第 19 卷 第 5 期
1993 年 9 月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 19, No. 5
Sep., 1993

短 文

从 LQR 理论设计容错 MIMO 系统的方法[1)]

叶银忠 李三广 蒋慰孙
（华东化工学院自动化研究所，上海 200237）

摘 要

本文提出了从 LQR 理论设计稳定容错 MIMO 控制系统的新方法，证明了通过适当选取权矩阵 Q 或 R，可以构造出在稳定性意义上对执行器或传感器的失效具有容错性能的状态反馈系统，并给出了 Q、R 的选取方法.

关键词: MIMO 系统，容错控制，执行器，传感器失效，LQR 理论.

一、引 言

众所周知，线性二次型调节器（LQR）问题已经得到了广泛的研究[1,2]. 由求解 LQR 问题而构成的闭环系统具有许多卓越的性质，例如每个控制通道都有无穷大的增益稳定裕度和至少 60° 的相位稳定裕度[3]，输出的最大超调量也有明确的上限[4]，并且这些性质与二次型权矩阵 Q、R 无关。另一方面，LQR 系统的某些性质取决于权矩阵 Q 和 R. E. Shimemura, M. Fujita[5,6], F. Heger, P. M. Frank[7] 等人的工作已证实了一种可能性，即通过适当选取 Q、R，可使 MIMO 系统对某些故障具有容错性能.

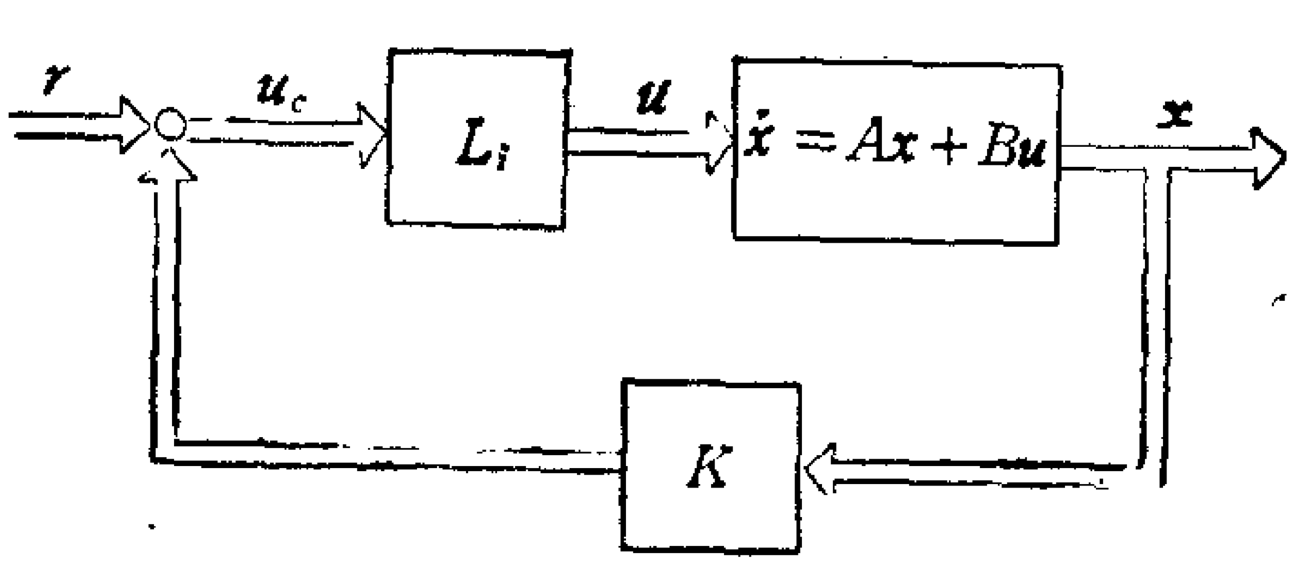

图 1 执行器故障下的 MIMO 系统

考虑图 1 所示的系统，其中被控对象的状态方程为

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{1}$$

$x \in R^n, u \in R^m$，且 $\{A, B\}$ 可控. 系统采用如下的状态反馈:

$$u_c = r - Kx, \quad u = L_i u_c. \qquad (2),(3)$$

其中 $L_i = \mathrm{diag}\{l_1, l_2, \cdots l_m\}$ 是执行器故障矩阵，即

$l_j = 1$，当执行器 j 正常时；

$l_j = 0$，当执行器 j 失效时.

设执行器的故障共有 $N + 1(\leqslant 2^m - 1)$ 种组合模式，记为 $\mathscr{L} = \{L_0, L_1, \cdots, L_N\}$，

本文于 1991 年 11 月 15 日收到.
1）本项研究承国家自然科学基金资助.

则显然 $L_i \in \mathscr{L}$. 记 λ 表示系统的闭环极点，则当 $\mathrm{Re}\lambda < -\alpha$ ($\alpha > 0$) 时，系统稳定且具有稳定裕度 α. 本文所研究的问题即为：寻求一个状态反馈矩阵 K，使对于任一 $L_i \in \mathscr{L}$，均有 $\mathrm{Re}\lambda < -\alpha$.

二、Riccati 方程的一个性质

下述引理 1,2 是众所周知的：

引理 1. 考虑如下的 Riccati 方程：

$$A^TP + PA - PBR^{-1}B^TP + Q = 0, \tag{4}$$

其中 $Q \geqslant 0, R > 0$, $R = R^T, Q = V^TV$. 则当 $\{A,B\}$ 可镇定，$\{V,A\}$ 可检测时，方程(4)有唯一解 $P \geqslant 0$；且当 $\{V,A\}$ 可观测时，$P > 0$. 并且对于 $k \geqslant 0.5$，有

$$\mathrm{Re}\lambda(A - kBR^{-1}B^TP) < 0. \tag{5}$$

由引理 1 可得如下推论：

推论 1. 若 $\mathrm{Re}\lambda(A) < 0$，则方程(4)有唯一解 $P \geqslant 0$.

推论 2. 若 $\mathrm{rank}\ Q = n$，则方程(4)有唯一解 $P > 0$.

引理 2. 对于系统(1)，考虑如下的二次型成本函数：

$$J_\infty = \int_0^\infty e^{2\alpha t}(x^TQx + u^TRu)\mathrm{d}t, \tag{6}$$

其中 $\alpha > 0$, Q、R 的假设如前，则相应的最优状态反馈矩阵为

$$K = R^{-1}B^TP, \tag{7}$$

P 为如下 Riccati 方程的解：

$$(A + \alpha I)^TP + P(A + \alpha I) - PBR^{-1}B^TP + Q = 0, \tag{8}$$

且

$$\mathrm{Re}\lambda\ (A - BR^{-1}B^TP) < -\alpha. \tag{9}$$

由上述引理和推论，可得如下定理：

定理 1. 在 Riccati 方程(4),(8)中，若 $\mathrm{rank}\ Q = n$，则有

1) 对于给定的 R，若 $Q_1 = (1 + \beta)Q_2$，且 $\beta > 0$，则 $P_1 > P_2$.

2) 对于给定的 Q，若 $R_1 = \dfrac{1}{(1 + \beta)}R_2$，且 $\beta > 0$，则 $P_1 \geqslant P_2$.

证明. 以方程(4)为例，(8)式的证明过程相同. 设与 $Q_1(R_1)$、$Q_2(R_2)$ 对应的解分别为 P_1、P_2，且令 $P_1 = P_2 + \Delta P$.

1) 由(4)式可导出 ΔP 满足如下的 Riccati 方程

$$\begin{aligned}(A - BR^{-1}B^TP_2)^T\Delta P + \Delta P(A - BR^{-1}B^TP_2)\\ - \Delta PBR^{-1}B^T\Delta P + \beta Q_2 = 0.\end{aligned} \tag{10}$$

由引理 1，$\mathrm{Re}\lambda(A - BR^{-1}B^TP_2) < 0$，又因 $\mathrm{rank}\ Q_2 = n$，由推论 1,2,(10)式有唯一解 $\Delta P > 0$，即 $P_1 > P_2$

2) 此时 ΔP 满足一个类似的 Riccati 方程

$$\begin{aligned}[A - (1 + \beta)BR_2^{-1}B^TP_2]^T\Delta P + \Delta P[A - (1 + \beta)BR_2^{-1}B^TP_2]\\ - \Delta PBR_1^{-1}B^T\Delta P + \beta P_2BR_2^{-1}B^TP_2 = 0.\end{aligned} \tag{11}$$

由引理 1，$\mathrm{Re}\lambda\ (A-(1+\beta)BR_2^{-1}B^TP_2)<0$，因此由推论 1，方程（11）有唯一解 $\Delta P\geqslant 0$，即 $P_1\geqslant P_2$.

三、对执行器故障的容错状态反馈控制律

考虑执行器故障时，系统(图 1)的状态方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=A\boldsymbol{x}+BL_i\boldsymbol{u}_c,\quad \boldsymbol{u}_c=\boldsymbol{r}-K\boldsymbol{x}. \tag{12),(13}$$

定理 2. 若式(6)中 $\mathrm{rank}\ Q=n$，且 R 为对角阵，则当 Q、R 及 Riccati 方程 (8) 的解 P 满足条件

$$PB(2L_i-I)R^{-1}B^TP+Q>0,\ \forall L_i\in\mathscr{L} \tag{14}$$

时，式(7)确定的 $K(=R^{-1}B^TP)$ 是系统(12,13)的一个容错状态反馈控制律，即对于任一 $L_i\in\mathscr{L}$，均有

$$\mathrm{Re}\lambda(A-BL_iR^{-1}B^TP)<-\alpha. \tag{15}$$

证明．式(15)等价于

$$\mathrm{Re}\lambda(A+\alpha I-BL_iR^{-1}B^TP)<0,$$

易知上式成立的一个充分条件是

$$(A+\alpha I-BL_iR^{-1}B^TP)^TP+P(A+\alpha I-BL_iR^{-1}B^TP)<0, \tag{16}$$

由方程(8)可得

$$(A+\alpha I)^TP+P(A+\alpha I)=PBR^{-1}B^TP-Q, \tag{17}$$

将(17)式代入(16)式，并注意到 $L_iR^{-1}=R^{-1}L_i$，即可证得条件(14).

定理 3. 记

$$S=PB(2L_i-I)R^{-1}B^TP+Q, \tag{18}$$

则必存在 Q、R，使 $S>0$.

证明．注意到对于任意的 Q、R

$$\mathrm{Re}\lambda(A-BR^{-1}B^TP)<0,$$

因此必然存在 $\bar{Q},\bar{Q}=\bar{Q}^T$，使

$$(A-BR^{-1}B^TP)^TP+P(A-BR^{-1}B^TP)+\bar{Q}=0, \tag{19}$$

亦即

$$A^TP+PA-2PBR^{-1}B^TP+\bar{Q}=0. \tag{20}$$

将方程(8)代入上式，可得

$$Q-PBR^{-1}B^TP=2\alpha P+2Q-\bar{Q}, \tag{21}$$

因此

$$S=2PBL_iR^{-1}B^TP+2\alpha P+2Q-\bar{Q}. \tag{22}$$

显然 $2PBL_iR^{-1}B^TP\geqslant 0$，且由定理 1，$P$ 将随 Q 的增大(R 的减小)而增大（非减)，因此必然存在某个 Q、R 使 $2\alpha P+2Q-\bar{Q}>0$，从而使 $S>0$.

定理 3 既保证了满足条件(14)的 Q、R 的存在性，同时又为选取 Q 和 R 提供了一种“逐步校正式”的方法，即

1) 从初始值 Q_0、R_0 开始，维持 $R=R_0$ 不变，按 $Q=(1+\beta)Q_0\ (\beta>0)$ 逐步校正 Q 矩阵，最终使 $S>0$；或者

2) 维持 $Q = Q_0$ 不变,按 $R = \frac{1}{(1+\beta)} R_0 (\beta > 0)$ 逐步校正 R,最终使 $S > 0$; 或者

3) 对 Q 和 R,按上述两种方法进行同时校正.

四、对传感器故障的稳定容错控制律

对于状态反馈系统而言,除了执行器故障外,还可能涉及用于测量状态变量的传感器的故障, 见图 2, 其中 M_i 为传感器故障矩阵, 其结构与 L_i 相同, 即 $M_i = \mathrm{diag}\{m_1, m_2, \cdots, m_n\}$, 相应于传感器 j 的"正常"或"失效",m_j分别等于 1 或 0 . 同理可有 $M_i \in \mathscr{M}$,$\mathscr{M}$ 为传感器故障的各种组合模式. 此时系统的状态方程为:

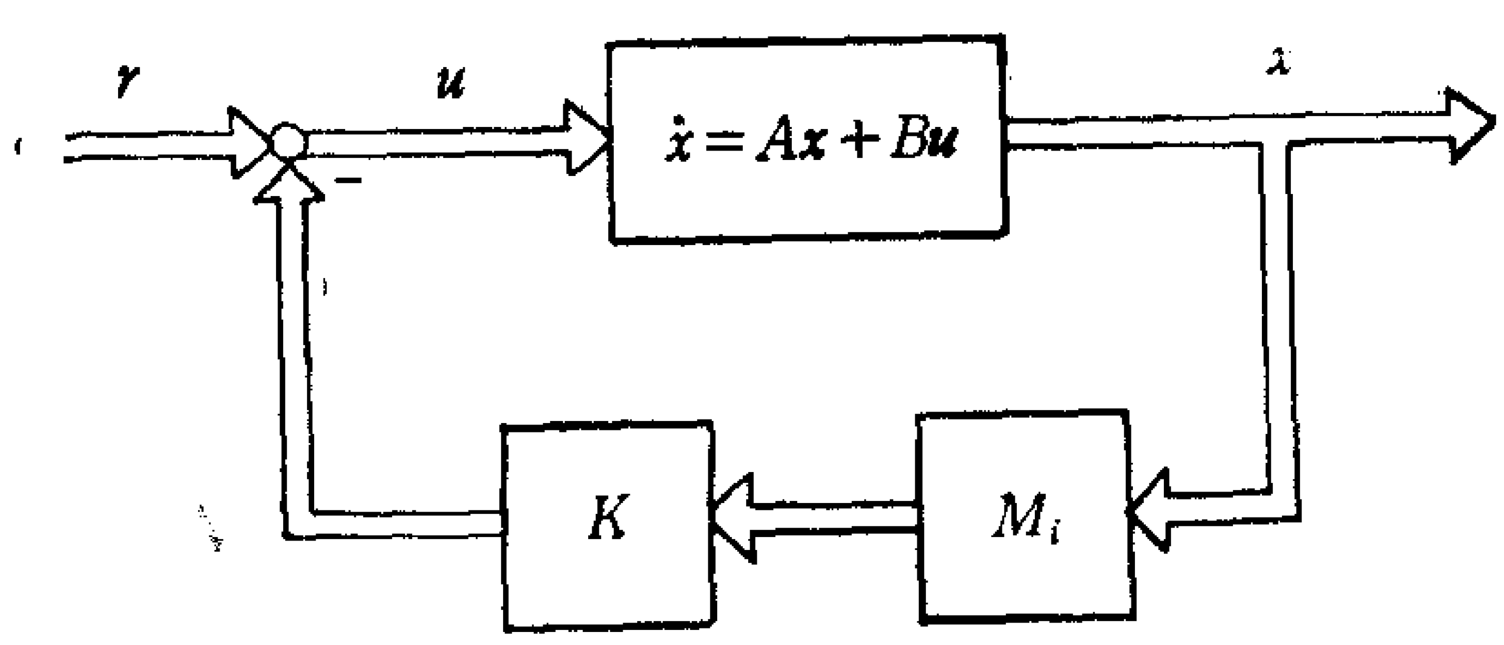

图 2 传感器故障下的状态反馈系统

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{23}$$

$$u = r - KM_i x. \tag{24}$$

定理 4. 在式(6)中,若 Q、R 的假设如定理 2, 则当 Q、R 及方程(8)的解 P 满足如下条件

$$(M_i - I)PBR^{-1}B^TP + PBR^{-1}B^TPM_i + Q > 0, \ \forall M_i \in \mathscr{M} \tag{25}$$

时,由式(7)确定的 $K(=R^{-1}B^TP)$ 构成系统(23,24)的一个稳定容错控制律, 即对于任一 $M_i \in \mathscr{M}$, 均有

$$\mathrm{Re}\lambda(A - BR^{-1}B^TPM_i) < -\alpha. \tag{26}$$

定理 5. 当 Q、R 及方程(8)的解 P 满足条件

$$M_jPBR^{-1}L_iB^TP + PBL_iR^{-1}B^TPM_j - PBR^{-1}B^TP + Q > 0 \tag{27}$$

时,式(7)确定的 K 对故障 L_i 和 M_j 同时具有稳定容错的性能,即

$$\mathrm{Re}\lambda(A - BL_iR^{-1}B^TPM_j) < -\alpha. \tag{28}$$

定理 4,5 的证明与定理 2 相同. 权矩阵 Q、R 的选取仍可采用与前相同的方法, 通过逐步校正来确定.

五、示 例

系统如图 1 所示,其中

$$A = \begin{bmatrix} -0.128 & 25 & 1.912 \\ 0.05 & -26.642 & -1.791 \\ 3.485 & -2.465 & -7.12 \end{bmatrix},$$

$$B=\begin{bmatrix}4.294 & 0 & 0.155\\ -3.981 & 0 & -0.061\\ 0 & -2.994 & 0\end{bmatrix}.$$

容易求得 $\lambda(A)=\{0.001,-6.772,-27.12\}$，因此系统非开环稳定．考虑如下的执行器故障模式：

$$L_1=\mathrm{diag}\{0,1,1\},\ L_2=\mathrm{diag}\{1,0,1\},$$
$$L_3=\mathrm{diag}\{1,1,0\},$$

并取稳定裕度 $\alpha=0.1$，选初始权矩阵 $Q_0=0.5*I$，$R_0=I$，按本文提出的方法对 Q 进行逐步校正，最终可得 $Q=4*I$，$R=I$ 是一组合适的权矩阵．由此导致的状态反馈矩阵为

$$K=\begin{bmatrix}3.351 & 2.477 & 0.51\\ -1.156 & -0.864 & -1.37\\ 0.503 & 0.45 & 0.042\end{bmatrix}. \tag{29}$$

可以验证，对于 L_1,L_2,L_3，条件(14)均可满足，且

$$\lambda(A-BL_1K)=\mathrm{diag}\{-0.15,-10.738,-27.155\},$$
$$\lambda(A-BL_2K)=\mathrm{diag}\{-1.783,-7.176,-29.508\},$$
$$\lambda(A-BL_3K)=\mathrm{diag}\{-1.72,-11.297,-29.504\}.$$

系统的单位阶跃响应曲线如图 3 所示．可见，式(29)的状态反馈矩阵对 L_1、L_2、L_3 均具有稳定容错的性能．

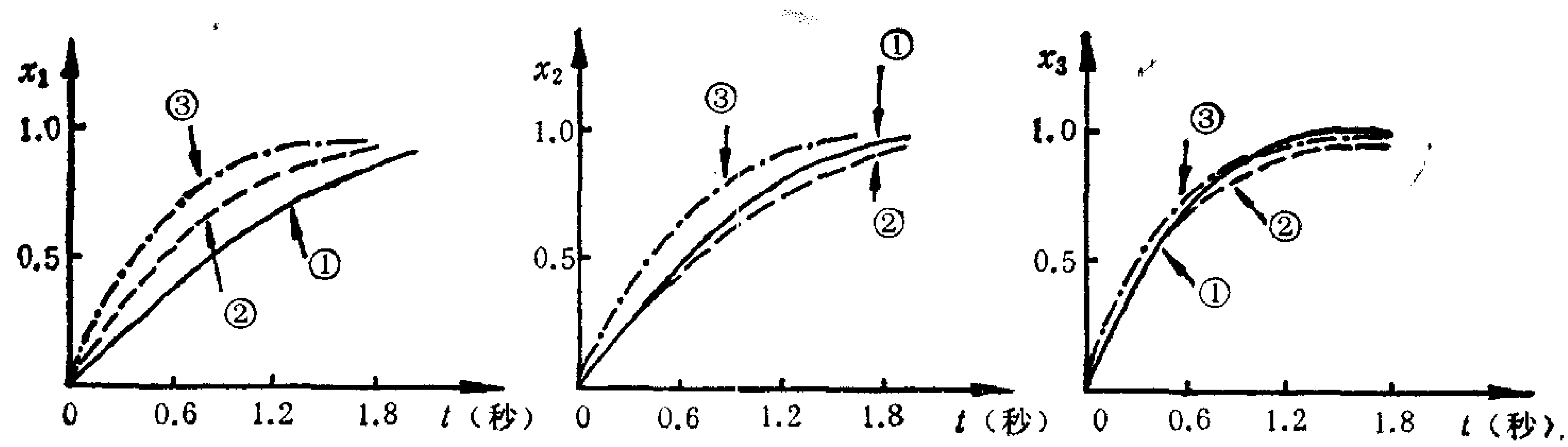

图 3　容错控制系统的单位阶跃响应曲线

① L_1　② L_2　③ L_3

本文基于 LQR 理论研究了 MIMO 系统对执行器、传感器故障的容错控制问题，提出了一种新的设计方法，通过逐步校正权矩阵 Q 或 R，使按常规 LQR 方法设计出的状态反馈控制律对执行器或传感器的失效具有稳定容错的性能．在此设计方法中，系统可具有预期的稳定裕度．

参　考　文　献

[1] Anderson, B. D. O., J. B. Moore, Linear Optimal Control, Prentice Hall Inc., 1971.

[2] Kwakernaak, H., R. Sivan, Linear Optimal Control Systems, New York, Wiley Interscience, 1972.

[3] Safonov, M. G., M. Athans, Gain and Phase Margin for multiloop LQR Regulators, *IEEE Trans. Aut. Control*, AC-22(1977), 173—179.

[4] Kobayashi, H., E Shimemura, Some Properties of Optimal Regulators and Their Applications, *Int. J. Control,* 33(1981), 587—599.

[5] Shimemura, E., M. Fujita, A Design Method for Linear State Feedback Systems Possessing Integrity Based on a Solution of a Riccati-Type Equation, Int. J. Control, 42(1985), 887—899.

[6] Fujita, M., E. shimemura, A New Type of Linear State Feedback Control Possessing Integrity Based on a Solution of Generalized Riccati-Type Equation, Control Theory and Advanced Technology, 2(1986), 563—575.

[7] Heger, F., P. M. Frank, Linear Quadratic Regulators with Prescribed Eigenvalues for a Family of Linear Systems, Multivariable Control: New Concepts and Tools, D. Reidel Publishing Company, 1984, 281—292.

DESIGN OF FAULT-TOLERANT MIMO SYSTEM FROM LQR THEORY

YE YINZHONG LI SANGUANG JIANG WEISUN

(East China University of Chemical Technology, Shanghai 200237)

ABSTRACT

In this paper a new design procedure is proposed. This procedure can lead to a stable fault-tolerant MIMO system from LQR theory. It is shown that, in the sense of system stability, a state feedback MIMO system capable of tolerating either the actuator or the sensor failure or even both can grow out of modification of the quadratic weights in the LQ cost function. Such a modification procedure is given for the design of a stable fault-tolerant MIMO system.

Key words: MIMO system; fault-tolerant control; actuator or sensor failure; LQR theory.