第19卷 第5期 自 动 化 学 报 Vol. 19, No. 5
1993 年 9 月 ACTA AUTOMATICA SINICA Sep., 1993

李亚普诺夫方法的发展与历史性成就[1)]

纪念李亚普诺夫的博士论文“运动稳定性的一般问题”发表一百周年

黄 琳 于年才 王 龙
(北京大学力学系，100871)

摘 要

本文论述了李亚普诺夫方法的发展，全文共分七部分：1 李亚普诺夫方法产生的历史背景；2 在李亚普诺夫原数学模式中的发展；3 在反馈系统中的发展与应用；4 李亚普诺夫方法与时变、不确定系统；5 在理论上的进一步发展；6 比较原理与李亚普诺夫方法；7 结束语.

关键词：动态系统，稳定性，李亚普诺夫方法.

一、引 言

一百年前，伟大的俄国数学力学家亚历山大·米哈依诺维奇·李亚普诺夫（А. М. Ляпунов, 1857——1918）发表了其博士论文《运动稳定性的一般问题》（Обшая задача об устойчивости движения, Харвков, 1892）[1]，给出了运动稳定性的科学概念、研究的方法和科学理论体系，从而推动了数理科学与技术科学特别是在数学，力学和控制理论中与稳定性有关领域的巨大发展.

在这一历史性著作中，李亚普诺夫提出了两类解决运动稳定性问题的方法，第一方法是通过求微分方程的解来分析运动稳定性，第二方法则是一种定性方法，它无需求解微分方程，而是通过一类具某些性质的函数 V（李亚普诺夫函数），研究它及其对于系统的全导数（可由系统方程和 V 的偏导数直接表出）的有关性质，从而得出稳定性的结论. 第二方法又称直接方法，它具有科学的概念体系，判定方法和自成一套的理论，现今学术界广为应用且影响巨大的李亚普诺夫方法就是指李亚普诺夫直接方法.

李亚普诺夫方法在当时出现有其深刻的历史背景，这可以归结为

1）麦克斯韦（J. C. Maxwell）在 1868 年《论调节器》中分析了蒸汽机自动调速器和钟表机构的运动稳定性问题，这表明大工业生产已经提出了稳定性研究的任务，当时力学，天文方面已有相当一批科学家讨论包括轨道稳定性在内的运动稳定性问题，例如罗斯（E. J. Routh）[2] 和庞加莱（H. Poincaré）[3] 等.

1）高等学校博士学科点专项科研基金资助. 本文系控制理论及其应用 1992 年年会大会报告.

2）分析数学的严格理论体系已基本建立，对于极限过程，连续依赖性等有了准确的描述和研究方法；微分方程解对初值与参数的连续依赖性的研究为李亚普诺夫建立稳定、渐近稳定的科学概念提供了基础；分析力学的进展，特别是力学系统中能量极限与平衡位置稳定之间关系的研究，启发了运用系统状态的一类函数（例如总能量）及其随系统变化的性质来研究稳定性的思想，而这正是李亚普诺夫方法的物理背景.

在上述背景下，加上李亚普诺夫本人的天才条件与精心研究，就产生了影响科学发展一百周年的李亚普诺夫方法，这一方法在俄国诞生以后，1907 年即译成法文，而传至美国则是由 Princeton 大学在 1947 年完成的. 在 50 年代以前，李亚普诺夫方法的影响范围还基本上局限在前苏联，二次大战以后传播到西方并引起了世界范围的研究兴趣，本文就确定性系统中李亚普诺夫方法的发展作一简述.

二、在原数学模式下的发展与应用

李亚普诺夫本人研究的系统模式是由一组常微分方程描述的动态系统，至本世纪 50 年代，稳定性理论的主要进展还是在这一理论框架内得到，同时又将稳定性理论的主要结果应用于各种物理首先是力学系统，这期间在理论上主要的进展表现为：

最初李亚普诺夫关于稳定与渐近稳定的概念在状态空间上是一纯局部性概念，在时间上没有指出对初始时刻是否具一致性，皮尔希德斯基（Персидский, К.П.）在 1933 给出了一致稳定的定义与对应的判定[4]，巴巴辛与克拉索夫斯基（Барбашин, Е. А.; Красовский, Н. Н.）在 1952 给出全局一致渐近稳定的概念与判定等[5]. 有趣的是李亚普诺夫本人在其著作中判断渐近稳定的充分条件实际上是判断一致渐近稳定的，他当时并不清楚其中的奥妙，后来有人希望仅用李亚普诺夫函数 $V(t, x)$ 正定，其沿系统解的全导数 $\dot{V}(t, x)$ 负定证明渐近稳定，马茜尔（J. L. Massera）在 1949 年给出一个反例[6]，表明这样做并不简单地成立，这使人们加深了对李亚普诺夫函数需具无穷小上界条件才能判断变系数系统的问题的认识. 另一有趣的事实是，1957 年维拉格拉得（Р.З. Виноград）给出了一个二阶系统的例子，表明虽然方程在原点附近的一切扰动解均以原点为极限，但原点这一平衡位置却不是李亚普诺夫意义下稳定的[7]. 这些例子表明在稳定性理论中直观想象与科学的分析结论常常存在着距离，特别是在非线性时变系统.

对于用李亚普诺夫函数来判断系统的稳定性，这是一个充分性的方法. 有意义的问题是如果已知系统具有某种稳定性，用来可判断这类稳定性的李亚普诺夫函数是否一定存在？这是一个反问题，对于常系数线性系统而言，这一问题的回答是全面肯定的，对于非线性变系数系统，回答并不完全肯定. 但如果零解一致渐近稳定，则满足判断一致渐近稳定要求的李亚普诺夫函数一定存在，这一有力的解答是马茜尔在 1956 年给出的[8].

在李亚普诺夫原著中，关于稳定性的定义并不只是针对某些状态的函数取特定值的，这种稳定性具有现代控制理论中输出稳定性的特征，李亚普诺夫当时在给出定义后就转而只研究零解的稳定了，只是后来以鲁缅采夫（В. В. Румянцев）为代表的一批人才研究了这种输出稳定性的特殊情形——部分变元的稳定性并将其应用于空腔充液物体的稳定性问题[9,10]. 在此之前稳定性的有关理论已经在力学系统中有了应用，例如指出对绕固

定点转动的刚体，只有在绕其惯性椭球的最长轴或最短轴转动时才具有稳定性而绕其惯性椭球的中间轴转动则不稳定，这一理论结论对于陀螺以及旋转机械均有一定意义，类似的应用对于飞机巡航飞行的安定性，离心调速系统的设计等均有不少讨论[11-13]。

三、在反馈系统稳定性中的发展与应用

反馈系统稳定性的研究开始于频率方法而与李亚普诺夫方法关系不大，但后来的发展表明仅仅靠频率方法是不够的，将李亚普诺夫方法引入反馈系统的研究不仅促进了反馈系统的研究而且反过来又丰富了李亚普诺夫方法。

控制系统绝对稳定性问题是将李亚普诺夫方法应用于控制系统最早的一个问题，早在 1944 年鲁里叶与波斯特尼可夫[14] (Лурье, А. И., Постников, В. Н.) 就研究了如图 1，2 所示系统的稳定性。

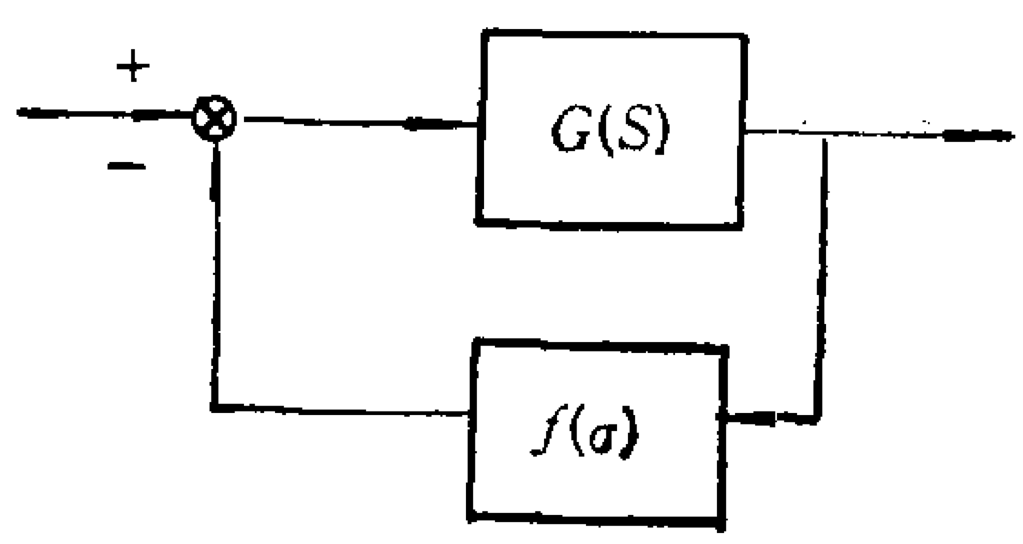

图　1

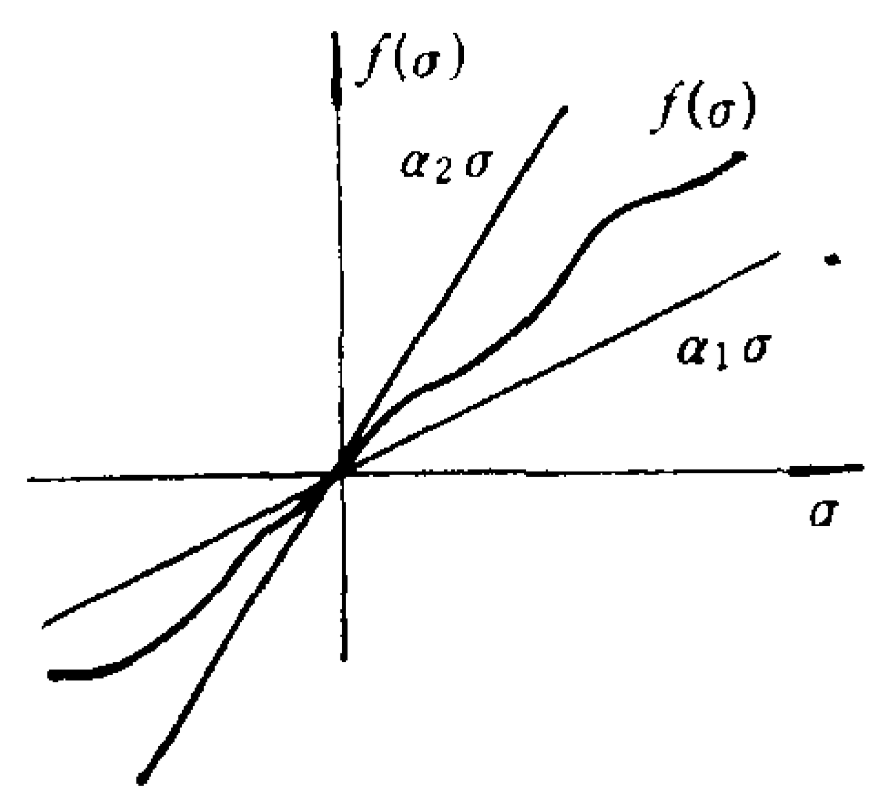

图　2

绝对稳定性是研究对给定的 $\alpha_2>\alpha_1\geqslant 0$，$G(s)$ 满足何种条件时，上述闭环非线性系统对一切满足 $\alpha_1\sigma^2\leqslant\sigma f(\sigma)\leqslant\alpha_2\sigma^2$ 的非线性特性说来，其零解都是全局渐近稳定的。绝对稳定性的研究在开始的近 20 年里，占统治地位的方法是李亚普诺夫方法，采用的是二次型或二次型加非线性函数的积分这类李亚普诺夫函数，从而将系统绝对稳定的要求转化为一组代数条件是否存在实解。促使人们观念发生变化的是罗马尼亚人波波夫 (V. M. Popov) 在 60 年代的工作。他运用频域语言给出了绝对稳定性的充分条件，其形式与控制界熟知的奈奎斯特 (Nyquist) 判据类似[15]，它不仅是启示人们用频率语言研究绝对稳定性并建立判据，而更重要的是首次揭示了在状态空间形式的李亚普诺夫方法与系统频域形式的条件之间存在着内在的联系，这种联系在后来控制理论的研究中作用独到。

在研究绝对稳定性的基础上，波波夫针对系统输入输出的某个积分受限这一物理前提，给出系统超稳定与超渐近稳定的概念与基本理论结果[16]。这些结果已作为系统设计的原则被广为应用，例如在模型参考自适应问题中的超稳定原则，超稳定性一开始是在状态空间模式中应用李亚普诺夫方法研究的，在常系数线性系统的条件下，安德森 (B. D. O. Anderson) 证明了超稳定、超渐近稳定与网络理论中的正实与严格正实传递函数之间分别等价[17]。这种频域与状态空间的等价关系深刻地体现在实现这种传递函数的最小实现与李亚普诺夫矩阵方程

$$PA + A^T P = -Q$$

之间的一些关系上，这些关系被称为正实引理与严格正实引理，建立这些引理的基本工具是李亚普诺夫方程，而这些结果又在研究绝对稳定问题上显出威力[18].

二次型最优控制问题最早起源于对系统误差的一种平方积分评价，利用这种评价极小化来选择系统的待定参数，后来列托夫（Летов, A. M.）等一些从事绝对稳定性研究的人将其发展为一类最优控制器的分析设计问题[19]. 其设计的基本手段依然是李亚普诺夫方法，在西方卡尔曼与贝特拉姆（Kalman, R. E., Bertram, J. E.）也将李亚普诺夫方法用于研究控制系统的设计[20]. 我国黄琳，郑应平与张迪在解决系统极点配置，反馈镇定的同时，将李亚普诺夫方法与动态规划结合起来解决了二次型最优控制的存在唯一性，最优反馈的线性律及最优指标满足的代数黎卡提方程的求解问题，其解法也是一种求解李亚普诺夫方程基础上的迭代法[21]. 由于二次型最优反馈是状态的线性函数，人们指望将此作为设计控制系统的一个原则，但是否闭环稳定的系统都是某种指标下的二次型最优，卡尔曼回答了这一问题，指出当系统传递函数满足一频域不等式时，则一定存在合适的二次型指标使对应系统是最优的，有趣的是这一频域不等式竟与系统的严格正实有着深刻的联系[22].

这种以状态空间模式为基础的李亚普诺夫方程、黎卡提方程和系统频域模式下一些不等式之间的联系，最近在称为后现代控制理论理论中得到了惊人的体现，一开始 H^∞ 理论是以纯频域的方式给出的一类优化问题，只有在将 H^∞ 问题的求解归结为求解黎卡提方程与李亚普诺夫方程时，才使这一问题得到较完满的回答，这一结果不仅说明李亚普诺夫方法的重要作用，且这种作用也许可以帮助人们去研究非常系数的线性系统的问题[23].

四、李亚普诺夫方法与时变不确定系统

常系数线性系统稳定性的判定可以通过代数多项式的根的位置得到，这一方法对于时变系统并不适用，因而李亚普诺夫方法在时变系统的稳定性研究上有着基本的意义，与常系数线性系统相仿，对于时变线性系统

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u,$$
$$y = C(t)x$$

说来，当系统是有界实现（$A(t), B(t), C(t)$ 均有界连续）时，该系统一致完全可控一致完全可观可保证输入输出稳定当且仅当自由系统 $\dot{x} = A(t)x$ 一致渐近稳定，而自由系统一致渐近稳定又与按指数渐近稳定等价，这些显示出与常系数线性系统类似，这种类似还表现在对时变线性系统的一致完全可镇定的研究上，时变系统的基本解矩阵和时变李亚普诺夫方程是两个有力的理论分析工具，并且李亚普诺夫函数也常依赖系统的基本解矩阵才能给出[13]. 为了避免寻求基本解矩阵而将李亚普诺夫方法引向实用，采用适当正定的近似的二次型李亚普诺夫函数，然后通过对系统全导数的讨论，给出一些渐近稳定的充分条件，这是一个从 50 年代就开始的做法. 这种做法对拟常系数线性系统和具慢变系数的线性系统有一定效力，也得到一些充分条件，但由于思路本为一源，形式上有差别而无法

比较孰优孰劣，突破性进展依然很少。与这种思想相近的一种做法是关于有限时间稳定性和技术稳定性的做法，它们都是利用李亚普诺夫函数满足的微分不等式进行积分，然后给出扰动解的估计，再依据这些估计针对一些实用的提法给出有关稳定性的结论[24-26]。还有一种常用的做法就是利用常系数正定二次型作为系统的李亚普诺夫函数，此时该函数对系统的全导数已是变系数二次型，一般它不是负定的，此时求由这两个二次型确定的最小广义特征值，然后利用这一最小广义特征值沿时间段的积分来判断原系统的一致渐近稳定，这种判定具有充分必要性质，而且用这种方法来确定系统参数的稳定性范围比传统的李亚普诺夫方法要宽[27]。

对于含时变不确定性的系统，要通过多项式族理论研究鲁棒性存在着困难，至今主要还是通过李亚普诺夫方法，即使对于实矩阵的稳定摄动界的充分性估计，不少工具如 $A\otimes A$，$A\oplus A$，$A\bar{\otimes}A$，$A\bar{\bar{\otimes}}A$ 的出现也与李亚普诺夫方法有着深刻的联系[28]；还有一些摄动界的估计则直接依赖于与对应李亚普诺夫函数选取的优劣，对于用状态空间模式描述的含时变不确定性的系统，如果系统具有“匹配条件”，则利用李亚普诺夫方法已可得到不少有价值的结果，特别是关于二次可镇定问题[29,30]，而对于目前富于挑战性的观测器鲁棒镇定问题，由于不确定性是时变的，依靠配置闭环极点的方法失效，虽然问题的确切解答还未得到，但看来有前途的方法可能还是李亚普诺夫方法和与之密切相关的解黎卡提方程的手段。

五、在理论上的进一步发展

60 年代以后在常微分方程组描述的系统范围内李亚普诺夫方法的两个进展在于：在渐近稳定性研究上的一个重要进展是用两个李亚普诺夫函数，使其在相空间中各管一个范围、各守其职，然后互相配合以得到系统渐近稳定的结论，这使得原来用一个李亚普诺夫函数不易判别的系统得到了解答，马特洛索夫关于不定常系统渐近稳定（而非一致渐近稳定）的定理，是该方面的重要推进，这种推进在研究具变摩擦系数的非线性摆和有关陀螺稳定的一些问题中显示出优越性[31]。

在不稳定性的研究上，人们总是把注意力放在寻求一些特殊的初始条件集合，运用反证法，然后利用李亚普诺夫函数与其全导数在由此初始条件集出发的解族上的特性来推断零解的不稳定性，这种思想本质上并不需要在全空间去研究李亚普诺夫函数而得到结论，近 20 年来，一些学者在系统经过零解的某一子流形上，对其边界点按流向进行分类，引入扇区（Sector）与溢出集（Expeller）等几何概念建立了一套方法，这种细致地讨论相空间的做法实际上是一种高阶方程定性论的做法，它不仅应用于一些物理系统，而且证明了如 $x^{(n)}=\varphi(x)$ 在 $n\geqslant 3$ 时一定不稳定的一般性结论，就这种理论的基本思想看，也仍然是李亚普诺夫的思想，但却用得很细[32]。

与在原常微分方程模式内将李亚普诺夫方法向细的方面发展的同时，使李亚普诺夫方法发展的另一更大的领域是模式本身的一般化，这种一般化包括向具时滞后效的系统，偏微分方程描述的系统乃至一般的抽象系统。

由于含弹性结构的机械系统，具管道部件而有时滞的系统，热传导热辐射等作用的系

统在工程系统中的出现,研究具分布参数特点的系统和更为一般的系统的稳定性从 50 年代后期就发展了起来. 茹波夫 (Зубов, В. И.) 在 50 年代的工作是在抽象动态系统上研究其不变集合的稳定性[33]. 同时期的另一项重要工作是克拉索夫斯基所做的关于一般有后效系统的稳定性,这一类系统是比时滞系统更具一般性的系统,在研究方法上由于系统的状态空间已不再是有限维空间,因而李亚普诺夫函数自然地由李亚普诺夫泛函所代替[34]. 在应用李亚普诺夫泛函判断系统稳定性上,一个比较成功的领域是有弹性结构系统的稳定性与镇定[35]. 例如利用弹性体运动时的动能与势能构成李亚普诺夫泛函来分析系统的稳定性与对系统进行镇定,这些能量一般说来是系统状态(有时是模态)及其导数的推广了的二次型,这种类型的李亚普诺夫泛函的构造对于含一般线性算子的分布参数系统也适用,在那里有时也采用二次积分式的泛函来进行研究,正如讨论一般分布参数系统比较困难一样,讨论稳定性问题也应针对具体系统才有可能做出便于应用的结果[36].

在研究一般集合论层次上定义的系统的某种稳定性问题时,类似的李亚普诺夫泛函可以是取值在一个半格结构上的,不过此时实际有效的结果很难得到[37].

六、比较原理与李亚普诺夫方法

50 年前,德国数学家卡姆凯 (Kamke, E.) 在研究常微分方程时,运用一已知特性的微分方程作参照方程和微分不等式的性质,对所研究方程进行比较从而得到结果. 他的这种方法常称为比较方法或比较原理. 在李亚普诺夫理论中,有时为了估计扰动解,人们寻求合适的李亚普诺夫函数 V, 它对系统的全导数 $\dot{v}=W(t,x)$, 若能找到合适的函数,使 $W(t,x)\leqslant -f(V)$, 则就可以用 $\dot{V}+f(V)\leqslant 0$ 这一微分不等式与方程 $\dot{V}+f(V)=0$ 的解来估计扰动,在常系数线性模式下 $f(V)$ 常可取为 V 的线性函数. 在研究不稳定性时又常常用 $\dot{v}+\varphi(V)\geqslant 0$ 这类形式,而研究稳定而非渐近稳定时则可以用 $f=0$. 因此可以认为比较原理实际上是李亚普诺夫方法的一种发展,近 40 年的历史表明这一发展又反过来推动了李亚普诺夫稳定性研究的发展. 60 年代对于线性时变系统,人们常利用贝尔曼 (Bellman, R.) 不等式来研究稳定性,实际上这种方法也是比较原理的应用.

比较原理在稳定性理论研究的重要发展是建立了向量比较原理,即对一个阶次高的系统寻求一个向量李亚普诺夫函数,这一向量李亚普诺夫函数满足一向量微分不等式组,通常这一微分不等式组具有一些特殊的结构与特征,这种特征与结构和矩阵理论中一类特殊矩阵(常称为M矩阵)相联系. 这样利用M矩阵的有关结论结合向量比较原理就能得到大阶次系统有关稳定性的结论,这种讨论所得的结论是包含在子系统之间关联可能失效的情形,因而研究的结论本身就具有了容错的特性,现今大系统稳定性文章很多,其基本思路大都围绕向量比较原理. 当然由于这一问题本身的困难,用比较方法一般也只能得到充分性条件. 这种充分性严重地依赖于向量李亚普诺夫函数的具体构造. 不同方法构造产生不同的充分条件,各有优劣,莫衷一是,这样就产生出众多的大系统稳定性的成果,人们期望能有突破性进展,但似很难.

比较方法研究中一重要事件是马特洛索夫等在 1980 年出版了一本专著《系统数学理

论中的比较方法》.在这一著作中,作者基于抽象动态系统,抽象控制系统和系统的数学理论，从公理体系和逻辑运算层次上阐述了比较方法。并运用这些方法研究了由经典李亚普诺夫稳定性开始的大量动态系统问题，作者在书中一直认为这样的方法是渊源于李亚普诺夫方法的进展的[38]。

比较方法在本质上是不囿于研究稳定性的，目前它已被用于研究系统的某些动态过程与品质,而在模式上也不限于讨论常微分方程组描述的动态系统，而向分布参数系统，随机系统方向扩展。

比较方法是李亚普诺夫方法的发展，研究表明将比较方法与李亚普诺夫方法巧妙结合将是稳定性研究中一个有力工具[38-40]。

七、结　束　语

一百年在人类历史上是短暂的,但这一百年在人类科技发展上却是史无前例的,一个科学家在科学上的建树所能影响的时间与领域也是很有限的。但李亚普诺夫的贡献则整整影响了一百年并还将继续影响下去。正由于他的影响巨大，运用他的理论与方法所研究的问题,写出的书以百计、文可愈万,这里仅就作者所知选其精要作一简述,难免挂一漏百。

李亚普诺夫离开我们已经很久了,在他离世 70 多年后，世界上还有数以千计的人运用他创立的理论与方法,在不同国家和地区,在不同学术领域去研究问题,发展理论,这就足以表明他的方法与理论是历史性的,流传久远的科学贡献。

参　考　文　献

[1] Ляпунов, А. М., Обшая задача об устойчивсти движения, Харъков, 1892.
[2] Routh E. J., Stability of a given state of motion, London, 1877.
[3] 中国大百科全书«力学»,中国大百科全书出版社，1985.
[4] Персидский, К. П., Об устойчивостидвижении по первому приближеню. Матем. сб 40Т. 40в. 3, 1933.
[5] Барбашин, Е. А., Красовский, Н.Н., Об устойчивости движения в целом. ДАН, Т. 86.1952.
[6] Massera, J. L., On Liapunoff s conditions off stability, Ann. of Math. V. 50, 1949.
[7] Виноград Р. Э. Неприменимость Метода Характеристических Показателей кизучению Нелинейных Дифференциал кых Уравнений Матем Об, 41(4) 1957.
[8] Massera, J. L., Contributions to Stability Theory, Ann. of Math. V. 64, 1956.
[9] Воротников, В.И., Устойчивость Динамическиф Систем по Отношению к Части Переменых, Москва (Наука), 1991.
[10] Румянцев, В. В., Об устойчивости вращательных движений твердого тела с жидкимнаполнением, ПММ, т. 23, в. 6, 1960.
[11] 高为炳，运动稳定性基础,高等教育出版社，1988.
[12] 秦元勋、王联、王慕秋,运动稳定性理论与应用,科学出版社，1980.
[13] 黄　琳,稳定性理论,北京大学出版社，1992.
[14] Лурье, А. И., Постников, В. Н., К теорин устойчивости регулируемых систем, ПММ, т. 8, в. 3. 1944,
[15] Попов, В. М., (Popov, V. M.) Об абсолютной устойчивости нелинейных систем автоматического регулирования Аит т. 22 в. 8, 1961.
[16] Popov. V. M., Hyperstability of Automatic Control Systems, Springer Verlag, 1973.
[17] Anderson, B. D. O., A Simplified Viewpoint of Hyperstability, IEEE Trans. AC 13, 1968.

[18] 谢惠民,绝对稳定性理论与应用,科学出版社, 1986.
[19] Летов. А. М., Аналитическое конструирование регуляторов, 1—5 АиТ Т. 21, в. 4—6 1960; т. 22, в. 4, 1961; т. 23, в. 11, 1962.
[20] Kalman. R. E. and Bertram, J. E., Control system analysis and design via the Second metho of Liapunov, Trans. ASME, ser. D., V., 82(2), 1960.
[21] 黄琳、郑应平、张迪,李亚普诺夫第二方法与最优控制器分析设计问题,自动化学报, 2(4)1946.
[22] Kalman. R. E., When is a linear control system optimal. Trans. ASME, ser. D. V. 86, March, 1964.
[23] Doyle, J., Glover, K., Khargoneker, P. and Francis, B., State—space solutions to standard H_2 and H_∞ control problem, *IEEE Trans.* **AC-34**(8), 1989.
[24] Разумихин, Б. С., Оценка решений системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами ПММ. т. 21, в. 1, 1957.
[25] Лебедев, А. А., К задаче об устойчивости двикения на канечном интервале времени ПММ, т. X VIII, в. 1, 1954.
[26] Мартынюк, А. А., Техническая устойчивоста в движения Киев, (Техника), 1973.
[27] Huang, L., Hollot, C. V. and Z. L. Xu, Some problems of Lyapunov method in linear continuous system. System Sciences and Math. Science, 4(3), 1991.
[28] Qiu, L., Davision, E. J., A new method for the stability robustness determination of state space models with real perturbations, Proc. of the 27th Conf. on Decision and Control, Austin Texas, Dec. 1988.
[29] Gutman. S., Leitmann, G., Stabilitzing control for linear systems with bounded parameter and input uncertainty, Proc. 7 th IFIP Conf. on Optimization Tech., Nice France, 1975.
[30] Barmish, B. R., Leitmann, G., On ultimate bound edness control of uncertain systems in the absence of matching assumptions, *IEEE Trans.*, **AC-27** (1), 1982.
[31] Матросов, В. М., Об устойчивости движения ПММ. т. 26, в. 5, 1962.
[32] Routhe, N. Habets, P. and Laloy, M., Stability Theory by Liapunov's Direct Method, Springer verlag, 1977.
[33] Зубов, В. И., Методы Ляпунова и их применение, Изд Ленинград. Универ. 1957.
[34] Красовский, Н. Н., Некоторые задачи теории устойчивости движения. Хизматги 3. Москва, 1959.
[35] Мовчан, А. А., Опрямом методе Ляпунова в задачах устойчивости уирутих систем. ПММ, т. 23, в. 3, 1959.
[36] Матрасов. В. М., Иртегов, В. Д., Устойчивость Движения Изд (Наука) 1985.
[37] Mesarovic, M. D., General Systems theory, Mathematical Foundations, Academic Press, New York, 1975.
[38] Матросов, В. М., Анапольский Л. Ю., Васильев, С. Н., Метод сравнения в математическо теория систем. Изд (Наука) Новосибирск, 1980.
[39] Матросов, В. М., Козлов, Р. И., Линамика нелинейных систем Изд (Наука), Новосибирск 1983.
[40] Матросов, В.М., Анапольский, Л.Ю.,Метод Функций Ляпунова в анализе динамики систем Изд (Наука), Новосибирск 1987.

THE DEVELOPMENT AND HISTORIC ACHIEVEMENT OF LYAPUNOV' S METHOD

HUANG LIN　YU NIANCAI　WANG LONG

(*Department of Mechanics, Peking University, Beijing* 100871)

ABSTRACT

This is a survey paper of the development of Lyapunov's method. It is divided into seven parts: 1. The origin and historical background; 2. The development based on the original Lyapunov's mathematical model; 3. The development and application in feedback systems; 4. Lyapunov's method and time-varying uncertain systems; 5. Further theoretic development; 6. Comparison principle and Lyapunov's method: 7. Conclusions.

Key words: Dynamic Systems; stability; Lyapunov's method.

黄　琳　照片、简介见本刊第 19 卷第 2 期.

于年才　1970 年毕业于北京大学数学力学系，现为北京大学力学系副教授. 主要研究兴趣为鲁棒控制、社会经济系统及相关的应用数学问题.

王　龙　北京大学力学系讲师，博士，首届何潘清漪优秀论文奖获得者，美国《数学评论》评论员. 曾在国内外学术刊物上发表论文数十篇. 主要研究兴趣为鲁棒控制、稳定性理论、复杂系统控制理论等.