第 19 卷 第 5 期 1993 年 9 月
自 动 化 学 报 ACTA AUTOMATICA SINICA
Vol. 19, No. 5 Sep., 1993

短文

非线性系统的分散镇定[1)]

韩正之 高 峰 张钟俊
（上海交通大学 自动控制系，200030）

摘 要

本文研究非线性系统的分散镇定问题．利用局部的松弛反馈对一类具有互联结构的非线性大系统给出了 Lyapunov 型的分散镇定条件,并用这些 Lyapunov 函数给出了分散镇定设计．

关键词: 非线性系统,分散控制,松弛反馈,镇定．

一、引 言

长期以来,镇定问题一直是控制系统设计的中心问题． 70 年代，大系统理论成为控制理论的前沿课题，大系统的稳定性和镇定也随之成为研究的热点．对于线性系统的分散镇定问题已由文[1]解决．当时对非线性分散系统的研究仍停留在稳定性分析上,文[2]是这方面的一部经典著作，它建立了子系统和大系统稳定性之间的联系．但正如该书指出的：这种稳定性的结论没有讨论具有不稳定子系统的镇定，从而使得这种实际上有重要价值的镇定研究有待于开发．

80 年代以来，非线性系统的镇定问题得到了日益广泛的研究，从而得出许多新方法[3-6],其中的松弛反馈是一种有效的新设计．利用松弛反馈镇定的 Lyapunov 型条件已经提出[6]．本文的目的是建立非线性分散系统的松弛反馈镇定的 Lyapunov 型条件，并利用子系统的 Lyapunov 函数进行分散镇定设计．

二、记号和引理

讨论具有 ν 个子系统的非线性互联系统:

对每个 $i \in \underline{\nu}$

$$\dot{x}_i = f_i(x_i) + \bar{f}_i(x_1, \cdots, x_\nu) + \sum_{j=1}^{m_i} g_{ij}(x_i)u_{ij}$$
$$= f_i(x_i) + \bar{f}_i(x) + g_i(x_i)u_i, \tag{1}$$

本文于 1991 年 10月收到．
1）国家自然科学基金赞助课题．

其中 $\underline{v}=\{1,2,\cdots,\nu\}$，$x^T=[x_1^T,\cdots,x_\nu^T]$，$u_i^T=[u_{i1},\cdots,u_{im_i}]$，$g_i(x_i)=[g_{i1}(x_i),\cdots,g_{im_i}(x_i)]$，$u_i$ 和 x_i 分别是 m_i 维和 n_i 维的第 i 子系统的输入和状态. 假设 f_i，g_{ij} 和 $\bar{f}_i$ 都是光滑映射，且 $f_i(0)=0$ 和 $\bar{f}_i(0,\cdots,0)=0$，从而当 $u_i=0(i\in\underline{v})$ 时，$\mathbf{R}^n$ 的原点是(1)式的平衡点.

$$u_i=\phi_i(x_i),\ \phi_i(0)=0, \tag{2}$$

称为(1)式的局部状态反馈.如果除 $\mathbf{R}^n$ 的原点，$\phi_i(x_i)$ 是光滑的，则称 $u_i=\phi_i(x_i)$ 是一个局部松弛反馈. 这里对 $\phi_i(x_i)$ 在原点的连续性未加任何要求.

引理[2]. 考虑系统

$$\dot{x}_i=f_i(x_i)+\bar{f}_i(x),\ i\in\underline{v}, \tag{3}$$

设 U_i 是 $\mathbf{R}^{n_i}$ 中包含原点的一个邻域. 如果对一切 $i\in\underline{v}$ 都有连续可微函数 $V_i\colon U_i\to\mathbf{R}^+$ 和K类函数 ϕ_{ij}[1]，$j=1,2,3$，使得

1) $\phi_{i1}(\|x_i\|)\leqslant V_i(x_i)\leqslant\phi_{i2}(\|x_i\|)$；

2) $\nabla V_i(x_i)\cdot f_i(x_i)\leqslant\sigma_i\phi_{i3}(\|x_i\|)$，其中 $\sigma_i\in\mathbf{R}$；

3) $\nabla V_i(x_i)\cdot\bar{f}_i(x)\leqslant[\phi_{i3}(\|x_i\|)]^{1/2}\cdot\left(\sum\limits_{j=1}^{\nu}a_{ij}[\phi_{j3}(\|x_j\|)]^{1/2}\right)$，$a_{ij}\in\mathbf{R}$，$j\in\underline{v}$；

4) 存在 $\alpha^T=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_\nu]$，满足 $\alpha_i>0$，$i\in\underline{v}$，使得矩阵 $S=(s_{ij})$ 是负定的,其中

$$s_{ij}=\alpha_i(\sigma_i+a_{ii}),\ i=j;\quad s_{ij}=\frac{1}{2}(\alpha_i a_{ij}+\alpha_j a_{ji}),\ i\neq j;$$

那末互联系统(3)的零解是局部渐近稳定的.

三、分散镇定的 Lyapunov 型条件

定义 1. 设 U_i 是 $\mathbf{R}^{n_i}$ 中原点的一个邻域，如果存在 $\phi_{ij}\in K$，$j=1,2,3$，和在 U_i 上连续的函数 $V_i\colon U_i\to\mathbf{R}^+$，$V_i$ 在 $U_i-\{0\}$ 上是光滑的,使得

1) 对一切 $x_i\in U_i-\{0\}$，都成立

$$\phi_{i1}(\|x_i\|)\leqslant V_i(x_i)\leqslant\phi_{i2}(\|x_i\|);$$

2) $\nabla V_i(x_i)\cdot f_i(x_i)<\sigma_i\phi_{i3}(\|x_i\|)$ 对一切 $x_i\in U_i-\{0\}$，同时使得 $\nabla V_i(x_i)\cdot g_i(x_i)=0$ 的 x_i 成立,这里 $\sigma_i\in\mathbf{R}$；那末称第 i 个子系统满足局部分散 Lyapunov 条件(记为 LDLC).

定理 1. 如果互联系统(1)满足下列条件:

1) 对每个 $i\in\underline{v}$，第 i 个子系统满足 LDLC；

2) 对每个 $i\in\underline{v}$，存在 ν 个实数 a_{ij}，使得当 $x_i\in U_j(j\in\underline{v})$ 时,成立

$$\nabla V_i(x_i)\cdot\bar{f}(x)\leqslant[\phi_{i3}(\|x_i\|)]^{1/2}\cdot\left(\sum_{j=1}^{\nu}a_{ij}[\phi_{j3}(\|x_j\|)]^{1/2}\right);$$

3) 存在 $\alpha^T=[\alpha_1,\cdots,\alpha_\nu]$，满足 $\alpha_i>0,i\in\underline{v}$，使得矩阵 $S=(s_{ij})$ 是负定的，其

1) K类函数的意义参见文[2]

中

$$s_{ij}=\alpha_i(\sigma_i+a_{ij}),\ i=j,\ s_{ij}=\frac{1}{2}(\alpha_i a_{ij}+\alpha_j a_{ji}),\ i\neq j;$$

那末存在局部松弛反馈(2),使得闭环系统是稳定的.

证明. 为了方便,仅就 $\nu=2$ 的情形给予证明,一般情形类似可证.

考虑具有两个子系统的互联系统

$$\dot{x}_1=f_1(x_1)+\bar{f}_1(x_1,x_2)+\sum_{j=1}^{m_1}g_{1j}(x_1)u_{1j},\tag{4.1}$$

$$\dot{x}_2=f_2(x_2)+\bar{f}_2(x_1,x_2)+\sum_{j=1}^{m_2}g_{2j}(x_2)u_{2j},\tag{4.2}$$

取
$$u_i=[w_i\nabla V_i g_{i1},\cdots,w_i\nabla V_i g_{im_i}]^T,\ i=1,2,\tag{5}$$
这里 w_i 是未定的一维输入.

记
$$\bar{g}_i(x_i)=\sum_{j=1}^{m}g_{ij}(x_i)\nabla V_i(x_i)g_{ij}(x_i),\ i=1,2,$$

那末(4)式变为

$$\dot{x}_1=f_1(x_1)+\bar{f}_1(x_1,x_2)+\bar{g}_1(x_1)w_1,\tag{6.1}$$

$$\dot{x}_2=f_2(x_2)+\bar{f}_2(x_1,x_2)+\bar{g}_2(x_2)w_2,\tag{6.2}$$

定义下列两个集合:

$$S_{11}=\{x_1;x_1\in U_1-\{0\},\ \nabla V_1(x_1)\bar{g}_1(x_1)=0\},$$

$$S_{12}=\{x_1;x_1\in U_1-\{0\},\nabla V_1(x_1)f(x_1)\geqslant\sigma_1\phi_{13}(\|x\|)\},$$

S_{11},S_{12} 是 $U_1-\{0\}$ 中两个相对闭集,且由 LDLC 的第二个条件知 $S_{11}\cap S_{12}=\phi$, 于是存在光滑函数 $\varphi_1:U_1-\{0\}\to[0,1]$, 使得 $\varphi_1(S_{11})=0,\varphi_1(S_{12})=1$, 定义 $w_1=\xi_1(x_1)$为

$$w_1=\xi_1(x_1)=\begin{cases}-\varphi_1(x_1)\dfrac{\nabla V_1(x_1)f_1(x_1)-\sigma_1\phi_{13}(\|x_1\|)}{\nabla V_1(x_1)\bar{g}_1(x_1)}, & x_1\in U_1-\{0\},\ x_1\bar{\in}S_{11},\\ 0, & x_1\in S_{11}\text{ 或 }x_1=0\end{cases}$$

显然 w_1 在 $U_1-\{0\}$ 上是光滑的.

将 w_1 代入(6.1)式,不难证明 $\dfrac{dV_1}{dt}\leqslant\sigma_1\phi_{13}(\|x_1\|)$.

对(6.2)式重复上述过程,可得 $\dfrac{dV_2}{dt}\leqslant\sigma_2\phi_{23}(\|x_2\|)$, 引理 1 的条件全部满足,从而它是局部渐近稳定的.

推论 1. 如果存在函数 $b_i\in KR$[1], $i\in\underline{\nu}$, 使得对一切 $x_i\in U_i$ 成立

$$\|\nabla V_i(x_i)-\sigma_i\phi_{i3}(\|x_i\|)\|\leqslant b_i(\|x_i\|)\|\nabla V_i(x_i)\cdot g_i(x_i)\|,$$

那末定理 1 给出的反馈在 U_i 上是有界的,且在原点连续.

推论 1 的证明较容易,在此略去.

---

1) KR 类函数的意义参见文[2].

四、结　束　语

本文利用了局部的松弛反馈将大系统的稳定判据用于分散镇定设计，所得的结论几乎是毫无困难地可推广到下列时变的互联系统:

$$\dot{x}_i = f_i(x_i, t) + \bar{f}_i(x, t) + g_i(x_i, t)u_i, \quad i \in \underline{\nu},$$

而且稍加改造即可讨论全局分散镇定问题. 另一方面，如果将松弛反馈中不可镇定的结论与大系统不稳定的结论联系起来，可以进一步揭示非线性分散系统的一些内在性质.

参　考　文　献

[1] Wang, S. H. & Davison, E. J., On the Stability of Decentralized Control Systems, *IEEE Trans. on Auto. Contr.*, **AC-18** (1973), (5), 473—478.
[2] Michel, A. N. & Miller, R. K., Qualitative Analysis of Large Scale Dynamical Systems, Academic Press, New York, 1977.
[3] Verma, M. S., Coprime Fractional Representation and Stability of Nonlinear Feedback Systems, *Int. J. Contr.* **48**(1988), (3), 897—918.
[4] Aeyels, D., Stabilization of A Class of Nonlinear Systems by a Smooth Feedback Control, *Syst. & Contr. lett.* **5**(1985), 289—294.
[5] Artstein, Z., Stabilization with Relexed Controls, *Nonlinear Anal.* **7**(1983), 1163—1173.
[6] Tsinias, J., Sufficient Lyapunov-like condition for Stabilization, *MCSS*, **2** (1989), 343—357.

DECENTRALIZED FEEDBACK STABILIZATION OF NONLINEAR SYSTEMS

Han Zhengzhi　Gao Feng　Zhang Zhongjun
(Department of Automatic Control, Shanghai Jiaotong University, 200030)

Abstract

This paper deals with the problem of decentralized feedback stabilization of nonlinear systems. Using the locally relaxed feedbacks, it gives the Lyapunov-like conditions of decentralized stabilization for a class of interconnected nonlinear systems, and presents a feedback law to stabilize these systems by using these Lyapunov functions.

Key words: Nonlinear systems; decentralized control; relaxed feedback; stabilization.