时，$\bar{r}_{d+1}=e_d^m+\alpha_{d+1}\bar{r}_d$. 对于 $i\geqslant d+2$，只要在(15)，(16)式中将 $\bar{r}_{d+1},\cdots,\bar{r}_{i-1}$ 相应地加到 span$(\cdots)$ 中，用完全同样推理知条件 2),3) 是必要的. 余下要证明的是 $\bar{r}_d$ 最后一个分量不能为零. 这是因为

$$
\bar{D}=\begin{bmatrix} e_1^m \\ \vdots \\ e_{d-1}^m \\ \bar{r}_d \\ e_d^m+\beta_{d+1}\bar{r}_d \\ \vdots \\ e_{m-1}^m+\beta_m\bar{r}_d \end{bmatrix},
$$

其中 β_i 是零或 α_i,在相反情形，$\bar{D}$ 不满秩.

充分性. 由定理 1 和 $\bar{D}$ 满秩即得.

定理 3. 输入数等于输出数加 1 时,系统(1)可以解耦的充要条件是

1) 若 $\operatorname{rank} D=d$，则D中有 $d-1$ 个行向量是基本的.

2) 用适当正则反馈使系统(1)满足(8)式,则

a) 定理 2 条件 3) 满足.

b) 让 $\bar{B}$ 是 B 中删去第 d 列后的矩阵，则下面方程组关于 k_d 有解.

$$
\begin{cases} k_dA^i\bar{B}=0, \ 0\leqslant i<m_d-1, & (17a)\\ k_dA^{m_d-1}\bar{B}=(x,\cdots,x\alpha), \ \alpha\neq 0, \ m_d\geqslant m_i, i\in(d+1,\cdots,m), & (17b)\end{cases}
$$

(当 $m_d=1$ 时，(17a)式不需要)，x 是任意元.

证明. 系统矩阵满足(8)式已隐含了条件 1)，因此为证明定理，只要说明(17)式和

定理 2 的 1) 和 2) 等价. $m_d \geqslant m_i$, $i \in (d+1,\cdots,m)$ 是(17)式所要求的, 利用归纳法,将 $f_i(K_0)BG_0$ 展开,即知方程组(17)等价于定理 2 的条件 1).

注. 因为$\sum_{i=1}^{d-1} n_i+\sum_{i=d}^{m}(n_i+m_i)\leqslant n$, 因此 m_d 的一个明显上界是 $n-\sum_{i=1}^{m} n_i-\sum_{i=d+1}^{m} m_i$.

Lafay, J. F. 的反例如下:

$$\begin{cases}\dot{x}_1=u_1,\ \dot{x}_2=u_2,\ \dot{x}_3=x_4,\ \dot{x}_4=x_5,\ \dot{x}_5=x_6,\ \dot{x}_6=u_3,\\ \dot{x}_7=x_2+x_8,\ \dot{x}_8=x_9,\ \dot{x}_9=u_4,\ y_1=x_1,\ y_2=x_2,\ y_3=x_1+x_3,\end{cases} \tag{18}$$

直接计算知该系统的无穷零结构 $\{n_i'\}=\{1,1,4\}$, 它的对偶列[9] $\{p_i\}=\{3,1,1,1\}$. (c_i,A,B) 的无穷零点并集为 $\{n_i\}=\{1,1,1\}$, Morse 列 I_2 的对偶列是 $\{\alpha_i\}=\{1,1,1\}$, 基本阶 $\{n_{ie}\}=\{4,1,4\}$. 为使基本阶相同,在第 2 个输出串接一个 3 阶积分器, 得到位移系统 $(\underline{C},\underline{A},\underline{B})$, 相应地有 $\{\underline{n}_i'\}=\{1,4,4\}$, $\{\underline{p}_v\}=\{3,2,2,2\}$, $\{\underline{n}_i\}=\{1,1,4\}$, $\{\underline{n}_{ie}\}=\{4,4,4\}$, 由$\{\underline{p}_i\}$和$\{p_i\}$ 得到 $\{\Delta_i\}=\{1,1,1\}$, 显然对一切 j 有 $\sum_{i=1}^{j}\alpha_i\geqslant\sum_{i=1}^{j}\Delta_i$, 按文献[8]的结论,原系统可以解耦.

文献[10]已指出上述例实际上不可解耦,下边验证定理 3 的条件.

$y_1^{(1)}=u_1$, $r_1=(1\ \ 0\ \ 0\ \ 0)$,

$y_2^{(1)}=u_2$, $r_2=(0\ \ 1\ \ 0\ \ 0)$,

$y_3^{(1)}=x_4+u_1$, $r_3=(1\ \ 0\ \ 0\ \ 0)$,

即D的秩为 2, r_2 是基本的. 对 y_3 继续求导得

$$y_3^{(4)}=u_3+u_1^{(3)},$$

即$m_3=3$, (18)式的系统矩阵已有(8)式的形式,定理 2 的条件 3) 满足,令 $k_1=(k^1,\cdots,k^9)$, 直接计算知, $k_1\bar{B}=(k^2\ k^6\ k^9)=0$, $k_1A\bar{B}=(k^7\ k^5\ k^8)=0$, $k_1A^2\bar{B}=(0\ k^4\ k^7)=0$, $A^3\bar{B}$ 的最后一列为零,因此满足定理 3 的 k_1 和 m_1 不存在,系统不可解耦.

参　考　文　献

[1] Morgan, B. S., The Synthesis of Linear Multivariable Systems by State Feedback, *J. A. C. C* **64**(1964), 468—472.

[2] Falb, P. L. and Wolovich, W. A., Decoupling in the Design and Synthesis of Multivariable Control Systems, *IEEE* AC-**12**(1967), 651—669.

[3] Wonham, W. M. and Morse, A. S., Decoupling and Pole Assignment in Linear Multivariable Systems: A Geometic Approach, *SIAM. J. Control* 8(1970), 1—18.

[4] Hautus, M. L. J. and Heymann, M., Linear Feedback Decoupling-Transfer Function Analysis, *IEEE* AC-**28**(1983), 823—832.

[5] Descusse, J. and Dion, J. M., On the Structure at Infinity of Linear Square Decoupled Systems, *IEEE* AC-**27**(1982), 971—974.

[6] Commault, C., Descusse, J., Dion, J. M., Lafay, J. F. and Malabre, M., About New Decoupling Invariants: The Essential Orders, *Int. J. Control* **44**(1986), 689—700.

[7] Kamiyama, S. and Furuta, K., Decoupling by Restricted State Feedback, *IEEE* AC-**21**(1976), 413—415.

[8] Descusse, J., Lafay, J. F. and Malabre, M., Solution to Morgan's Problem, *IEEE* AC-**33**(1988), 732—739.

[9] Suda, N. and Umashashi, K., Decoupling of Nonsquare Systems: A Necessary and Sufficient Condition in Terms of Infinite Zeros, Proc 9th IFAC World Congress (1984), 88—93, Budapest.
[10] Glumineau, A. and Moog, C. H., Nonlinear Morgan's Problem: Case of (p+1) inputs and p outputs, 将发表在 SIAM. J. Control.

MORGAN' S PROBLEM: CASE OF INPUT NUMBER =OUTPUT NUMBER+1

CHEN SHU ZHONG
(*Dept. of Mathematics, East China Normal University, Shanghai* 200062)

ABSTRACT

We give a necessary and sufficient condition for the solution of Morgan's problem of linear systems with m outputs and m+1 inputs. This condition is the verification of the dependence of a set of vectors and solving a set of linear equations.

Key words: Decoupling; state feedback; invertibility.

陈树中 1943 年 2 月生于江苏常熟，1965 年毕业于南京大学数学系，现任华东师范大学数学系副教授。主要研究领域有线性系统，分散控制，奇异系统和控制理论在工业中的应用等。