第 19 卷 第 6 期　　自 动 化 学 报　　Vol. 19, No. 6
1993 年 11 月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　Nov., 1993

短 文

大系统集结比较方程的新方法

舒 煌
（西南交通大学计算机系，成都 610031）

摘 要

用向量 V 函数求解大系统稳定性要利用向量比较方程．对指数稳定型系统，本文改变了过去利用柯西不等式集结常系数线性比较方程的做法，直接集结出非线性比较方程，并利用文 [1] 的结果判断稳定性，使参数稳定区域扩大．

关键词: 大系统，稳定性，比较方程

一、引 言

用向量 V 函数求解大系统稳定性，一般是集结常系数线性比较方程，得到的是指数稳定[2-4]．对一般的非指数稳定系统，应采用非线性比较方程[1,5-7]．舒仲周给出了一般自治比较方程(全局)渐近稳定的充要准则[1,5,6]．

本文仍考虑指数稳定型系统，但给出了一种集结非线性比较方程的方法，并利用文 [1]的准则判断稳定性，使参数稳定区域明显扩大，计算量也大为减小．

二、引 理

考虑以下非线性自治比较方程

$$\dot{u}_i = h_i(u_i)\sum_{j=1}^{m} a_{ij}u_j^{\beta_j}\ (a_{ij}\geqslant 0,\ i\neq j;\ \beta_j>0;\ i=1,\cdots,m). \tag{2.1}$$

式中 $u^T=(u_1,\cdots,u_m)\in \bar{R}_+^m$．$h_i(u_i)$ 满足(1)当 $u_i\neq 0$，$h_i(u_i)>0$；(2) $h_i(u_i)$ 不一定连续，但整个右端函数应为连续．

式(2.1)的零解可以不满足唯一性条件．

常系数线性比较方程

$$\dot{w}_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}w_j,\ (a_{ij}\geqslant 0,\ i\neq j;\ i=1,\cdots,m) \tag{2.2}$$

本文于 1991 年 3 月 12 日收到．

的零解为全局稳定的充要条件是行列式 $|A|$ 的顺主子式 $|A_k|$ 满足

$$(-1)^k|A_k|>0,\ (k=1,\cdots,m). \tag{2.3}$$

再由文[1]知式(2.1)和(2.2)的全局稳定等价．故得

引理． 式(2.1)的零解为全局稳定的充要条件是(2.3)式．

三、主要结果

考虑内联项为线性的大系统

$$\dot{x}_i=f_i(t,x_i)+\sum_{j\neq i}^{m}D_{ij}x_j,\ (i=1,\cdots,m). \tag{3.1}$$

式中 $x_i\in R^{n_i}, D_{ij}$ 是 $n_i\times n_j$ 常矩阵，$f_i(t,0)=0$．式(3.1)的孤立子系统是

$$s_i:\ \dot{x}_i=f_i(t,x_i),(i=1,\cdots,m). \tag{3.2}$$

设式(3.1)和(3.2)的原点是唯一奇点，且在全相空间 $(x_1,\cdots,x_m)$ 内定义并满足解的唯一性条件．

定理． 设子系统 s_i 存在可微函数 $v_i(t,x_i)$ 和正常数 c_{1i},c_{2i},c_{3i}，和 c_{4i}，使得在全空间 (x_i) 有

1) $c_{1i}\|x_i\|^2\leqslant v_i(t,x_i)\leqslant c_{2i}\|x_i\|^2$;

2) $\dfrac{\partial v_i}{\partial t}+(\text{grad }v_i)^Tf_i(t,x_i)\leqslant -c_{3i}\|x_i\|^2$;

3) $\|\text{grad }v_i\|\leqslant c_{4i}\|x_i\|$,

则通过式(3.1)可得比较方程

$$\dot{u}_i=\alpha_iu_i^{1/2}\left(\sum_{j=1}^{m}a_{ij}u_j^{1/2}\right),\ (i=1,\cdots,m). \tag{3.3}$$

式中常数 α_i 和矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times m}$ 分别为

$$\alpha_i=\begin{cases}1/\sqrt{c_{1i}}, & \text{当 }\sum_{j=1}^{m}a_{ij}u_j^{1/2}\geqslant 0,\\ 1/\sqrt{c_{2i}}, & \text{当 }\sum_{j=1}^{m}a_{ij}u_j^{1/2}<0,\end{cases} \tag{3.4}$$

$$a_{ii}=-c_{3i}/\sqrt{c_{2i}};\ a_{ij}=c_{4i}\|D_{ij}\|/\sqrt{c_{1j}}(i\neq j). \tag{3.5}$$

式(3.1)的零解为全局稳定的充分条件是顺主子式

$$(-1)^k|A_k|>0,(k=1,\cdots,m). \tag{3.6}$$

证．$v_i(t,x_i)$ 通过式(3.1)的全导数是

$$\begin{aligned}\dot{v}_i&=\frac{\partial v_i}{\partial t}+(\text{grad }v_i)^Tf_i(t,x_i)+(\text{grad }v_i)^T\sum_{j\neq i}^{m}D_{ij}x_j\\ &\leqslant -c_{3i}\|x_i\|+\left|(\text{grad }v_i)^T\sum_{j\neq i}^{m}D_{ij}x_j\right|\quad (\text{条件(2)}),\\ &\leqslant \|x_i\|\left(-c_{3i}\|x_i\|+c_{4i}\sum_{j\neq i}^{m}\|D_{ij}\|\|x_j\|\right)\ (\text{条件(3)}),\end{aligned}$$

$$\leqslant \|x_i\|\left(-\frac{c_{3i}}{\sqrt{c_{2i}}}v_i^{1/2}+c_{4i}\sum_{j\neq i}^{m}\frac{\|D_{ij}\|}{\sqrt{c_{1j}}}v_j^{1/2}\right)\quad (条件(1)),$$

$$=\alpha_i v_i^{1/2}\left(\sum_{j=1}^{m}a_{ij}v_j^{1/2}\right)\quad (式(3.4)和(3.5)).$$

故得比较方程(3.3)．α_i 虽不连续，但式(3.3)的整个右端函数连续，故其解存在(不一定唯一)．由引理及比较原理[6,8]知定理成立．证毕．

Bailey[2] 利用柯西不等式得到的稳定性判别矩阵 $B=(b_{ij})_{m\times m}$ 为

$$b_{ii}=-c_{3i}/(2c_{2i});\quad b_{ij}=c_{4i}^2\sum_{k\neq i}^{m}\|D_{ik}\|^2/(2c_{3i}c_{1j}),\ (i\neq j). \tag{3.7}$$

为证明本文的定理蕴含文[2]的结论，由 M 矩阵的性质，知存在 m 个正数 $d_1,\cdots,d_m$ 使 $-d_ib_{ii}>\sum\limits_{j\neq i}^{m}d_jb_{ij}$，$(i=1,\cdots,m)$．代入(3.7)式再利用柯西不等式得

$$d_i\frac{c_{3i}^2}{c_{2i}}>c_{4i}^2\left(\sum_{j\neq i}^{m}\frac{d_j}{c_{1j}}\right)\left(\sum_{k\neq i}^{m}\|D_{ik}\|^2\right)\geqslant c_{4i}^2\left(\sum_{j\neq i}^{m}\frac{\sqrt{d_j}}{\sqrt{c_{1j}}}\|D_{ij}\|\right)^2.$$

两端开方并考虑到(3.5)式知

$$-\sqrt{d_i}\ a_{ii}=-\sqrt{d_i}\ \frac{c_{3i}}{\sqrt{c_{2i}}}>\sum_{j\neq i}^{m}\sqrt{d_j}\ \frac{c_{4i}}{\sqrt{c_{1j}}}\|D_{ij}\|^2=\sum_{j\neq i}^{m}\sqrt{d_j}\,a_{ij}.$$

可见矩阵 B 的损失恰在于柯西不等式．一般 m 越大，损失也越大．

作为系统(3.1)的特例，考虑有如下分解形式的常系数线性系统：

$$\dot{x}_i=A_{ii}x_i+\sum_{j\neq i}^{m}A_{ij}x_j,\quad s_i:\ \dot{x}_i=A_{ii}x_i,\ (i=1,\cdots,m). \tag{3.8),(3.9}$$

其中 A_{ij} 是 $n_i\times n_j$ 常矩阵．设子系统 s_i 为渐近稳定，则给定负定函数 $-2k_ix_i^Tx_i(k_i>0)$，存在正定函数 $v_i=x_i^TC_ix_i(C_i=C_i^T$ 为正定矩阵)，使其通过 s_i 的全导数

$$\dot{v}_i|_{s_i}=x_i^T(A_{ii}^TC_i+C_iA_{ii})x_i=-2k_ix_i^Tx_i.$$

正定矩阵 C_i 可由巴尔巴欣公式求出．又知存在常数 $M_i\geqslant m_i>0$，使

$$m_ix_i^Tx_i\leqslant x_i^TC_ix_i\leqslant M_ix_i^Tx_i,(i=1,\cdots,m).$$

在 Frobenius 范数下，由定理立即得

推论． 系统(3.8)的判稳矩阵 $R=(r_{ij})_{m\times m}$ 为

$$r_{ii}=-k_i/\sqrt{M_i};\quad r_{ij}=\|C_iA_{ij}\|/\sqrt{m_j},\ (i\neq j). \tag{3.10}$$

文[3]对系统(3.8)得到的判稳矩阵 $Q=(q_{ij})_{m\times m}$ 为

$$q_{ii}=-k_i/M_i;\quad q_{ij}=\|C_iA^{(i)}\|^2/(k_im_j),\ (i\neq j). \tag{3.11}$$

式中 $A^{(i)}=(A_{i1},\cdots,A_{ii-1},A_{ii+1},\cdots,A_{im})$．用和前面同样的方法可证 Q 比(3.10)表示的 R 损失大．

如果引用部分变元的稳定性判据[8]，根据文[1]，[5]和 M 矩阵的性质同样可证式(3.10)表示的判别矩阵 R 优于文[4]的判别矩阵(仍从柯西不等式得出)．限于篇幅，从略．

四、举　例

设有三阶系统

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = -a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3,\\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 - a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \quad (a_{ii}>0, i=1,2,3),\\ \dot{x}_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 - a_{33}x_3,\end{cases}$$

在子系统 $s_i: \dot{x}_i = -a_{ii}x_i$, $(i=1,2,3)$ 下，给定 $\dot{v}_i = -x_i^2$，求得 $v_i = \frac{1}{2a_{ii}}x_i$. 由推论知 $C_i = m_i = M_i = \frac{1}{2a_{ii}}$, $2k_i = 1$. 给定 $a_{11} = a_{12} = a_{13} = 1$, $a_{21} = a_{23} = 2$, $a_{31} = 1$, $a_{32} = 2$. 表 1 是给定 a_{22} 后，分别由判别矩阵 R 和 Q 求得的参数 a_{33} 的稳定区域.

表　1

a_{22}	参数稳定区域		扩大的稳定区域
	按 R 计算	按 Q 计算	
8	$a_{33}>3$	$a_{33}>4.18$	$3<a_{33}\leqslant 4.18$
5	$a_{33}>5$	$a_{33}>7.07$	$5<a_{33}\leqslant 7.07$
4.1	$a_{33}>6.71$	$a_{33}>21.32$	$6.71<a_3\leqslant 21.32$
3	$a_{33}>13$	失效	

参　考　文　献

[1] 舒仲周，大系统渐近稳定性的一般判别定理，系统科学与数学，**10**(1990)，(1)，93—96.
[2] Beiley, F. N., The Application of Liapunov's Second Method to Interconnected Systems, *SIAM J. Contr.*, **A. 3** (1966), 443—462.
[3] 叶伯英，大系统理论中的辅助方程组，自动化学报，**14**(1988)，(6)，438—445.
[4] 黄力民，大系统稳定性的一种新的分析方法，控制理论与应用，6，增刊 1(1989)，133—137.
[5] 舒中周，比较方程的稳定性，数学年刊，7A:6(1986)，676—684.
[6] 舒仲周，运动稳定性，西南交通大学出版社，1990.
[7] 舒　煌，离散大系统非线性比较方程的稳定性，应用数学和力学，**11**(1990)，(8)，731—737.
[8] 廖晓昕，稳定性的数学理论及应用，华中师范大学出版社，1989.

A NEW APPROACH TO AGGREGATE COMPARISON EQUATIONS FOR LARGE SCALE SYSTEMS

Shu Huang

(*Dept. of Computer, Southwest Jiaotong University, Chengdu,* 610031 *China*)

Abstract

To solve stability problem of large scale systems by using vector LIAPUNOV functions it is necessary to use vector comparison equations. The objective of this paper unlike previous works which limited to aggregations of linear comparison equations with constant coefficients by means of the Cauchy inequality is to give an approach to aggregate a type of nonlinear comparison equations. On the basis of the stability theorem given in [1], the stability regions obtained here are much larger than those in previous papers.

Key words: stability; large scale system; comparison equation