第 19 卷 第 6 期 自动化学报 Vol. 19, No. 6
1993 年 11 月 ACTA AUTOMATICA SINICA Nov., 1993

短 文

控制系统解耦反馈的参数化问题[1)]

夏小华

(北京航空航天大学第七研究室，北京 100083)

摘 要

将文献[7]中关于同伴集的参数化结果推广到相容同伴集. 利用相容同伴集的参数化和性质，考虑控制系统解耦反馈律的刻划问题，得到了用一个相容同伴集即可完全决定全体解耦反馈的充要条件. 本文推广了以往文献的结果，并指出其局限性. 本文结果是可验证、可构造的，对线性系统和非线性系统均成立.

关键词: 控制系统，输入输出解耦，受控不变分布，能控性分布，相容性.

一、引 言

控制系统的输入输出解耦是一个著名的问题. 伴随这一问题有四个研究课题[1]: 1) 解耦可能吗? 2) 解耦反馈律的全体是怎样的集合? 3) 能解耦的系统全体是怎样的集合? 4) 上述第 2) 和第 3) 中的两个集合之间的关系怎样?

回顾已有的结果，可以发现问题 1) 和 3) 都有相当完整的解答. 而对 2) 和 4) 则只有零碎的结果. 对于线性系统，Falb-Wolovich 的著名文献[2]可能是最早对 2) 进行研究的文章. 文献[1]亦有对 2) 的研究. 这两个文献给出了一个反馈成为单对单解耦 (Morgan) 问题的解耦反馈应满足的充要条件. 对于非线性系统的 Morgan 问题，Ha-Gilbert 的工作[3,4]推广了上述对应的线性结果，得到了一个反馈是局部解耦反馈的充要条件.

即使对这些已有的结果，我们仍有下面的问题: 1) 解耦反馈的全体到底是什么? 2) 怎样计算得到解耦反馈全体? 3)类似结果对于一般的块解耦问题成立吗? 成立的条件是什么?

本文将就以上三个问题进行讨论.

二、解耦问题及相容受控不变分布

考虑非线性系统

本文于 1991 年 8 月 9 日收到.
1) 国家自然科学基金和中国科学院自动化所复杂系统控制开放实验室基金支持.

$$\begin{cases}\dot{x}=f(x)+g(x)u,\ \ x(0)=x_0,\\ y=h(x).\end{cases} \tag{1}$$

其中 $x\in N\subset R^n$，N为 R^n 的一个开子集；$u\in R^m$，$y\in R^p$；$f, g_1,\cdots,g_m$ 是N上的光滑向量场；$h_1,\cdots,h_p$ 是定义在N上的光滑映射。全文将讨论局部问题，故也可假设N为任意的光滑流形。当 $f(x)=Ax, g(x)=B$，$h(x)=Cx$，则系统(1)是一个线性系统。本文得到的结果对线性系统也是新的，且全局成立。

如果对于系统输出和一个分划 $y^i=h^i(x), i=1,\cdots,s$，其中 $y^i\in R^{p_i}$，$\sum\limits_{i=1}^{s}=p$，存在反馈 $u=\alpha(x)+\beta(x)v, |\beta(x)|\neq 0$（为简单，也记为 (α,β)），以及新输入 v 的一个分划，$v^T=(v^1,\cdots,v^{s+1})$，使得反馈作用后的系统具有性质：v^i 可影响 y^i，而不影响 $y^j, j\neq i, v^{s+1}$ 对输出不产生影响，则称系统(1)是（反馈）可解耦的。众所周知[5,6]，在一定正则条件下，这个问题的可解性等价于满足如下条件的受控不变分布或能控性分布 $\Delta_1,\cdots,\Delta_s$ 的存在性（满足正则条件的这组分布称为正则组）。

$$\Delta_i\subset\ker dh^i, \tag{2}$$

$$\Delta_i\cap G+\bigcap_{j\neq i}(\Delta_j\cap G)=G. \tag{3}$$

其中 $G=\mathrm{sp}\{g_1,\cdots,g_m\}$。条件(3)是所谓相容性条件，保证 $\Delta_1,\cdots,\Delta_s$ 是相容的，即具有共同的同伴。相容受控不变分布 $\Delta_1,\cdots,\Delta_s$ 的所有相容同伴全体称为其相容同伴集，并记为 $F(\Delta_1\cdots\Delta_s)$。

文献[7]对一个受控不变分布的同伴集进行了参数化。下面，将推广进行相容同伴集的参数化。有结论

引理 1. 若 $\Delta_1,\cdots,\Delta_s$ 是一个正则组，且

$$\Delta_i=\ker dh^i=\ker\{dh_1^i,\cdots,dh_{k_i}^i\}. \tag{4}$$

其中 $k_i=\mathrm{codim}\Delta_i$，$h_j^i$ 是某些光滑函数，那么 $\Delta_1,\cdots,\Delta_s$ 满足条件(3)，当且仅当

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix}L_gh^1(x)\\ \cdots\\ L_gh^s(x)\end{bmatrix}=\sum_{i=1}^{s}\mathrm{rank}\,L_gh^i(x). \tag{5}$$

引理的证明是简单的。故略。

现假设正则组 $\Delta_1,\cdots,\Delta_s$ 如(4)式给出，且满足式(5)，记

$$A(x)=\begin{bmatrix}L_fh^1(x)\\ \cdots\\ L_fh^s(x)\end{bmatrix},\ B(x)=\begin{bmatrix}L_gh^1(x)\\ \cdots\\ L_gh^s(x)\end{bmatrix}.$$

取反馈 (α,β) 满足（设 L_gh^i 的前 σ_i 列是独立的）

$$B(x)\beta_0(x)=\begin{bmatrix}I_{\sigma_1} & 0\cdots & 0 & 0 & 0\\ \lambda_1(x) & 0\cdots & 0 & 0 & 0\\ \cdots & \ddots & \cdots & & \\ 0 & 0\cdots & I_{\sigma_s} & 0 & 0\\ 0 & 0\cdots & \lambda_s(x) & 0 & 0\end{bmatrix},\ \ A(x)+B(x)\alpha_0(x)=\begin{bmatrix}0\\ \mu_1(x)\\ \cdots\\ 0\\ \mu_s(x)\end{bmatrix}. \tag{6}$$

其中 $\sigma_i=\mathrm{rank}\,L_gh^i(x)=\dim G-\dim G\cap\Delta_i$。

因为 $\Delta_i=\ker dh^i$ 是受控不变分布，由文献[7]，$d\lambda_i(x)$，$d\mu_i(x)\subset dh^i$。因此，$(\alpha_0,$

β_0)是 $\Delta_1,\cdots,\Delta_s$ 的一个相容同伴,且为每个 Δ_i 的正规同伴[7]. 从现在起,我们称由(6)式确定的 (α_0,β_0) 为 $\Delta_1,\cdots,\Delta_s$ 的正规相容同伴.

定理 2. 设 $\Delta_1,\cdots,\Delta_s$ 是正则组,且满足(3),那么,$(\alpha,\beta)\in F(\Delta_1\cdots\Delta_s)$ 当且仅当存在光滑函数(矩阵) $\xi_i,\bar{\xi}_i,\eta_i,\bar{\eta}_i$ 使得

$$\alpha(x)=\alpha_0(x)+\beta_0(x)\begin{bmatrix}\xi_1(h^1(x))\\ \bar{\xi}_1(x)\\ \cdots\\ \xi_s(h^s(x))\\ \bar{\xi}_s(x)\end{bmatrix},\quad \beta(x)=\beta_0(x)\begin{bmatrix}\eta_1(h^1(x))\\ \bar{\eta}_1(x)\\ \cdots\\ \eta_s(h^s(s))\\ \bar{\eta}_s(x)\end{bmatrix}. \tag{7}$$

证明. 注意到 $F(\Delta_1\cdots\Delta_s)=\bigcap\limits_{i=1}^{s}F(\Delta_i)$, 由文献[7]即证.

相容同伴集具有同伴集类似的性质,证明也是类似的,可参照文献[7].

命题 3. 设 $(\Delta_1^1,\cdots,\Delta_s^1)$ 和 $(\Delta_1^2,\cdots,\Delta_s^2)$ 是两个正则组,且满足(3). 又设 $(\Delta_1^2,\cdots,\Delta_s^2)$ 是真受控不变的. 如果 $(\Delta_1^1,\cdots,\Delta_s^1)\subset(\Delta_1^2,\cdots,\Delta_s^2)$, 那么

$$F(\Delta_1^1\cdots\Delta_s^1)\subset F(\Delta_1^2\cdots\Delta_s^2)$$

当且仅当 $(\Delta_1^1,\cdots,\Delta_s^1)=(\Delta_1^2,\cdots,\Delta_s^2)$

命题 4. 设 $(\Delta_1^1,\cdots,\Delta_s^1)$ 和 $(\Delta_1^2,\cdots,\Delta_s^2)$ 是两个正则组,且满足式(3). 那么,下面三个叙述中的任意两个都隐含第三个.

1) $(\Delta_1^1,\cdots,\Delta_s^1)\subset(\Delta_1^2,\cdots,\Delta_s^2)$;

2) $F(\Delta_1^1\cdots\Delta_s^1)\supset F(\Delta_1^2\cdots\Delta_s^2)$;

3) $\Delta_i^1=0$ 或 $\Delta_i^1\cap G=\Delta_i^2\cap G$.

三、解耦反馈集的刻划

如前述,解耦问题的可解性由式(2),(3)给出. 可验证的条件可写成

引理 5. 假设包含在 $\ker dh^i$ 中的最大受控不变分布 Δ_i^* 存在,那么解耦问题可解的充要条件是 $\Delta_1^*,\cdots,\Delta_s^*$ 满足(3)式.

Δ_i^* 的计算可通过例如不变分布算法[6]. 算法的结果是把 Δ_i^* 写成了(4)式的形式. 假设 (α^*,β^*) 为 $\Delta_1^*,\cdots,\Delta_s^*$ 相应(5)式确定的相容同伴. 那么,(α^*,β^*) 即构成一个解耦反馈.

这一节,将试图找出所有解耦反馈 Φ.

首先,假设非线性系统(1)的解耦问题可解. 其次假设所有满足(2),(3)的分布组是正则的. 这个假设是比较严的. 但这样的正则性条件在N的一个开稠集上成立. 而对于线性系统,这个假设显然在全局成立. 再次,假设 $\Delta_1^*,\cdots,\Delta_s^*$ 都是真受控不变的. 这个假设本质上是要求每一组输出确实要受输入的影响,故是不严格的.

定理 6. 假设 $(\Delta_1,\cdots,\Delta_s)$ 是满足条件(2),(3)的正则组. 那么,下面的叙述等价:

1) $\Phi=F(\Delta_1\cdots\Delta_s)$;

2) $(\Delta_1\cdots\Delta_s)=(R_1^*,\cdots,R_s^*)$，$R_i^*$ 是包含在 $\ker dh^i$ 中的最大能控性分布，且是满足 (2),(3) 的唯一正则能控性分布解；

3) $(\Delta_1\cdots\Delta_s)=(R_1^*,\cdots,R_s^*)$，且对任意 $(\alpha,\beta)\in F(\Delta_1^*,\cdots,\Delta_s^*)$，$R_i^*=\langle\bar{f},\bar{g}|\{g_j^*,j\in I_i\cup I_{s+1}\}\rangle$，其中 $(\bar{f},\bar{g})$（相应地,$(\bar{f}^*,\bar{g}^*)$）是相对于 (α,β)（相应地，(α^*,β^*)）作用后的动态；

4) 包含在 $\bigcap_{i=1}^{s}\Delta_i^*$ 中最大能控性分布 O^* 为零.

证明. 1),2)和 3) 的等价性可利用前面的命题 3 和命题 4，依照文献[7]对干扰解耦问题类似地证明. 以下证明 4) 和 2) 是等价的.

文献[5]中已证明了 4) 保证 2). 下面用反证法证明 2) 保证 4).

取 $(\alpha,\beta)\in F(R_1^*\cdots R_s^*)$，由文献 [5] 引理 3.11，在该反馈的作用下,闭环系统可写为

$$\begin{cases}\dot{x}_i=f_i(x_i)+\sum\limits_{k\in I_i}g_{ki}(x_i)v_i,\quad i=1,\cdots,s,\\ \dot{x}_{s+1}=f_{s+1}(x)+\sum\limits_{j=1}^{m}g_{js+1}(x)v_j,\\ \dot{x}_{s+2}=f_{s+2}(x_1,\cdots,x_s,x_{s+2},x_{s+3})\\ \qquad\qquad+\sum\limits_{j=1}^{s}\left(\sum\limits_{k\in I_j}g_{ks+2}(x_1,\cdots,x_s,x_{s+2},x_{s+3})v_k\right),\\ \dot{x}_{s+3}=f_{s+3}(x_{s+3}),\\ y^i=h^i(x_i,x_{s+3}).\end{cases}$$

其中 $R^*=\ker\{dx_i,\ dx_{s+3}\}$. 若 $O^*\neq 0$，则 $O^*\cap G\neq 0$. 因此存在 $j\notin\bigcup_{k=1}^{s}I_k$，使得 $g_{js+1}(x)\neq 0$. 不妨设 $g_{js+1}(x)\neq 0$ 的第一个分量不为零. 记 x_{s+1} 的第一个分量为 $\bar{x}_{s+1}$，即可把 x_{s+1} 分解为 $(\bar{x}_{s+1},\hat{x}_{s+1})$. 定义分布 $R_1=\ker\{dx_1,d\bar{x}_{s+1},\ dx_{s+3}\}$，则由引理 1 易知 $\{R_1,R_2^*,\cdots,R_s^*\}$ 满足(2)，(3)，即是解耦问题的一个解. 但由 R_1 的构造，显然有 $R_1\cap G\neq R_1^*\cap G$. 故 $R_1\neq R_1^*$. 所以 $(R_1^*,\cdots,R_s^*)$ 不唯一. 即证.

四、结　　论

本文将文献 [7] 中关于受控不变分布同伴集的参数化结果推广到了一类相容受控不变分布的相容同伴集的参数化上,并讨论了其性质. 在此基础上,本文讨论了非线性系统输入输出解耦反馈的刻划问题. 指出了以往文献中得到的满足各种条件的解耦反馈集只对方系统的 Morgan 问题成立,且正是一组相容能控性分布的相容同伴集. 对于一般的块解耦问题，本文给出了用一个相容同伴集就可完全确定所有解耦反馈的充要条件.

参　考　文　献

[1] Gilbert, E. G., The Decoupling of Multivariable Systems by State Variable Feedback, *SIAM J. Contr.*, **7**(1969), 50—64.

[2] Falb, P. L., and Wolovich, W. A., Decoupling in the Design and Synthesis of Multivariable Control Systems, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **12**(1967), 651—659.
[3] Ha, I. J., and Gilbert, E. G., A Complete Characterization of Decoupling Control Laws for a General Class of Nonlinear Systems, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **31**(1986), 823—830.
[4] Ha, I. J., The Standard Decomposed System and Noninteracting Feedback Control of Nonlinear Systems, *SIAM J. Contr., Optimiz.*, **26**(1988), 1235—1249.
[5] Grizzle, J. W., and Isidori, A., Block Noninteracting Control with Stability via Static State Feedback, *Math. Contr. Signals Syst.*, **2**(1989), 315—341.
[6] Krener, A. J., (Adf, G), (adf,g) and Locally (adf, g)-invariant and Controllability Distributions, *SIAM J. Contr. Optimiz.*, **23**(1985), 523—549.
[7] 夏小华,受控不变分布的同伴及 DDP 控制律的刻划问题,中国科学A辑, **23**(1993), 130—136.

PARAMETERIZATION OF DECOUPLING FEEDBACK LAWS OF CONTROL SYSTEMS

XIA XIAOHUA
(7th Research Division, Beijing Univ. of Aero. and Astro., Beijing 100083, *China)*

ABSTRACT

This paper generalizes the results of [7] on parameterization of the friend set of a controlled invariant distribution to the case of compatible friend set of compatible controlled invariant distributions that can arise as solutions to the noninteracting control problem of control systems. Based on the parameterization and its properties, this paper deals with the problem of characterizing the decoupling feedback laws of control systems, obtains necessary and sufficient conditions for the situation that a single compatible friend set determines the whole class of decoupling feedbacks. This result generalizes and justifies the related results obtained in previous literature. All results of the paper are valid for both linear and nonlinear systems, and are constructively verifiable.

Key words: control systems; noninteracting control; controlled invariant distributions; controllability distributions; compatibility.