短文

# $H^\infty$ 状态反馈控制及其最优解的探讨[1)]

杨富文　　涂健
(福州大学电气工程系,福州350002)　　(华中理工大学自控系,武汉430074)

**摘　　要**

本文研究了状态完全可得时 $H^\infty$ 状态反馈控制问题,给出了基于一个代数 Riccati 方程的 $H^\infty$ 状态反馈控制问题的次优解,并对一种特殊情况提出了求最优解的解析方法.

**关键词**: $H^\infty$ 状态反馈,代数 Riccati 方程,最优解.

## 一、引　　言

目前,$H^\infty$ 状态反馈控制问题的研究已取得一些进展[1,2]. 但所得的结果尚有一定局限性,所考虑的系统是一些特殊情况下的. 对于一般情况下 $H^\infty$ 状态反馈控制问题, 只能给出一种基于不等式代数 Riccati 方程解法[3]. 本文对于一般情况 $H^\infty$ 状态反馈控制问题给出了基于一个等式代数 Riccati 方程解法,且反馈阵的结构仍保持和 LQ 最优设计相同的形式. 在以上研究基础上,本文还探讨 $H^\infty$ 状态反馈控制问题的最优解, 并对一种特殊情况提出求最优解的解析方法.

## 二、$H^\infty$ 状态反馈控制

考虑状态完全可得的线性系统

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_1w(t) + B_2u(t), \tag{1a}$$

$$z(t) = C_1x(t) + D_{11}w(t) + D_{12}u(t), \tag{1b}$$

$$y(t) = x(t), \tag{1c}$$

其中 $w(t)\in R^{m_1}$ 是干扰输入向量; $u(t)\in R^{m_2}$ 是控制输入向量; $z(t)\in R^{P_1}$ 是误差向量; $y(t)\in R^{P_2}$ 是可测向量; $x(t)\in R^n$ 是状态向量.

对于系统(1)采用状态反馈控制 $u(t) = F_\infty x(t)$, 则闭环系统为

$$\dot{x}(t) = A_{F_\infty}x(t) + B_1w(t),\ z(t) = C_{1F_\infty}x(t) + D_{11}w(t),$$

式中 $A_{F_\infty} = A + B_{2F_\infty}$, $C_{1F_\infty} = C_1 + D_{12}F_\infty$.

本文于 1991 年 9 月18日收到.
1) 国家自然科学基金和福建省自然科学基金资助项目.

**定义 1.** $\nu_0 = \inf\{\|C_{1F_\infty}(sI - A_{F_\infty})^{-1}B_1 + D_{11}\|_\infty : F_\infty \in R^{m_2\times n}, R_e\lambda(A_{F_\infty})<0\}$.

**定理 1.** 令 $\nu > \nu_0$，且 $\nu^2 I - D_{11}^T D_{11} > 0$. 假定 $(A, B_2)$ 可稳，则闭环矩阵 $A_{F_\infty}$ 稳定，且

$$\|C_{1F_\infty}(sI - A_{F_\infty})^{-1}B_1 + D_{11}\|_\infty < \nu$$

的充要条件是存在一个非负定阵 $X_\infty \geqslant 0$ 和实矩阵 $F_\infty$ 满足下列代数 Riccati 方程:

$$A_{F_\infty}^T X_\infty + X_\infty A_{F_\infty} + (X_\infty B_1 + C_{1F_\infty}^T D_{11})(\nu^2 I - D_{11}^T D_{11})^{-1}(X_\infty B_1 + C_{1F_\infty}^T D_{11})^T + C_{1F_\infty}^T C_{1F_\infty} = 0, \tag{2}$$

而且状态反馈由 $\boldsymbol{u}(t) = F_\infty \boldsymbol{x}(t)$ 给出，其中 $F_\infty = -B_2^T X_\infty$.

证明. 见脚注 1).

## 三、H$^\infty$ 状态反馈最优解的探讨

上节研究了 H$^\infty$ 状态反馈存在的充要条件以及次优解的求法. 若要求最优值 $\nu_0$ 必须通过迭代才能获得. 但对于某些特殊情况，可以用解析方法求取最优值 $\nu_0$ 及其对应状态反馈.

假设

1) $D_{11} = 0$. 2) $\mathrm{rank}\,[I\otimes D_{12}csC_1] = \mathrm{rank}[I\otimes D_{12}]$. (3a),(3b)

其中$\otimes$为 Kronecker 积，$csC_1$ 为 $C_1$ 矩阵的列展开，rank 为矩阵的秩. 那么当 $D_{11}=0$ 时，式(2)可简写为

$$A_{F_\infty}^T X_\infty + X_\infty A_{F_\infty} + \frac{1}{\nu^2} X_\infty B_1 B_1^T X_\infty + C_{1F_\infty}^T C_{1F_\infty} = 0. \tag{4}$$

实际上，上节中 $F_\infty$ 是任意的. 不失一般性，假定

$$F_\infty = F_0 - B_2^T X_\infty, \tag{5}$$

若假设式 (3b) 成立，则存在一个 $F_0$ 使得 $C_1 + D_{12}F_0 = 0$，利用式 (5)，那么式(4)可重写为

$$(A + B_2F_0)^T X_\infty + X_\infty(A + B_2F_0) + \frac{1}{\nu^2} X_\infty B_1 B_1^T X_\infty - X_\infty B_2(2I - D_{12}^T D_{12})B_2^T X_\infty = 0. \tag{6}$$

为了求上述特殊情况的最优值 $\nu_0$，引入如下两个引理:

**引理 1.** 假定 $P > 0$，$Q \geqslant 0$，若 $\nu^2 P - Q \geqslant 0$，则 $\nu^2 \geqslant \lambda_{\max}(P^{-1}Q)$. 证明略.

**引理 2**[4]. 若代数 Riccati 方程 $A^T X + XA - XBB^T X = 0$ 有使 $A - BB^T X$ 稳定的解存在，则X的秩等于$A$的不稳定特征值个数，同时存在一个正交阵 $U = [U_1 U_2]$，使得 $U^T XU = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix}$，$U^T AU = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$，其中 $X_2 > 0$.

**定理 2.** 假定式 (3a) 和 (3b) 成立，且 $2I - D_{12}^T D_{12} > 0$，则

(1) 若 $A + B_2F_0$ 稳定，则最优值 $\nu_0 = 0$.

---

1) 杨富文，H$^\infty$ 优化设计理论及应用研究(第七章)，华中理工大学博士论文，1990 年.

(2) 若 $A+B_2F_0$ 完全不稳定,则最优值 $\nu_0=[\lambda_{\max}(P^{-1}Q)]^{\frac{1}{2}}$，其中 $P$、$Q$ 满足下列 Lyaponov 方程：

$$(A+B_2F_0)P+P(A+B_2F_0)^T=B_2(2I-D_{12}^TD_{12})B_2^T, \tag{7}$$

$$(A+B_2F_0)Q+Q(A+B_2F_0)^T=B_1B_1^T. \tag{8}$$

(3) 若 $A+B_2F_0$ 部分稳定,则最优值 $\nu_0=[\lambda_{\max}(P^{-1}Q)]^{\frac{1}{2}}$，其中 $P$、$Q$ 满足下列 Lyaponov 方程：

$$A_{22}P+PA_{22}^T=U_2^TB_2(2I-D_{12}^TD_{12})B_2^TU_2, \tag{9}$$

$$A_{22}Q+QA_{22}^T=U_2^TB_1B_1^TU_2, \tag{10}$$

$$U^T(A+B_2F_0)U=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ 0 & A_{22}\end{bmatrix}. \tag{11}$$

式中 $U=[U_1U_2]$ 为正交阵,它使 $(A+B_2F_0)$ 经正交变换后 $A_{11}$ 完全稳定，$A_{22}$ 完全不稳定.

证明. (1)和(2)的证明略，下面证明(3). 由引理 2 可知，$(A+B_2F_0)$ 的不稳定特征值个数等于式(6)中 $X_\infty$ 的秩，且存在一个正交阵 $U=[U_1U_2]$ 使得 $U^TX_\infty U=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & X_2\end{bmatrix}$，$U^T(A+B_2F_0)U=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ 0 & A_{22}\end{bmatrix}$. 对式(6)左乘 $U^T$、右乘 $U$ 得

$$\begin{aligned}&U^T(A+B_2F_0)^TUU^TX_\infty U+U^TX_\infty UU^T(A+B_2F_0)U\\&\quad+\frac{1}{\nu^2}U^TX_\infty UU^TB_1B_1^TUU^TX_\infty U-U^TX_\infty UU^TB_2(2I-D_{12}^TD_{12})B_2^TUU^TX_\infty U\\&=0,\end{aligned} \tag{12}$$

因此有

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ 0 & A_{22}\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & X_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & X_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ 0 & A_{22}\end{bmatrix}+\frac{1}{\nu^2}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & X_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U_1^T\\ U_2^T\end{bmatrix}B_1B_1^T[U_1U_2]\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & X_2\end{bmatrix}\\&\qquad-\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & X_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U_1^T\\ U_2^T\end{bmatrix}B_2(2I-D_{12}^TD_{12})B_2^T[U_1U_2]\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & X_2\end{bmatrix}=0.\end{aligned} \tag{13}$$

式(13)展开则得

$$A_{22}^TX_2+X_2A_{22}+\frac{1}{\nu^2}X_2U_2^TB_1B_1^TU_2X_2-X_2U_2^TB_2(2I-D_{12}^TD_{12})B_2^TU_2X_2=0. \tag{14}$$

由引理 2 有 $X_2>0$，令 $X_1=X_2^{-1}$，则式(4)可写为

$$A_{22}X_1+X_1A_{22}^T+\frac{1}{\nu^2}U_2^TB_1B_1^TU_2-U^TB_2(2I-D_{12}^TD_{12})B_2^TU_2=0. \tag{15}$$

定义矩阵 $P$、$Q$ 满足下列方程：

$$A_{22}P+PA_{22}^T=U_2^TB_2(2I-D_{12}^TD_{12})B_2^TU_2, \tag{16}$$

$$A_{22}Q+QA_{22}^T=U_2^TB_1B_1^TU_2. \tag{17}$$

综合式(15)，(16)和(17)有 $X_1=P-\frac{1}{\nu^2}Q$. 因 $X_1>0$，故 $\nu^2P-Q>0$. 因此对于 $A+B_2F_0$ 部分稳定时,闭环矩阵 $A_{F\infty}$ 稳定，且 $\|C_{1F\infty}(sI-A_{F\infty})^{-1}B_1\|_\infty<\nu$ 的充要条

件是 $\nu^2P-Q>0$. 另外,根据最优值的定义以及引理 1,有

$$\nu_0=[\lambda_{\max}(P^{-1}Q)]^{\frac{1}{2}}.$$

上面给出了 $D_{11}=0$ 和 $\mathrm{rank}[I\otimes D_{12}csC_1]=\mathrm{rank}[I\otimes D_{12}]$ 情况下最优值 $\nu_0$ 的求解方法. 有了最优值 $\nu_0$, 可以直接给出状态反馈的最优解, 下面同样分三种情况讨论:

1) $A+B_2F_0$ 稳定,则 $X_\infty^*=0$, 因此最优反馈阵为 $F_\infty^*=F_0$.

2) $A+B_2F_0$ 完全不稳定,则 $X_\infty^*=\left(P-\frac{1}{\nu_0^2}Q\right)^{-1}$, 其中 $P$、$Q$ 由式 (7),(8) 给出,因此最优反馈阵为 $F_\infty^*=F_0-B_2^TX_\infty^*$.

3) $A+B_2F_0$ 部分稳定,则 $X_\infty^*=U_2\left(P-\frac{1}{\nu_0^2}Q\right)^{-1}U_2^T$, 其中 $P$、$Q$ 由式(9),(10) 给出,因此最优反馈阵为 $F_\infty^*=F_0-B_2^TX_\infty^*$.

其中,表达式 $X_\infty^*$ 需要求逆.因 $\nu_0=[\lambda_{\max}(P^{-1}Q)]^{\frac{1}{2}}$, 故$\left(P-\frac{1}{\nu_0^2}Q\right)$ 的逆不存在. 因此在实际计算时选取 $\nu_1>\nu_0$ 来代替上述表达式中的 $\nu_0$, 从而求出趋于最优的次优状态反馈阵.

## 四、设计举例

设系统(1)中的各矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&2&1\\1&1&4\end{bmatrix},\ B_1=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\\1&0\end{bmatrix},\ B_2=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&0\end{bmatrix},\ C_1=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix},$$

$$D_{11}=0,\ D_{12}=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\\1&0\end{bmatrix}.$$

通过求解可得最优值 $\nu_0=1.759676$. 取 $\nu_1=\nu_0+0.01=1.769676$, 对应反馈阵为

$$F_\infty=\begin{bmatrix}90.64225&73.720321&-174.3812\\-97.15875&-83.61899&169.8789\end{bmatrix},$$

整个系统闭环极点为

$$\lambda_1=-1.147617,\ \lambda_2=-6.737422,\ \lambda_3=-152.4728.$$

## 参 考 文 献

[1] Petersen, I. R., Disturbance Attenuation and $H^\infty$ Optimization: A Design Method Based on the Algebraic Riccati Equation, *IEEE Trans. Auto. Contr.*, **AC-32**(1987), 427—429.

[2] Scherer, C., $H^\infty$-control by State Feedback: An Iterative Algorithm and Characterization of High-gain Occurence, *Systems Control Lett.*, **12**(1989), 383—391.

[3] Zhou, K. and Khargonekar, P. P., An Algebraic Riccati Equation Approach to $H^\infty$ Optimization, *Systems Control Lett.*, **11**(1988), 85—92.

[4] Postlethwaite, I., Gu, D-W. and O' Young, S. D., Some Computational Results on Size Reduction in $H^\infty$ Design, *IEEE Trans. Auto. contr.*, **AC-33**(1988), 177—185.

# A STUDY OF $H^{\infty}$ STATE FEEDBACK CONTROL AND ITS OPTIMAL SOLUTION

YANG FUWEN

*(Dept. of Electrical Engineering, Fuzhou University)*

TU JIAN

*(Dept. of Automatic control, University of Science and Technology)*

ABSTRACT

$H^{\infty}$ state feedback control problem is studied in this paper assuming all states are available. The sub-optimal solution to $H^{\infty}$ state feedback control problem based on one algebraic Riccati equation is given, and an analytic method for the optimal solution is proposed for a special case.

**Key words**: $H^{\infty}$ state feedback; algebraic Riccati equation; optimal solution.