第 19 卷 第 6 期　　自 动 化 学 报　　Vol. 19, No. 6
1993 年 11 月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　Nov., 1993

基于 Stackelberg 对策的两层多目标决策[1)]

盛昭瀚
（东南大学经济管理学院，南京　210018）

梁　梁　　　徐南荣
（中国科学技术大学管理系，合肥　230027）（东南大学经济管理学院）

摘　　要

本文研究了由 Stackelberg 对策所定义的两层多目标决策问题，利用锥极点的概念，对这一问题的可行域和解集给予较简洁的描述，并根据该问题的特性，提出了一种新的两层多目标决策的交互式算法，文末的算例表明了本文算法的可行性.

关键词： Stackelberg 对策，多目标决策，锥极点

一、前　　言

在具有递阶结构的大系统中，由于决策者的地位、目的不同，决策者做出的决策及其作用也是不同的. 在描述多人决策机制方面，对策论（Game Theory）提供了形式化的表述工具. 但对策论本身对许多现实问题作了较多的简化，为了克服这一不足，有些学者将其他一些决策方法与对策论思想相结合，建立了新的决策模型和方法[1—4]，基于 Stackelberg 对策理论的多层多目标决策模型就是这类理论模型之一.

多层决策的定量研究始于 70 年代初[1]，进入 80 年代后，已取得较多结果，其中以解决单目标问题方法最多，而关于多层多目标决策(特别是非线性问题)研究成果则较少.

由于多目标决策问题一般都涉及到决策者的偏好结构，所以多层多目标决策问题不仅涉及到目标函数和约束域，还要考虑到各级决策者的偏好，特别是因为经常出现上下级之间利益不一的情况，因此如果简单地把下级问题转化为上级约束，不仅会过多地加重上级的决策负担，而且可能不符合实际的决策过程.

本文在较深入地描述了两层多目标决策问题及有关可行解和解概念之后，依据非线性规划灵敏度分析理论和多目标决策的 Geoffrion 交互式方法，并根据下级可独立确定自己偏好和上级指定下级偏好两种情况，提出了求解两层多目标决策的新方法，由于该方法的基础仍是多目标决策方法中常见有效的加权法(或 ε-约束法)，并且对下级来讲，总可用灵敏度定理求出下级决策对上级决策的灵敏度，而上级总可以通过 Topkis-Veinott

本文于 1991 年 4 月 15 日收到.
1) 国家自然科学基金资助课题.

方法求得决策进一步的迭代方向，使显式或隐式价值函数得以改善．所以该方法对上下级在决策过程中采用方法的限制比较宽松，具有较好的灵活性与可操作性．

二、两层多目标决策模型的描述

记 P_L 为上级，P_F 为下级，$\boldsymbol{u}_L \in R^{n_L}$，$\boldsymbol{u}_F \in R^{n_F}$ 分别为上、下级决策变量，$\boldsymbol{F}_L \in R^{n_1}$、$\boldsymbol{F}_F \in R^{n_2}$ 为上、下级目标向量函数．

定义 2.1. 当 $\boldsymbol{u}_L^*$，$\boldsymbol{u}_F^*$ 的选取遵循如下规则时，称其为 P_L 与 P_F 的正向 Stackelberg 策略，即对于 P_L 所选定的每一个 $\boldsymbol{u}_L$，P_F 随之选择 $\boldsymbol{u}_F = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}_L)$，以使 $\boldsymbol{u}_F$ 为 P_F 的多目标决策的非劣解，这里 $\boldsymbol{T}$ 是 $R^{n_L} \to R^{n_F}$ 的映射，然后 P_L 再选 $\boldsymbol{u}_L^*$，使 $\boldsymbol{u}_L^*$ 为上级 P_L 的满意非劣解，而 $\boldsymbol{u}_F^* = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}_L^*)$．

基于以上正向 Stackelberg 策略决策过程，本文讨论的单下级两层多目标决策模型为

$$\text{(BLMOP)}\quad \mathrm{Min}\ \boldsymbol{F}_L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \triangleq (f_{L_1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\cdots,f_{Ln_1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))^T, \tag{2.1}$$

$$\text{且 } \boldsymbol{y} \text{ 解}\quad \mathrm{Min}\ \boldsymbol{F}_F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \triangleq (f_{F_1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\cdots,f_{Fn_2}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))^T, \tag{2.2}$$

$$\text{s. t. } \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \leqslant \boldsymbol{0}. \tag{2.3}$$

其中上级决策变量 $\boldsymbol{x} \in R^{n_L}$，下级决策变量 $\boldsymbol{y} \in R^{n_F}$，约束函数向量 $\boldsymbol{G} \in R^m$．

在此模型中，上级首先宣布策略 $\boldsymbol{x}$，该策略将影响约束域和下级目标函数．在此限制下，下级根据自己的偏好进行多目标决策，并确定相应策略 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})$，上级通过调整 $\boldsymbol{x}$，使之最终达到自己的满意解．

为了清楚地描述 BLMOP 的可行域和解集，这里引用锥极点的概念[5]．

定义 2.2. 设 D 为一非空集，若 $\boldsymbol{x} \in D$ 且 $\eta \geqslant 0$，有 $\eta\boldsymbol{x} \in D$，称 D 为锥．

易见 R^n 中的锥是射线集之并．

定义 2.3. 设 F,D 分别为 R^n 中的集与锥，称 $\hat{F}$ 是 F 中的锥极点，若不存在 $\tilde{F} \in F$，$\tilde{F} \neq \hat{F}$，使 $\hat{F} \in \tilde{F} + D$，并记 F 中的锥极点集为 $E_{xt}[F|D]$．

定义 2.4. 对给定的 $\bar{\boldsymbol{x}}$，若 $(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{y})$ 满足 $\boldsymbol{G}(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{y}) \leqslant \boldsymbol{0}$，且 $\boldsymbol{F}_F(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{y}) \in E_{xt}[\boldsymbol{F}_F(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{y})|R_+^{n_2}]$，这里 $R_+^{n_2} = \{\boldsymbol{z} \in R^{n_2} | \boldsymbol{z} \geqslant \boldsymbol{0}\}$，则称 $(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{y})$ 为 BLMOP 的可行解．

定义 2.5. 称 $(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*)$ 是 BLMOP 的解，若

1) $(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*)$ 是 BLMOP 的可行解；

2) $\boldsymbol{F}_L(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*) \in E_{xt}[\boldsymbol{F}_L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|R_+^{n_1}]$．

值得注意的是，即使 $\boldsymbol{F}_L$，$\boldsymbol{F}_F$ 与 $\boldsymbol{G}$ 均为由凸函数组成的向量函数，$E_{xt}[\boldsymbol{F}_L(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{y})|R_+^{n_2}]$ 是凸集，BLMOP 一般也是非凸规划，因此从总体上看，基于正向 Stackelberg 对策的 BLMOP 是约束中存在多目标参数规划的非凸多目标决策模型．

三、非线性规划的灵敏度分析

在 BLMOP 问题的决策过程中，上级需要了解下级的决策反应，至少应了解在当前

的迭代点 x^q 处，下级决策对上级的灵敏度．例如 $\frac{dy}{dx}\big|_{x=x^q}$ 的信息，又因为求解多目标问题常转化为求解单目标辅助问题，故本节简略介绍单目标决策的灵敏度分析的有关结论．

考虑

$$P_\varepsilon:\quad \mathrm{Min}\, f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\varepsilon}), \tag{3.1}$$

$$\text{s.t.}\quad g_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\varepsilon}) \leqslant 0,\ i=1,\cdots,m, \quad h_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\varepsilon})=0,\ j=1,\cdots,p. \tag{3.2}$$

其中 $\boldsymbol{x}\in R^n$，$\boldsymbol{\varepsilon}\in R^k$，$\boldsymbol{\varepsilon}$ 为参数向量． P_ε 的 Lagrange 函数定义为

$$L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{w},\boldsymbol{\varepsilon}) = f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\varepsilon}) + \sum_{i=1}^{m} u_i g_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\varepsilon}) + \sum_{j=1}^{p} w_j h_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\varepsilon}).$$

其中 $\boldsymbol{u}=(u_1,\cdots,u_m)^T$，$\boldsymbol{w}=(w_1,\cdots,w_p)^T$．

定理 3.1[6]．若如下条件成立

1）在 $(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{\varepsilon})$ 的邻域内，P_ε 的目标函数和所有的约束函数是二次可微的；

2）在 $\boldsymbol{x}^*$ 处，P_ε 的二阶局部极小化充分条件成立，相应的 Lagrange 乘子为 $\boldsymbol{u}^*$，$\boldsymbol{w}^*$；

3）$\nabla_x g_i(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{\varepsilon})$，$i\in I \triangleq \{i \mid g_i(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{\varepsilon})=0\}$ 和 $\nabla_x h_j(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{\varepsilon}),\forall j$ 是线性独立的；

4）若 $g_i(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{\varepsilon})=0$，则 $u_i^*>0$．

则有如下结论：

a）$\boldsymbol{x}^*$ 是 P_ε 的一个局部孤立极小点，相应的 Lagrange 乘子 $\boldsymbol{u}^*,\boldsymbol{w}^*$ 是唯一的．

b）对 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 邻域中的 $\boldsymbol{\varepsilon}'$，存在唯一连续可微向量函数 $[\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\varepsilon}'),\ \boldsymbol{u}(\boldsymbol{\varepsilon}'),\ \boldsymbol{w}(\boldsymbol{\varepsilon}')]^T$ 满足 $P_{\varepsilon'}$ 局部极小点二阶充分条件，且 $[\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\varepsilon}),\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\varepsilon}),\ \boldsymbol{w}(\boldsymbol{\varepsilon})]^T=[\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{u}^*,\boldsymbol{w}^*]^T$，这里 $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\varepsilon}')$ 是 $P_{\varepsilon'}$ 的唯一局部极小点，相应的 Lagrange 乘子为 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\varepsilon}'),\boldsymbol{w}(\boldsymbol{\varepsilon}')$．

文[6]还指出，若定理 3.1 成立，令 $\boldsymbol{z}(\boldsymbol{\varepsilon}')=[\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\varepsilon}'),\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\varepsilon}'),\boldsymbol{w}(\boldsymbol{\varepsilon}')]^T$，则有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{z}(\boldsymbol{\varepsilon})}{\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}}\Big|_{\varepsilon=\varepsilon'} = [M(\boldsymbol{\varepsilon})]^{-1}N(\boldsymbol{\varepsilon})\big|_{\varepsilon=\varepsilon'}.$$

其中

$$M(\boldsymbol{\varepsilon}') = \left[\begin{array}{cccc} \nabla^2_{xx}L & \nabla g_1\cdots\cdots\nabla g_m & & \nabla h_1\cdots\cdots\nabla h_p \\ -u_1\nabla^T g_1 & -g_1 & 0 & \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ -u_m\nabla^T g_m & 0 & -g_m & \\ \nabla h_1 & & & \\ \vdots & & 0 & 0 \\ \nabla h_p & & & \end{array}\right]_{\varepsilon=\varepsilon'}. \tag{3.3}$$

$$N(\boldsymbol{\varepsilon}') = \left[-\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}}(\nabla_x L),\ u_1\frac{\partial g_1}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}},\cdots u_m\frac{\partial g_m}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}},\ \frac{-\partial h_1}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}},\cdots\frac{-\partial h_p}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}}\right]^T_{\varepsilon=\varepsilon'}. \tag{3.4}$$

在本文的 BLMOP 问题中，应用以上所述的灵敏度分析方法，可以获得当上级决策为 x^q 时，下级决策对上级决策的灵敏度 $\frac{dy}{dx}\big|_{x=x^q}$，并利用该信息找出下一个迭代点而完

成整个迭代过程.

四、交互式算法与算例

本文在设计 BLMOP 问题的算法时,考虑到

第一,由于上级决策总是非凸规划,因此选择了基于 Topkis-Veinott 可行方向法[7]为核心的 Geoffrion 法. Topkis-Veinott 算法可以求解非凸规划. Geoffrion 方法则是一种线性化多目标交互式决策方法,故迭代过程简单、迅速[8].

第二,由于下级是多目标参数规划,若记 $\boldsymbol{\theta} \in R^{n_2}$ 为下级决策者的偏好系数,则下级决策为 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta})$. 这里的偏好系数 $\boldsymbol{\theta}$ 一般表现为加权系数、目标的 ε 约束等. 从决策机理上分,可能是由下级自己确定,也可能是由上级指定. 至于如何合理和恰当地确定该系数,仍然是在问题的实际背景及各种先验信息基础上,通过 α-法、均差排序法、判断矩阵法等获得. 但不论哪一种方法,算法的最终目的都是寻找问题的满意非劣解. 至于上下级决策者之间出于各自的目的互相隐瞒情况或制造虚假现象,从而表现为"信息不完全"或"相互冲突",则问题就不再是基于 Stackelberg 了.

下面讨论两种情况:

1) 由下级确定 $\boldsymbol{\theta}$ 值的迭代算法

为简单起见,设下级多目标规划为凸的, $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1,\cdots,\theta_{n_2})^T$, $\sum_{i=1}^{n_2} \theta_i = 1$, 则下级规划的评价函数问题为

$$\text{Min} \sum_{i=1}^{n_2} \theta_i f_{Fi}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}), \tag{4.1}$$

$$\text{s. t. } g_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \leqslant 0,\ j = 1,\cdots,m. \tag{4.2}$$

相应的 Lagrange 函数为

$$L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{u}) = \sum_{i=1}^{n_2} \theta_i f_{Fi}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \sum_{j=1}^{m} u_j g_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}).$$

BLMOP 具体步骤如下:

STEP 1. 选定初值 $\boldsymbol{x}^q \in X = \{\boldsymbol{x} \mid \exists \boldsymbol{y},\ 使\ \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \leqslant \boldsymbol{0}\}$, $q = 1$, 在给定 $\boldsymbol{x}^q$ 情况下,下级求解(4.1),(4.2)式,并记最优解为 $\boldsymbol{y}^q$, 相应的 Lagrange 乘子为 $\boldsymbol{u}^q$.

STEP 2. 利用(3.3),(3.4)式,计算 $M(\boldsymbol{x}^q), N(\boldsymbol{x}^q)$, 并求出 $[M(\boldsymbol{x}^q)]^{-1}N(\boldsymbol{x}^q)$, 得到 $\left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^q}$, 记为 $\nabla_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}^q)$.

STEP 3. 上级决策者给出在$(\boldsymbol{x}^q,\boldsymbol{y}^q)$处的无差异置换率 ω_i^q, $i = 1,\cdots,n_1$, 并求解

$$\text{Min } \sigma$$

$$\text{s. t. } \left[\sum_{i=1}^{n_1} \omega_i^q(\nabla_{\boldsymbol{x}} f_{Li}(\boldsymbol{x}^q,\boldsymbol{y}^q) + \nabla_{\boldsymbol{y}} f_{Li}(\boldsymbol{x}^q,\boldsymbol{y}^q) \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}^q))\right]^T \boldsymbol{\rho} \leqslant \sigma,$$

$$g_j(\boldsymbol{x}^q,\boldsymbol{y}^q) + [\nabla_{\boldsymbol{x}} g_j(\boldsymbol{x}^q,\boldsymbol{y}^q) + \nabla_{\boldsymbol{y}} g_j(\boldsymbol{x}^q,\boldsymbol{y}^q)\nabla_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}^q)]^T \boldsymbol{\rho} \leqslant \sigma,$$

$$\boldsymbol{\rho} = (\rho_1,\cdots,\rho_{n_L}), -1 \leqslant \rho_k \leqslant 1, k = 1,\cdots,n_L, j = 1,\cdots,m.$$

记此规划问题的最优解为 $(\sigma^q,\boldsymbol{\rho}^q)$.

STEP 4. 求

$$\bar{t}=\sup\{t\,|\,g_j(\boldsymbol{x}^q+t\boldsymbol{\rho}^q,\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}^q+t\boldsymbol{\rho}^q))\leqslant 0,\ j=1,\cdots,m\},$$

由于 $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})$ 无法显式表达，可采用如下的试探法：

STEP 4.1. 选择适当的 $\Delta t>0$，记 $\boldsymbol{x}^{kq}=\boldsymbol{x}^q+k\Delta t\boldsymbol{\rho}^q$，$k=1$；

STEP 4.2. 求解下级决策

$$\mathrm{Min}\sum_{i=1}^{n_2}\theta_i f_{Fi}(\boldsymbol{x}^{kq},\boldsymbol{y}),$$

$$\text{s. t. } g_j(\boldsymbol{x}^{kq},\boldsymbol{y})\leqslant 0,\ j=1,\cdots,m.$$

若存在最优解，记为 $\boldsymbol{y}^{kq}$，$k=k+1$，转 STEP 4.1，否则取 $\bar{t}=(k-1)\Delta t$，转 STEP 5.

STEP 5. 在 $[0,\bar{t}]$ 中选择 $t_l=l\cdot\Delta t$，$l=1,\cdots,k-1$，对应的上、下级决策为 $\boldsymbol{x}^{lq}$，$\boldsymbol{y}^{lq}$，$l=1,\cdots,k-1$，并由上级决策者从中选取使上级的隐式效益函数值最大的点，记为 $(\boldsymbol{x}^{q+1},\boldsymbol{y}^{q+1})$.

STEP 6. 若 $q>1$，且

$$\frac{[\omega_1^q,\cdots,\omega_{n_1}^q]}{[w_1^1,\cdots,w_{n_1}^1]}\frac{[\boldsymbol{F}_L(\boldsymbol{x}^{q+1},\boldsymbol{y}^{q+1})-\boldsymbol{F}_L(\boldsymbol{x}^q,\boldsymbol{y}^q)]^T}{[\boldsymbol{F}_L(\boldsymbol{x}^2,\boldsymbol{y}^2)-\boldsymbol{F}_L(\boldsymbol{x}^1,\boldsymbol{y}^1)]^T}<\alpha,$$

则迭代停止，BLMOP 问题的满意非劣解为 $\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{x}^{q+1}$，$\boldsymbol{y}^*=\boldsymbol{y}^{q+1}$；否则 $q=q+1$，返回 STEP2，这里 α 为预先给定的数.

说明. 借助上级目标函数向量的效益函数概念，若令 Δ^q 表示效益函数在第 q 次迭代时的近似改进值，则有

$$\frac{\Delta^q}{\Delta^1}=\frac{(\omega_1^q,\cdots,\omega_{n_1}^q)}{(w_1^1,\cdots,w_{n_1}^1)}\frac{[\boldsymbol{F}_L(\boldsymbol{x}^{q+1},\boldsymbol{y}^{q+1})-\boldsymbol{F}_L(\boldsymbol{x}^q,\boldsymbol{y}^q)]^T}{[\boldsymbol{F}_L(\boldsymbol{x}^2,\boldsymbol{y}^2)-\boldsymbol{F}_L(\boldsymbol{x}^1,\boldsymbol{y}^1)]^T}.$$

于是可以根据此式右端的大小来判断迭代过程的收敛速度和实际效果.

另外，在 STEP 4 中，一开始可将 Δt 选得大一些，当求得 $\bar{t}$ 后，若想得到更精确的 $\bar{t}'$，可以 $\bar{t}'$ 为新起点，选 $\Delta t'<\Delta t$ 进一步求解.

2）由上级确定 $\boldsymbol{\theta}$ 值的迭代算法

如在 BLMOP 问题中，上级的某些目标与下级的某些有利益上的不一致，而下级偏好又侧重那些与上级有利益矛盾的目标，就会较大地损害上级利益，为了尽可能避免出现这一情况，须由上级来调整下级的偏好结构.

例如下级多目标规划为凸且用加权法求解下级决策非劣解时，若记 $\boldsymbol{\phi}=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta})$，则下级决策可表示成 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}(\boldsymbol{\phi})$，而整个算法与情况（1）基本相同，即可得到 BLMOP 问题的满意非劣解.

算例 1.（由下级确定偏好系数 θ）.

$\mathrm{Min}[-2x_1-y_1x_2,4y_2x_1-x_2]^T$，且 y_1,y_2 解

$$\min(y_1,x_1y_2)^T,$$

$$\text{s.t. } y_1\leqslant 0,\ y_1^2x_2^2-y_2\leqslant 0,$$

$$0.1\leqslant x_1\leqslant 0.5,\ 0.1\leqslant x_2\leqslant 0.6,\ x_1+x_2\geqslant 0.7.$$

易求得

$$M(x^q)=\begin{bmatrix} 2u_1^q(x_2^q)^2 & 0 & 2y_1^q(x_2^q)^2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -2u_1^q y_1^q(x_2^q)^2 & u_1^q & -(y_1^q x_2^q)^2+y_2^q & 0 \\ -u_2^q & 0 & 0 & -y_1^q \end{bmatrix},$$

$$N(x^q)=\begin{bmatrix} 0 & -0.5 & 0 & 0 \\ -4y_1^q u_1^q x_2^q & 0 & 2u_1^q x_2^q(y_1^q)^2 & 0 \end{bmatrix}^T.$$

取 $x_1^1=x_2^1=0.4$，$\Delta t=0.05$，$\alpha=0.1$，下级决策者确定的偏好系数 $\theta=0.5$，上级的效益函数用 $\frac{1}{2}(f_{L_1}+f_{L_2})$ 模拟，$\omega_1^q=\omega_2^q=1$，计算结果如表 1：

表 1

q	x		y		F_L		F_F	
1	0.4	0.4	−7.8125	9.7656	2.3250	15.2249	−7.8125	3.9062
2	0.4613	0.4945	−4.4325	4.8044	1.2692	8.3705	−4.4325	2.2162
3	0.4778	0.5056	−4.0936	4.2838	1.1141	7.6815	−4.0936	2.0468
4	0.4889	0.5627	−3.2345	3.3032	0.8422	5.8971	−3.2345	1.6149
5	0.4915	0.5877	−2.9453	2.9962	0.7479	5.3028	−2.9453	1.4726

算例 2. 问题同算例 1，只是 θ 值由上级确定，于是 $\phi=(x_1,x_2,\theta)$，$M(x^q,\theta^q)$ 同算例 1，而

$$N(x^q,\theta^q)=\begin{bmatrix} 0 & -(1-\theta^q) & 0 & 0 \\ -4y_1^q u_1^q x_2^q & 0 & 2u_1^q x_2^q(y_1^q)^2 & 0 \\ -1 & x_1^q & 0 & 0 \end{bmatrix}^T.$$

各初值与算例 1 同，结果如表 2：

表 2

q	x_1	x_2	θ	y_1	y_2	f_{L1}	f_{L2}	f_{F1}	f_{F2}
1	0.4	0.4	0.5	−7.8125	9.7656	2.3250	15.2249	−7.8125	3.9062
2	0.4775	0.5328	0.0740	−0.2947	0.0235	−0.7979	−0.4879	−0.2947	0.0112
3	0.4832	0.5433	0.0430	−0.1559	0.0710	−0.8916	−0.5292	−0.1559	0.0035

比较两表中的结果，可以发现下级的偏好系数对上、下级影响都较大。实际上，算例 2 中下级的第一个目标与上级的目标有冲突。因此若完全由上级来确定下级的偏好系数时，必然要将下级的第一个目标作用降到最低程度，即减少 θ 值。

为了避免上述不尽合理的情况发生，较为合适的方法应是由上、下级共同协商来确定下级的偏好系数。例如记 $\bar{\theta}$ 为上级确定的值，$\underline{\theta}$ 为下级确定的值，则可取 $\lambda_i=i\,\frac{1}{l}$，$i=1,2,\cdots,l$，$\lambda_0=0$，并令

$$\theta^i=\bar{\theta}-\lambda_i(\bar{\theta}-\underline{\theta}),\quad i=0,1,\cdots,l.$$

再分别求解以 $\phi^i=(x,\theta^i)$ 为参数的多目标规划，得到的解记为 $x^i, i=0,1,\cdots,l$，最后经上、下级协商后从中选出 BLMOP 的满意非劣解。

参 考 文 献

[1] 唐大宏、陈珽，多层次决策问题算法综述，控制与决策，5(1989)，49—56.

[2] Zangwill, W.T. and Garcia, C.B., Equilibrium Programming: the Path-Following Approach and Dynamics, *Mathematical Programming*, **21**(1981), 262—289.
[3] Shimizu, K. and Alyoshi, E., Hierarchical Multi-objective Decision System for General Resource Allocation Problems, *J. of Optimization and Applications*, **35**(1981), (4),517—533.
[4] Shimizu, K. and Alyoshi, E., A New Computational Method for Stackelberg and Min-Max Problems by Use of a Penalty Method, *IEEE Trans. Auto. Contr.*, **AC-26**(1981), 460—466.
[5] Yu, P.L., Cone Convexity, Cone Extreme Points, and Nondominated Solutions in Decision Problems with Multiobjectives, *J. of Optimization Theory and Applications*, **14**(1974), (3),319—377.
[6] Fiacco, A.V., Sensitivity Analysis for Nonlinear Programming Using Penalty Methods, *Mathematical Programming*, **10**(1976), 287—311.

BILEVAL AND MULTIOBJECTIVES DECISION MAKING WITH STACKELBERG GAME

Sheng Zhaohan
(*Economics and Management College, Southeast University, Nanjing* 210018 *China*)

Liang Liang
(*Department of Managevment. China University of Science and Technology, Hefei* 230027)

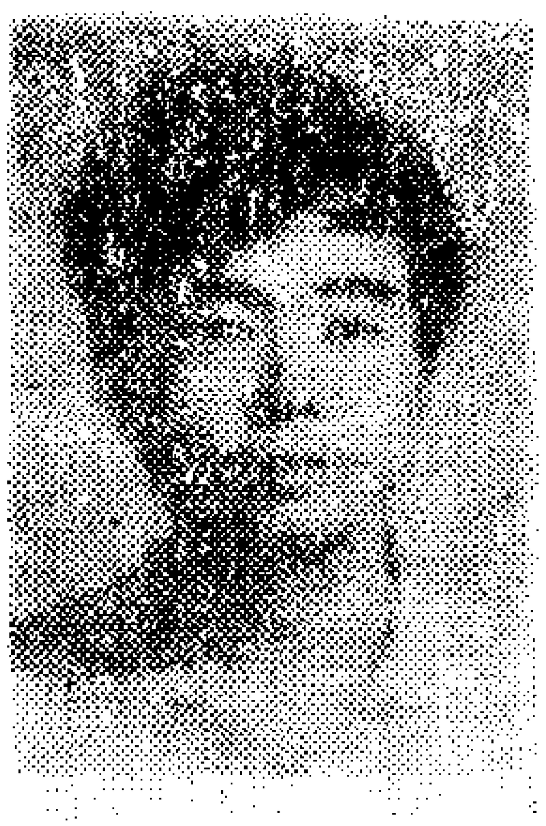
Xu Nanrong
(*Economics and Management College. Southeass University, Nanjing* 210018)

Abstract

The problems of bileval and multiobjective decision making (BLMOP) which is defined by Stackalberg game are studied. Its feasible domain and solution set are described via the cone extreme points. Based on the discussion of its behavior of it, this paper presents a new interactive BLMOP algorithm. Examples show the feasibility of the proposed algorithm.

Key words: stackelberg game; multiobjective decision cone extreme points.

盛昭瀚　48 岁　教授　东南大学经济管理学院院长．1967 年毕业于南京大学数学系．已有《随机系统分析引论》等三本学术著作出版，并在国内外学术刊物上发表四十余篇论文．目前主要从事决策理论与方法、非线性时间序列稳定性及广义模型方面的研究．



梁 梁 中国科学技术大学管理系副教授，系副主任。1982 年于安徽工学院自控系获学士学位，1988 年于合肥工业大学计算机系获硕士学位，1991 年于东南大学管理学院获博士学位。已在国内外学术期刊上发表十几篇论文，目前研究领域是制造系统的决策理论与实践的研究。

徐南荣 1952 年毕业于南京大学工学院电机系。现任东南大学教授；博士生导师。长期从事自动控制和系统工程学科的教学与科研工作。主要研究领域为自适应控制、系统辨识、决策分析和决策支持系统。

（上接 755 页）

6. 文末附英文文摘。文摘包括英文标题、作者姓名和工作单位、文章摘要、关键调整（和中文文摘一致）。论文文摘一般不超过 250 词，短文 150 词左右。

7. 来稿务必用16 开 20×20 标准绿格稿纸誊写清楚。打印稿亦应按此规格每页打 400 字。外文摘要及外文参考文献请间行打字。

六、作者必须对稿件内容的真实性和可靠性负责。

七、本编辑部在收稿后一周内通知作者，并在稿件修订过程中与作者保持联系。如果作者在来稿中不作特殊说明，编辑部将只与第一作者联系。

八、已被本刊接受发表的稿件，按审查意见和“作者加工稿件须知”修改后一式两份寄编辑部。其中按论文类发表的稿件尚需附所有作者的近照（按护照规格）和 120 字的作者简介。

九、来稿刊登与否由编委会最后审定。编委会有权对来稿作适当文字删改或退请作者修改。来稿一经发表，按篇酌致稿费，并赠送30本抽印本。经审查后不拟刊登的文稿，一般情况在半年内退还。

十、来稿（一式两份）请寄北京市中关村中国科学院自动化研究所转《自动化学报》编辑部，邮政编码 100080。