短 文

基于正交变换的时变参数限定记忆估计法

刘 整 社

(北京航空航天大学自动控制系，北京 100083)

摘　　要

对于时变参数的最小二乘估计问题，提出基于正交变换的限定记忆法. 克服了传统方法因求解法方程而造成的病态加剧. 且在不增加运算量的情况下，节省了存贮空间，改善了收敛性.

关键词: 时变参数估计，正交变换，限定记忆法.

一、引　　言

时变参数估计是工程实践中经常遇到的问题. 为了使所估计的参数能够跟踪实际参数的变化，需要人为地削弱旧数据的影响，以增加新数据的权值. 常用方法主要有两大类：一是通过遗忘因子对历史数据进行指数加权，以逐渐消除旧数据影响的渐消记忆法[1]；二是采用矩形窗函数，舍弃部分较旧的数据，只用一段较新数据进行参数估计的限定记忆法. 本文只讨论第二类方法.

目前所使用的限定记忆法是由矛盾方程组的法方程出发，利用矩阵的求逆公式[2]推导出来的，因而严重加剧了病态程度[3]. 本文从正交变换出发，导出了时变参数估计的递推最小二乘法. 该方法不会加剧病态程度，且存贮量少、计算量小、收敛性好.

二、基 本 原 理

考虑单变量线性时变系统

$$y(K) = \boldsymbol{\varphi}_K^T \boldsymbol{\theta} + \xi(K). \tag{1}$$

式中 $\boldsymbol{\varphi}_K^T = [-y(K-1), -y(K-2), \cdots, -y(K-n), u(K-1), u(K-2), \cdots, u(K-n)]$,

$\boldsymbol{\theta}^T = [a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n]$.

其中 $\{u(K)\}$, $\{y(K)\}$ 分别是系统的输入和输出测量序列； $\xi(K)$ 是随机噪声； $\{a_i\}$,

本文于1991年11月5日收到.

$\{b_i\}$ 是待估计的时变参数.

为了跟踪 $\boldsymbol{\theta}$ 的变化, m 时刻的估计值 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_m$ 只由最新的 $N(N \geqslant 2n)$ 个方程

$$\boldsymbol{\varphi}_k^T \boldsymbol{\theta}_m = y(K), \quad K = m, \ m-1, \cdots, m-N+1 \tag{2}$$

确定.

若记

$$\begin{cases} \boldsymbol{\phi}_k^T = [\boldsymbol{\varphi}_k^T \,|\, -y(K)], \\ \phi_m = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\phi}_{m-N+1}^T \\ \boldsymbol{\phi}_{m-N+2}^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{\phi}_m^T \end{pmatrix}, \\ \boldsymbol{\beta}_m = [\boldsymbol{\theta}_m^T \,|\, 1]^T, \end{cases} \tag{3}$$

并构造正交变换阵 H_m[4], 使

$$H_m \phi_m = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \cdots r_{1\,2n+1} \\ & r_{22} \cdots r_{2\,2n+1} \\ & \ddots \quad \vdots \\ & r_{2n+1\,2n+1} \\ \hline & 0 \\ & \vdots \\ & 0 \end{bmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} Q_m \\ \hline 0 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

定理 1[5]. 矛盾方程组 $\boldsymbol{\varphi}_k^T \boldsymbol{\theta}_{m+1} = y(K), \ K = m+1, m, \cdots, m-N+1$ 和

$$\left\| \begin{pmatrix} Q_m \\ \hline \boldsymbol{\phi}_{m+1}^T \end{pmatrix} \boldsymbol{\beta}_{m+1} \right\|_2 = \min$$

有相同的最小二乘解.

定理 1 说明, $\boldsymbol{\varphi}_k^T \boldsymbol{\theta} = y(K), \ K = m+1, \ m, \cdots, m-N+1$ 的最小二乘解, 可由矛盾方程 $\boldsymbol{\varphi}_k^T \boldsymbol{\theta} = y(K), \ K = m, \ m-1, \cdots, m-N+1$ 系数矩阵上三角化后所得到的前 $2n+1$ 行组成的矩阵 Q_m 和新方程 $\boldsymbol{\varphi}_{m+1}^T \boldsymbol{\theta} = y(m+1)$ 得到. 由于 $\begin{pmatrix} Q_m \\ \hline \boldsymbol{\phi}_{m+1}^T \end{pmatrix}$ 的结构特殊, 下面给出使其上三角化的简化公式.

记

$$F = \begin{pmatrix} Q_m \\ \hline \boldsymbol{\phi}_{m+1}^T \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1\,2n+1} \\ & f_{22} & \cdots & f_{2\,2n+1} \\ & & & \vdots \\ & & & f_{2n+1\,2n+1} \\ f_{2n+2\,1} & f_{2n+2\,2} & \cdots & f_{2n+2\,2n+1} \end{bmatrix}.$$

定理 2[5]. 使 F 阵上三角化的正交变换公式为

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\alpha_l = [(f_{ll}^{(l)})^2 + (f_{2n+2\,l}^{(l)})^2]^{\frac{1}{2}}, \\
\sigma_l = \alpha_l(\alpha_l + |f_{ll}^{(l)}|), \\
\eta_l = f_{ll}^{(l)} + \mathrm{sign}(f_{ll}^{(l)})\alpha_l, \\
\eta_l' = \eta_l/\sigma_l, \\
\mu' = f_{2n+2\,l}^{(l)}/\sigma_l, \\
\left\{
\begin{array}{l}
\beta_j = \eta_l f_{lj}^{(l)} + f_{2n+2\,l}^{(l)} f_{2n+2\,j}^{(l)} \\
f_{lj}^{(l+1)} = f_{lj}^{(l)} - \eta_l' \beta_j \\
f_{2n+2\,j}^{(l+1)} = f_{2n+2\,j}^{(l)} - \mu_l' \beta_j \\
j = l, l+1, \cdots, 2n+1,
\end{array}
\right. \\
l = 1, 2, \cdots 2n+1.
\end{array}
\right.
\tag{5}
$$

定理 1 和定理 2 解决了增加一个新方程的递推求解问题．下面推导剔除旧方程的递推公式．

用 W_m 表示矩阵

$$
\begin{pmatrix}
\boldsymbol{\phi}_{m-N+2}^T \\
\boldsymbol{\phi}_{m-N+3}^T \\
\vdots \\
\boldsymbol{\phi}_m^T
\end{pmatrix},
$$

经正交变换上三角化后的前 $2n+1$ 行，并记

$$
P = \begin{pmatrix} Q_m \\ \hline \boldsymbol{\phi}_{m-N+1}^T \end{pmatrix}.
$$

定理 3. W_m 可以用下列递推公式由 P 得到．

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\alpha_l = |p_{ll}^{(l)}|, \\
p_{ll}^{(l+1)} = -\mathrm{sign}(p_{ll}^{(l)})[\alpha_l^2 - (p_{2n+2\,l}^{(l)})^2]^{\frac{1}{2}}, \\
\sigma_l = \alpha_l(\alpha_l + |p_{ll}^{(l+1)}|), \\
\eta_l = p_{ll}^{(l+1)} + \mathrm{sign}(p_{ll}^{(l+1)})\alpha_l, \\
\eta_l' = \eta_l/\sigma_l, \\
\mu_l' = p_{2n+2l}^{(l)}/\sigma_l, \\
\left\{
\begin{array}{l}
p_{lj}^{(l+1)} = [p_{lj}^{(l)} + \eta_l' p_{2n+2\,l}^{(l)} p_{2n+2\,j}^{(l)}]/(1-\eta_l'\eta_l) \\
\beta_j = \eta_l p_{lj}^{(l+1)} + p_{2n+2\,l}^{(l)} p_{2n+2\,j}^{(l)} \\
p_{2n+2\,j}^{(l+1)} = p_{2n+2\,j}^{(l)} - \mu_l' \beta_j \\
j = l+1, \cdots, 2n+1,
\end{array}
\right. \\
l = 1, 2, \cdots, 2n+1.
\end{array}
\right.
\tag{6}
$$

证明．略．

定理 3 给出了剔除一个旧方程的递推公式．将定理 1—3 结合，就可以得到基于正交变换的时变参数限定记忆估计方法．

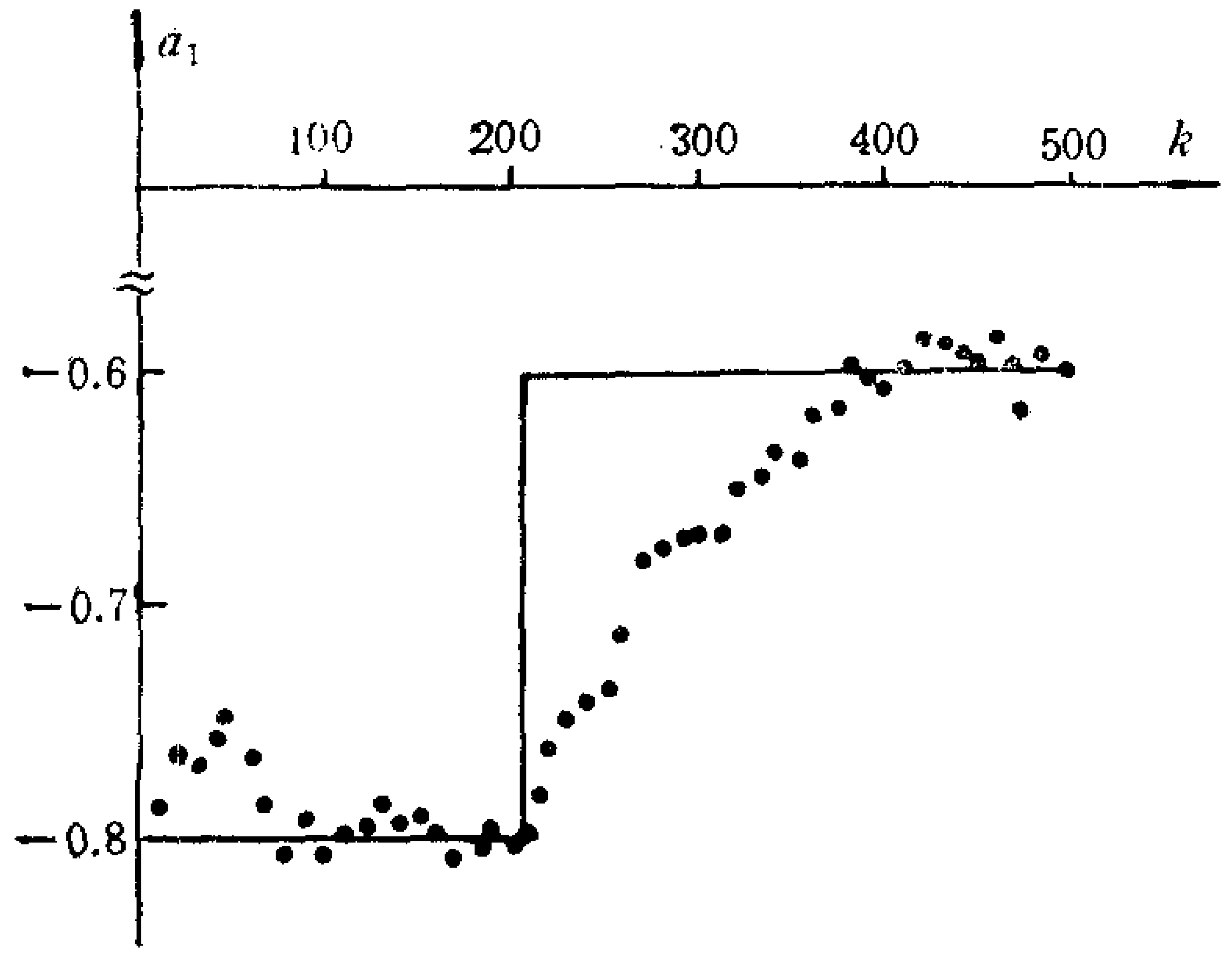
三、仿真计算

考虑文献[1]和[6]中采用的一阶线性系统

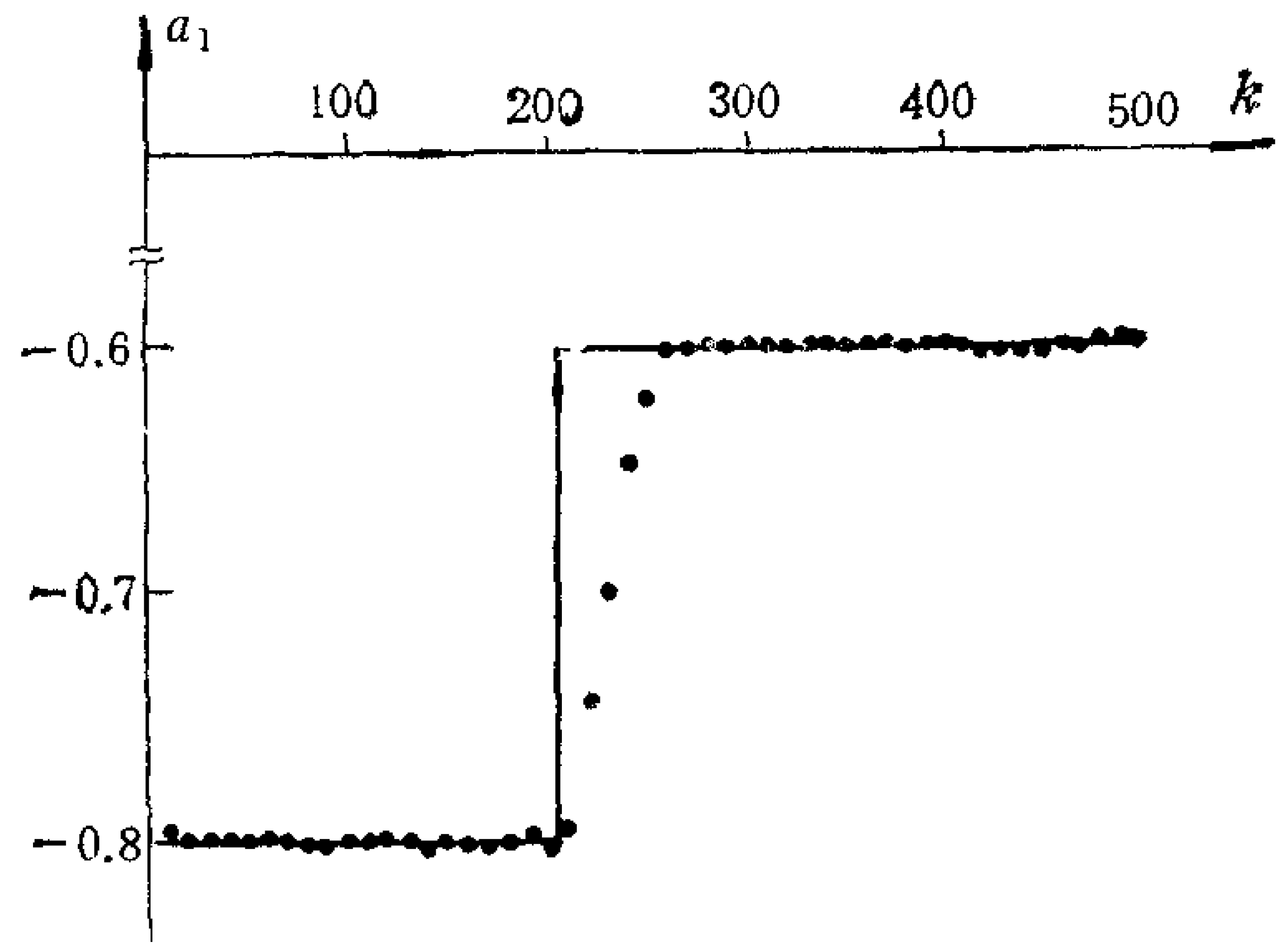
$$(1 - a_1 z^{-1}) y(k) = 0.6 z^{-1} u(k) + \frac{1}{1 - 0.2 z^{-1}} e(k).$$

式中 $\{u(k)\}$ 和 $\{e(k)\}$ 都是独立同分布的高斯序列，它们的均值为零，方差分别为 1 和 σ^2. 参数 a_1 在测量点 $k = 206$ 处从 -0.8 突变为 -0.6.

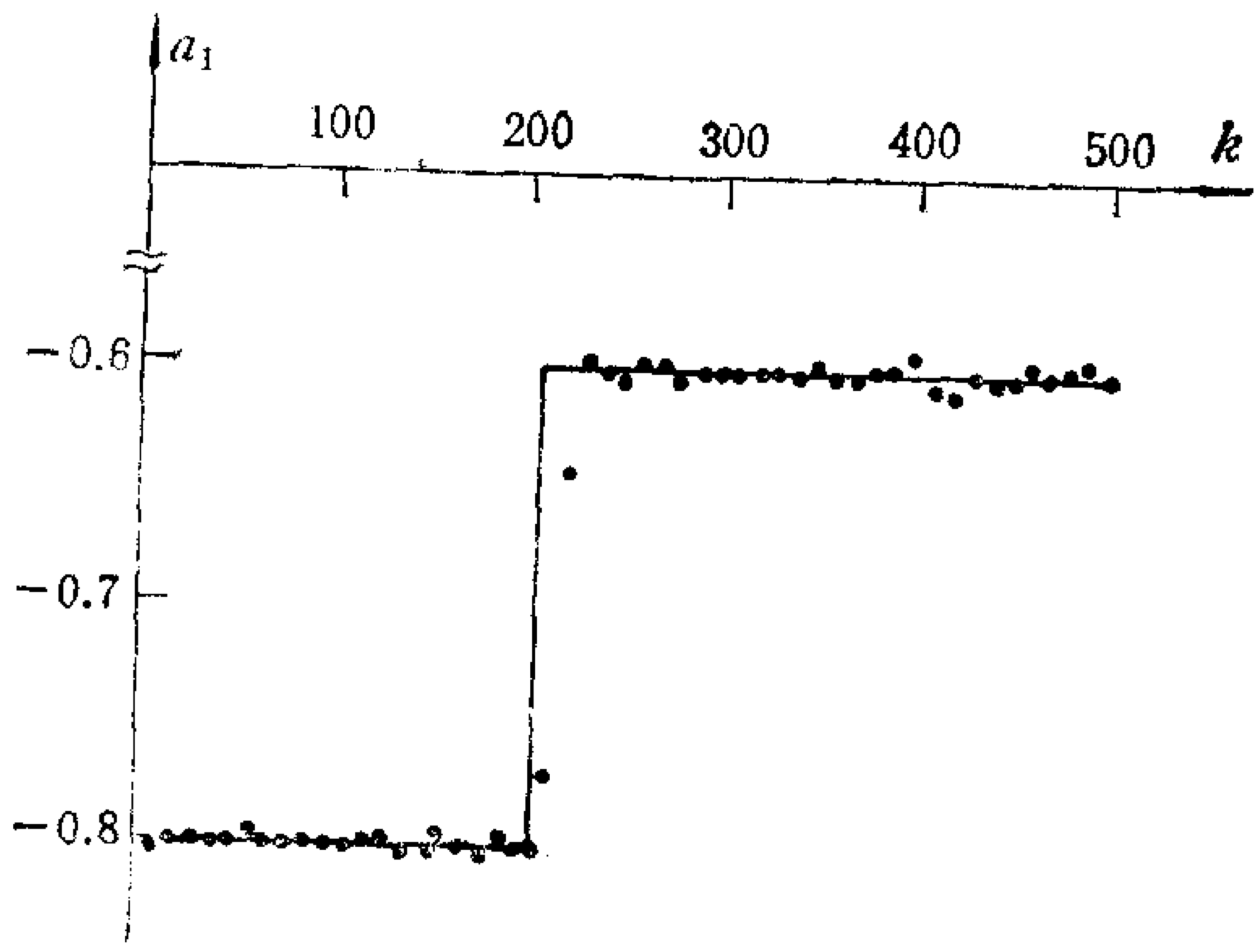
$\sigma = 0.1$，a_1 的估计结果如图 1 所示. 其中，递推极大似然法的估计结果引自文献



(a) 递推极大似然法的估计结果



(b) 本文方法的估计结果 ($N = 50$)



(c) 本文方法的估计结果 ($N = 20$)

图 1 两种估计方法的比较

[6]. 由图可见，极大似然法的估计结果波动较大，跟踪速度慢. 本文方法的估计结果不仅跟踪速度快，而且很平稳.

四、结　　论

本文从正交变换出发，导出了时变参数限定记忆的递推最小二乘法，克服了传统方法加剧病态程度的缺陷. 这种方法还具有运算量小，占用存贮空间少和收敛性好等优点. 此外，以本文递推最小二乘法为基础，还易于构成对应的递推广义最小二乘法、递推多级最小二乘法、递推增广矩阵法和递推极大似然法等一系列基于正交变换的时变参数限定

记忆估计方法．仿真计算表明，本文方法对时变参数的跟踪速度快且波动小．

参 考 文 献

[1] 韩光文，辨识与参数估计，国防工业出版社，北京，1980 年 12 月。
[2] Sen, A. and Sinha, N. K., On-line System Identification Algorithm Combining Stochastic Approximation and Pseudoinverse, *Automatica*, **11**(1975), 425—429.
[3] Householder, A. S.. Unitary Triangularization of a Nonsymmetric Matrix, *J. Assoc. Comput. Math.*, **5**(1958), 339—342.
[4] 冯 康等，数值计算方法，国防工业出版社，北京，1978.
[5] 刘整社等，差分模型递推估计的 Householder 变换法，自动化学报，**18**(1992)，315—324.
[6] Gertler, J. and Banyasz, C., A Recursive Maximum Likelihood Identification Method, *IEEE Trans. Auto. Control*, **AC-19** (1974), 816—820.

AN ON-LINE ORTHOGONAL TRANSFORMATION METHOD FOR PARAMETER ESTIMATION OF TIME-VARYING SYSTEMS

Liu Zhengshe

(Dept. of Automatic Control, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083 *China)*

Abstract

An on-line least squares identification method is proposed for parameter estimation of time-varying systems by introducing a rectangular window to cancel the old measurement. The method is developed based on orthogonal transformation so as to avoid worsening the ill-condition. In addition, the method has the benefits of fewer arithmetic operations, less storage requirement and better convergence property compared with the traditional methods.

Key words: timevariable parameter estimation; orthogonal transformation; memory limited system parameter estimation.