



# 区间多项式族左扇区稳定鲁棒性及不变惯性定理

赵克友

(青岛大学工程系, 青岛 266071)

## 摘要

本文考虑区间多项式族关于左扇区的稳定鲁棒性, 用值集排零方法推导出强哈氏定理和不变惯性定理, 并给出了构造强哈氏多项式及棱边族的简明算法。

**关键词:** 多项式; 稳定性; 鲁棒性。

## 一、问题的叙述

稳定性区域定义为如下的左扇区(图1):

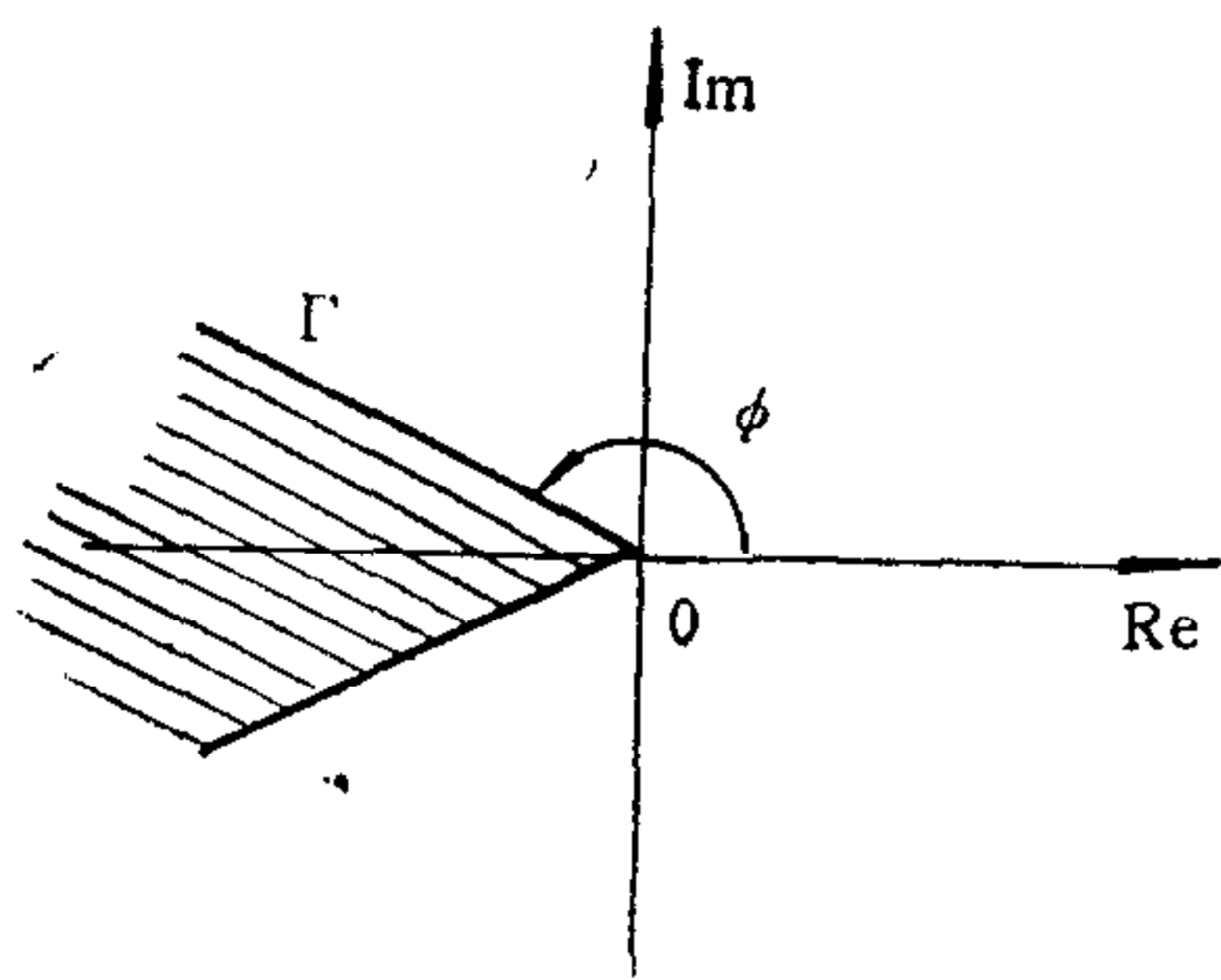


图 1

$$D_\phi := \{s \in \mathbf{C} \mid \phi < \arg(s) < 2\pi - \phi\}, \quad (1)$$

其中  $\phi = \frac{p}{q}\pi \in \left[\frac{1}{2}\pi, \pi\right)$ ,  $p$  与  $q$  为互质自然数, 一个多项式  $p(s)$  在区域  $D_\phi$  内, 开的  $D_\phi$  外及  $D_\phi$  的边界  $\partial D_\phi$  上的根的数目分别记以  $\mu(p)$ ,  $\nu(p)$  和  $\pi(p)$ , 称三元数  $(\mu(p), \nu(p), \pi(p))$  为  $p(s)$  的惯性指数. 若一个多项式族中所有成员都有固定不变的惯性指数, 则称这族有着不变的惯性. 一个  $n$  阶多项式族是鲁棒  $D_\phi$  稳定的如果它的不变惯性指数为  $(n, 0, 0)$ .  $D_\phi$  稳定多项式的全体记为  $H_\phi$ .

设有  $n$  阶区间多项式族

$$\mathcal{P} := \{p(s) = p_0 + p_1s + \dots + p_ns^n \mid c < p_i^- \leq p_i \leq p_i^+, i = 0, 1, \dots, n\}. \quad (2)$$

本文考虑的问题是

p1)  $\mathcal{P}$  是鲁棒  $D_\phi$  稳定的吗? 如何检验?

p2)  $\mathcal{P}$  有着不变的惯性吗? 如何检验?

Kharitonov (以下简称哈氏) 于 1977 年获得的关于区间多项式 Hurwitz 稳定性的

有历史意义的结果极大地促进了对不确定系统鲁棒性的研究, 近年来发表了一些关于哈氏定理证明的文献<sup>[1]</sup>. Soh, Y. C. 等将哈氏结果推到左扇区稳定性方面而得到所谓强哈氏定理<sup>[2]</sup>, 但证明不直观且未给出强哈氏多项式系数的实用算法. 本文用值集排零方法推导强哈氏定理及不变惯性定理, 通过对值集的描述给出强哈氏多项式一般系数的公式.

## 二、值集的特征

由于共轭对称的原因, 只须考虑  $D_\phi$  的上边界  $\Gamma := \{re^{i\phi} | r \in [0, +\infty)\}$  在多项式  $p(s)$  映射下的像  $p(\Gamma)$ , 并称之为  $p(s)$  的广义奈氏曲线. 定义

$$V(r) := \{p(re^{i\phi}) | p(\cdot) \in \mathcal{D}\} \quad (3)$$

为  $\mathcal{D}$  的值集, 其中  $r \in [0, +\infty)$ .

**定理 1.** 对任意  $r > 0$ ,  $V(r)$  为复平面上的平行凸  $2q$  边形且各对边分别平行于单位向量  $e^{ik\phi}$ ,  $k = 0, 1, \dots, q-1$ .

证明. 设  $a(s) \in \mathcal{D}$ , 对它的项重新组合如下:

$$a(s) = (a_0 + a_q s^q + a_{2q} s^{2q} + \dots) + s(a_1 + a_{q+1} s^q + a_{2q+1} s^{2q} + \dots) \\ + \dots + s^{q-1}(a_{q-1} + a_{2q-1} s^q + a_{3q-1} s^{2q} + \dots),$$

代  $s = re^{i\phi}$  于上式, 并注意到  $s^{kq} = r^{kq} e^{ikq\phi} = (-1)^{kp} r^{kq}$  后有

$$a(re^{i\phi}) = t_0(r) + t_1(r)e^{i\phi} + \dots + t_{q-1}(r)e^{i(q-1)\phi}, \quad (4)$$

其中  $t_k(r) = a_k r^k + (-1)^p a_{q+k} r^{q+k} + (-1)^{2p} a_{2q+k} r^{2q+k} + \dots$ ,  $k = 0, 1, \dots, q-1$ .

固定  $r$  且让上式中各  $a_i$  遍取区间  $[p_i^-, p_i^+]$  的值后, 可求得  $t_k(r)$  的最大值  $t_k^+(r)$  与最小值  $t_k^-(r)$ , 即  $t_k(r) \in [t_k^-(r), t_k^+(r)]$ , 于是从(4)式可得

$$V(r) = [t_0^-(r), t_0^+(r)] + [t_1^-(r), t_1^+(r)]e^{i\phi} + \dots \\ + [t_{q-1}^-(r), t_{q-1}^+(r)]e^{i(q-1)\phi}. \quad (5)$$

注意上式中  $[t_k^-(r), t_k^+(r)]e^{ik\phi}$  表示的是复平面实轴线段  $[t_k^-(r), t_k^+(r)]$  绕原点正向旋转  $k\phi$  角度后的一条线段, 而(5)式说明值集  $V(r)$  正是这各线段的仿射和(集合和). 故  $V(r)$  必是平行凸  $2q$  边形且各对边分别平行于方向  $e^{ik\phi}$ . 证毕.

由  $\mathcal{D}$  的值集  $V(r)$  的那  $2q$  个顶点所确定的多项式称为  $\mathcal{D}$  的强哈氏多项式, 并记以  $K^i(s)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 2q$ .

定理 1 启示我们去确定  $K^i(s)$  的各系数. 因对任意  $r > 0$ ,  $V(r)$  有相同的几何特征, 因此只要考虑  $V(1)$  就行.

第 1 步. 若  $V(1)$  仅有一个最右端点, 那末它对应的就是  $K^1(s)$ : 即求  $p(e^{i\phi})$  实部的最大值便可唯一定出  $K^1(s)$  各系数. 若  $V(1)$  有两个最右端点, 则规定对应右下端那个是  $K^1(s)$ ; 此时先求  $p(e^{i\phi})$  实部最大值定下  $K^1(s)$  中的大部分系数, 那些未定系数由取  $p(e^{i\phi})$  虚部最小值来定.

第 2 步. 将  $V(1)$  正向转  $\pi - \phi$  角度后, 对  $e^{i(\pi-\phi)}V(1)$  再实行第一步中做法, 这样可唯一定出  $K^2(s)$  各系数.

.....

第  $q$  步. 对  $e^{i(q-1)(\pi-\phi)}V(1)$  实行上面第一步做法, 求得  $K^q(s)$ .

第  $q+1$  步. 对  $K^1(s)$  中各系数的上标取反, 即“+”变“-”, “-”变“+”, 得到的多项式即为  $K^{q+1}(s)$ . 如此继续直到对  $K^q(s)$  中各系数的上标取反, 得  $K^{2q}(s)$  为止.

综上所述,  $K^i(s)$  中各系数  $p_k, k=0, 1, \dots, n$  的取法公式为

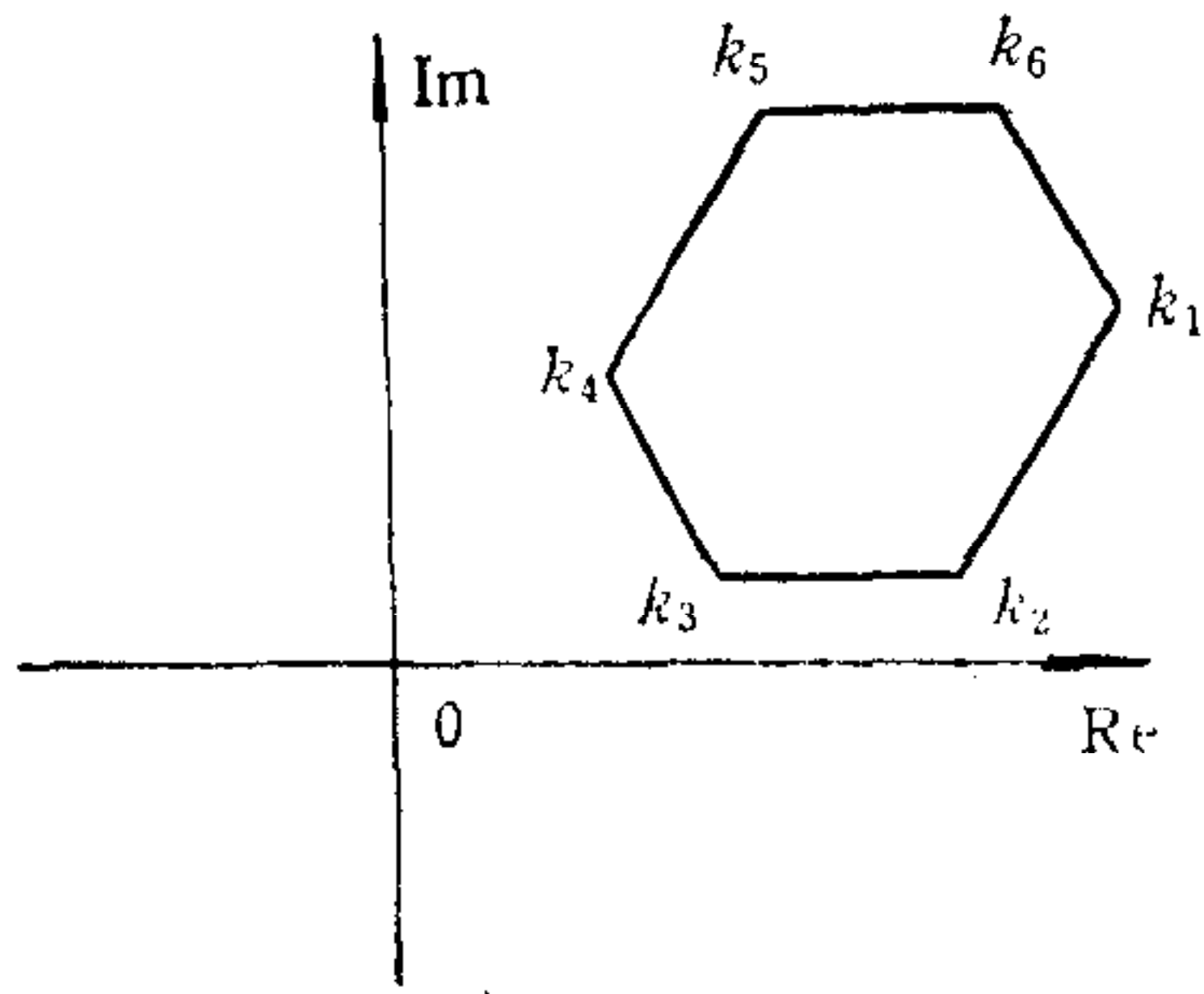


图 2

$$p_k = \begin{cases} p_k^+, & \text{当 } \cos((i-1)(\pi-\phi) + k\phi) > 0; \\ & \text{或 } \cos((i-1)(\pi-\phi) + k\phi) = 0, \\ & \sin((i-1)(\pi-\phi) + k\phi) < 0, \\ p_k^-, & \text{当 } \cos((i-1)(\pi-\phi) + k\phi) < 0; \\ & \text{或 } \cos((i-1)(\pi-\phi) + k\phi) = 0, \\ & \sin((i-1)(\pi-\phi) + k\phi) > 0. \end{cases}$$

令  $i=1, 2, \dots, q$  便可确定  $K^1(s), K^2(s), \dots, K^q(s)$ ; 剩下那  $q$  个强哈氏多项式按上面解释算法中第  $q$  步求出. 对  $\phi = \frac{2}{3}\pi$  的情况, 值集  $V(r)$  的形状及  $K^i(s)$  所对应的位置见图 2.

### 三、强哈氏定理

鲁棒性分析中的值集排零法<sup>[3]</sup>是行之有效的, 在本文情况下的具体叙述如下:

**引理 1.**  $\mathcal{D} \subset H_\phi$  当且仅当 (i)  $\exists p(s) \in \mathcal{D}$  使  $p(s) \in H_\phi$ , (ii)  $0 \in V(r) \forall r \in [0, +\infty)$ .

**引理 2.** 若  $p(s)$  是一个首项系数大于零的  $n$  阶  $D_\phi$  稳定的多项式, 则  $\arg(p(re^{i\phi}))$  是  $r \in [0, +\infty)$  的严格上升函数且  $\arg(p(re^{i\phi})) \rightarrow n\phi$  当  $r \rightarrow +\infty$  时.

证明从略.

**定理 2 (强哈氏定理).**  $\mathcal{D} \subset H_\phi$  当且仅当  $K^i(s) \in H_\phi, i=1, 2, \dots, 2q$ .

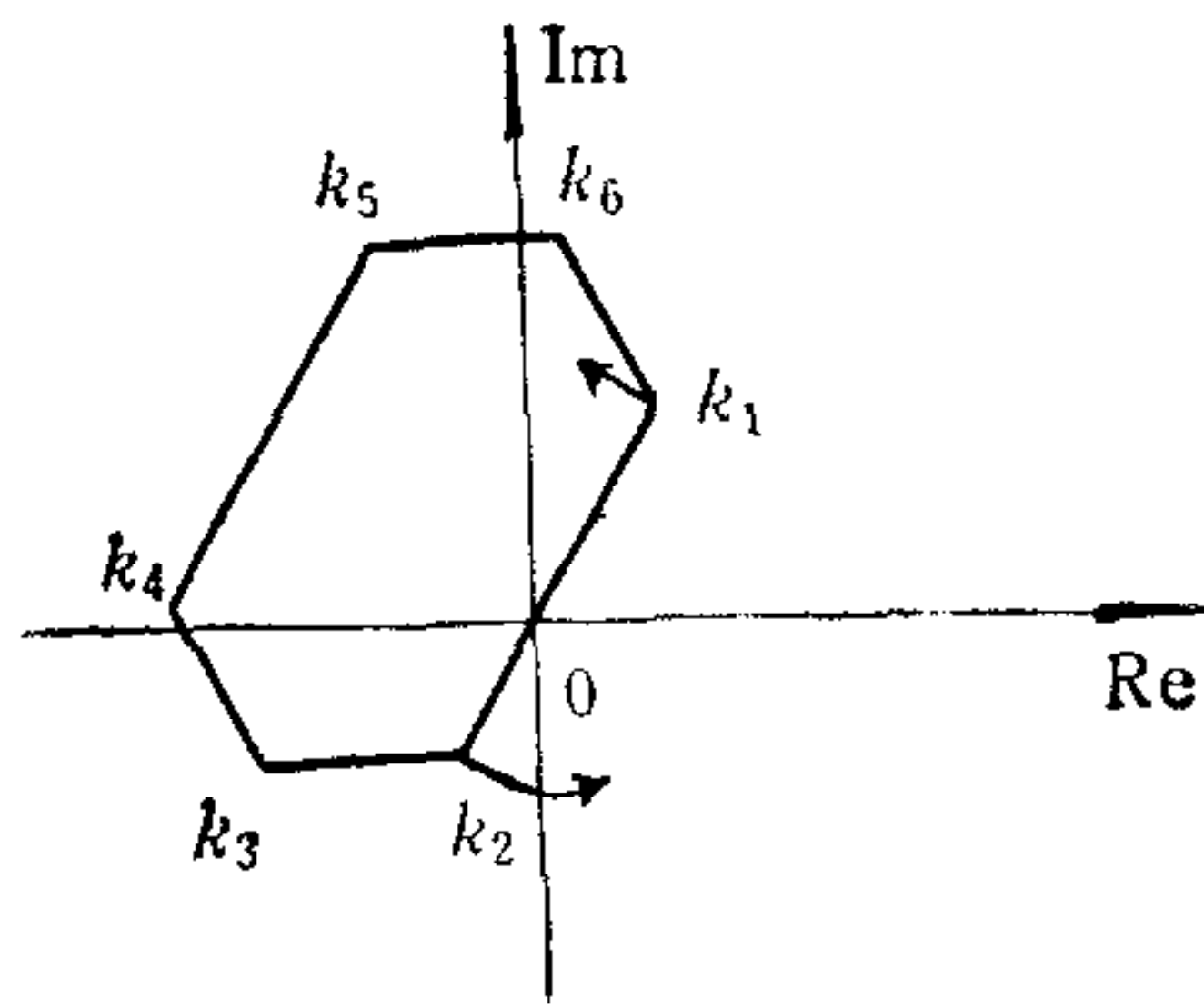


图 3

证明. 必要性显然, 用反证法证充分性. 由引理 1, 可设  $0 \in V(\tilde{r})$ , 其中  $\tilde{r} > 0$ . 因为  $V(0) = [P_0^-, P_0^+]$  不含零, 在原点进入  $V(\tilde{r})$  之前必先到达某  $V(\hat{r})$  的棱边, 这里  $\hat{r} \in (0, \tilde{r})$ ; 具体说原点只能在  $V(\hat{r})$  某棱边的中间部分, 因为  $K^i(s), i=1, 2, \dots, 2q$  都是  $D_\phi$  稳定的, 其广义奈氏曲线决不会过原点. 不妨设原点处在棱边  $K^1K^2$  之内部 (见图 3, 以  $\phi = \frac{2}{3}\pi$  为例). 引理 2 中  $K^1K^2$  的两端点逆时针转动; 与定理 2 中  $K^1K^2$  边随  $r$  的增大又要保持方向不变相矛盾, 因此充分性得证. 证毕.

哈氏定理显然是强哈氏定理的特例 ( $\phi = \frac{1}{2}\pi$ ).

## 四、不变惯性定理

从  $\mathcal{D}$  的哈氏多项式来定义  $\mathcal{D}$  的棱边集

$$[K^i(s), K^{i+1}(s)] := \{\lambda K^i(s) + (1-\lambda)K^{i+1}(s) \mid \lambda \in [0, 1]\},$$

$$i = 1, 2, \dots, 2q.$$

其中规定  $K^{2q+1}(s) = K^1(s)$ .

**定理 3** (不变惯性定理).  $\mathcal{D}$  有不变惯性指数  $(\mu, \nu, 0)$  当且仅当  $\mathcal{D}$  的棱边集有着同样不变的惯性指数.

证明. 必要性显然, 用反证法证充分性. 若存在  $\tilde{p}(s) \in \mathcal{D}$ , 使  $(\mu(\tilde{q}), \nu(\tilde{q}), \pi(\tilde{q})) \neq (\mu, \nu, 0)$ . 根据广义奈氏曲线连续地依赖于  $\mathcal{D}$  中成员这一点, 可以断言, 随  $r$  由 0 变大原点必然进出值集  $V(r)$ . 这一进出必先出现在  $V(r)$  的边界上(见定理 1), 也即  $\mathcal{D}$  的某棱边有着不同于  $(\mu, \nu, 0)$  的惯性指数. 这与前提相矛盾, 因而充分性得证.

## 附 录

$\phi = \frac{2}{3}\pi$  时,  $\mathcal{D}$  的强哈氏多项式如下:

$$\begin{aligned} K^1(s) &:= p_0^+ + p_1^-s + p_2^-s^2 + p_3^+s^3 + p_4^-s^4 + p_5^-s^5 + p_6^+s^6 + p_7^-s^7 + p_8^-s^8 + \dots, \\ K^2(s) &:= p_0^+ + p_1^-s + p_2^+s^2 + p_3^+s^3 + p_4^-s^4 + p_5^+s^5 + p_6^+s^6 + p_7^-s^7 + p_8^+s^8 + \dots, \\ K^3(s) &:= p_0^- + p_1^-s + p_2^+s^2 + p_3^-s^3 + p_4^-s^4 + p_5^+s^5 + p_6^-s^6 + p_7^-s^7 + p_8^+s^8 + \dots, \\ K^4(s) &:= p_0^- + p_1^+s + p_2^+s^2 + p_3^-s^3 + p_4^+s^4 + p_5^+s^5 + p_6^-s^6 + p_7^+s^7 + p_8^+s^8 + \dots, \\ K^5(s) &:= p_0^- + p_1^+s + p_2^-s^2 + p_3^-s^3 + p_4^+s^4 + p_5^-s^5 + p_6^-s^6 + p_7^+s^7 + p_8^-s^8 + \dots, \\ K^6(s) &:= p_0^+ + p_1^+s + p_2^-s^2 + p_3^+s^3 + p_4^+s^4 + p_5^-s^5 + p_6^+s^6 + p_7^+s^7 + p_8^-s^8 + \dots. \end{aligned}$$

$\phi = \frac{3}{4}\pi$  时,  $\mathcal{D}$  的强哈氏多项式如下:

$$\begin{aligned} K^1(s) &:= p_0^+ + p_1^-s + p_2^+s^2 + p_3^+s^3 + p_4^+s^4 + p_5^+s^5 + p_6^-s^6 + p_7^-s^7 + p_8^+s^8 + \dots, \\ K^2(s) &:= p_0^+ + p_1^-s + p_2^+s^2 + p_3^-s^3 + p_4^-s^4 + p_5^+s^5 + p_6^-s^6 + p_7^+s^7 + p_8^+s^8 + \dots, \\ K^3(s) &:= p_0^- + p_1^-s + p_2^+s^2 + p_3^-s^3 + p_4^+s^4 + p_5^+s^5 + p_6^-s^6 + p_7^+s^7 + p_8^-s^8 + \dots, \\ K^4(s) &:= p_0^- + p_1^+s + p_2^+s^2 + p_3^-s^3 + p_4^+s^4 + p_5^-s^5 + p_6^-s^6 + p_7^+s^7 + p_8^-s^8 + \dots, \\ K^5(s) &:= p_0^- + p_1^+s + p_2^-s^2 + p_3^-s^3 + p_4^+s^4 + p_5^-s^5 + p_6^+s^6 + p_7^+s^7 + p_8^-s^8 + \dots, \\ K^6(s) &:= p_0^- + p_1^+s + p_2^-s^2 + p_3^+s^3 + p_4^+s^4 + p_5^-s^5 + p_6^+s^6 + p_7^-s^7 + p_8^-s^8 + \dots, \\ K^7(s) &:= p_0^+ + p_1^+s + p_2^-s^2 + p_3^+s^3 + p_4^-s^4 + p_5^-s^5 + p_6^+s^6 + p_7^-s^7 + p_8^+s^8 + \dots, \\ K^8(s) &:= p_0^+ + p_1^-s + p_2^-s^2 + p_3^+s^3 + p_4^-s^4 + p_5^+s^5 + p_6^+s^6 + p_7^-s^7 + p_8^+s^8 + \dots. \end{aligned}$$

## 参 考 文 献

- [1] 黄琳、王龙、于年才, 系统鲁棒性的若干问题——背景、现状与挑战, 控制理论与应用, 8(1991), 11—29.
- [2] Soh, Y. C., and Foo, Y. K., Generalization of strong Kharitonov theorem to the left sector, IEEE Trans. Automat. Contr, 35 (1990), 1378—1382.
- [3] Barmish, B. R., New tools for robustness analysis, Proc. 27th Conf. on Decision and Control, Austin, TX, 1(1988), 1—6.

# STABILITY ROBUSTNESS AND INVARIANT INERTIA THEOREM OF INTERVAL POLYNOMIALS WITH RESPECT TO LEFT SECTORS

ZHAO KEYOU

*(Department of Electrical Engineering, Qingdao University, Qingdao 266071)*

## ABSTRACT

In this paper, we consider the stability robustness of interval polynomials with respect to the left sectors. Using the method of zero exclusion from the value set derives the strong Kharitonov's theorem and invariant inertia theorem. A simple algorithm for the construction of the strong Kharitonov's polynomials and the edges is presented.

**Key words:** Polynomials; stability; robustness.