第 19 卷 第 6 期　　自 动 化 学 报　　Vol. 19, No. 6
1993 年 11 月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　Nov., 1993

研究简报

随机串行生产线稳态性能分析[1)]

宋东平
（浙江大学工业控制研究所，杭州 310027）

涂菶生
（南开大学计算机与系统科学系，天津 300071）

关键词： 串行生产线，刚性连接，极大代数.

一、两台机器的情形

本文讨论了加工时间为一般概率分布刚性连接的随机串行生产线的稳态特性. 对两台机器的情形，给出了稳态性能指标的表达式；对多台机器的情形，得到了稳态生产率的一个估计区间.

考虑两台机器的串行生产线，如图 1 所示. 机器 M_1 与 M_2 之间无存贮单元. 设工件在 M_1, M_2 上的加工时间服从随机变量为 ξ, η 的概率分布. 工件 J_k 离开 M_i 的时刻

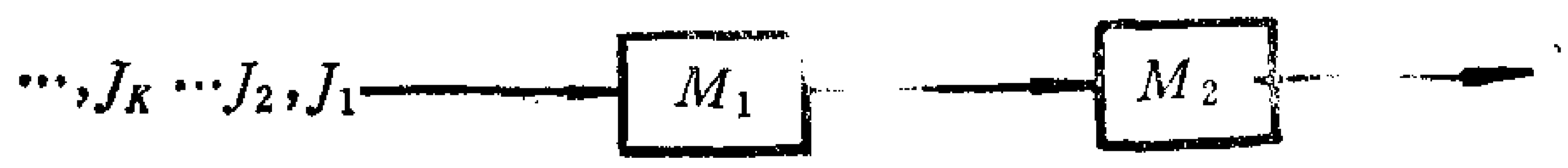

图 1　两台机器的生产线

记为 $x_i[k]$. J_k在 M_1, M_2 上的加工时间分别记为 ξ_k, η_k，把它们看作随机变量，则有：$\xi_k - \xi; \eta_k - \eta, k \geqslant 1$. 系统在极大代数意义下的状态方程为[1]

$$\begin{pmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_k & e \\ \xi_k \otimes \eta_k & \eta_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1[k-1] \\ x_2[k-1] \end{pmatrix}. \tag{1}$$

其中初值条件为 $\boldsymbol{x}[0] = (x_1[0], x_2[0])^T$.

定理 1. 系统 (1) 的状态解为

$$x_1[k] = (\xi_k \oplus \eta_{k-1}) \otimes \cdots \otimes (\xi_2 \oplus \eta_1) \otimes (\xi_1 \otimes x_1[0] \oplus x_2[0]),$$
$$x_2[k] = (\xi_k \oplus \eta_{k-1}) \otimes \cdots \otimes (\xi_2 \oplus \eta_1) \otimes (\xi_1 \otimes x_1[0] \oplus x_2[0]) \otimes \eta_k.$$

定义. 若极限 $\lim\limits_{N \to \infty} E \dfrac{x_i[N]}{N}$ 存在，则称 M_i 能达到稳态. 此极限的倒数称为 M_i 的稳态生产率，记为 φ_i. 若所有机器都能达到稳态，则称系统能达到稳态.

定理 2. 系统 (1) 能达到稳态，且有

$$\varphi_1 = \varphi_2 = 1/E\max\{\xi, \eta\}.$$

本文于 1991 年 10 月 11 日收到.
1) 本文受国家自然科学基金和 863 高技术 CIMS 主题的资助.

定义. 若极限 $\lim\limits_{N\to\infty}E(x_2[N]-x_1[N-1])$ 存在，则称此极限为工件的稳态流经时间，记为 L. 设 $S_1[N]=\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_N$; $S_2[N]=\eta_1+\eta_2+\cdots+\eta_N$, 若极限 $\lim\limits_{N\to\infty}ES_i[N]/Ex_i[N]$ 存在，则称之为 M_i 的稳态利用率，记为 ρ_i.

定理 3. 系统 (1) 的稳态流经时间 L 和稳态利用率 ρ_i 都存在，且

$$L=E\max\{\xi,\eta\}+E\eta,$$
$$\rho_1=E\xi/E\max\{\xi,\eta\};\rho_2=E\eta/E\max\{\xi,\eta\}.$$

二、多台机器的情形

考虑有 n 台机器组成的串行生产线，各机器之间无存贮单元. 设工件在 M_i 上的加工时间服从随机变量为 p_i 的分布，$x_i[k]$ 为 J_k 离开 M_i 的时刻. J_k 在 M_i 上的加工时间记为 $p_i[k]$. 则系统在极大代数下的状态方程为[1]

$$\begin{pmatrix}x_1[k]\\x_2[k]\\\vdots\\x_n[k]\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_1[k] & e & & \mathscr{E}\\ p_1[k]p_2[k] & p_2[k] & e\ \ddots & \\ \vdots & & \ddots & e\\ p_1[k]\cdots p_n[k] & p_2[k]\cdots p_n[k] & & \cdots p_n[k]\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1[k-1]\\x_2[k-1]\\\vdots\\x_n[k-1]\end{pmatrix}. \tag{2}$$

上式中的乘法是指极大代数意义下的⊗.

定理 4. 记 $\alpha=x_1[n]\oplus x_2[n-1]\oplus\cdots\oplus x_n[1]$; $\beta_{n+k}=p_1[n+k]\oplus p_2[n+k-1]\oplus\cdots\oplus p_n[k+1],k>0$. 则系统 (2) 满足

$$x_i[n+k-i+1]\leqslant\alpha\otimes\beta_{n+k}\otimes\cdots\otimes\beta_{n+1},1<i\leqslant n,k>0.$$

定理 5. 对系统 (2)，若某台机器 M_i 能达到稳态，则系统也能达到稳态，且有

$$\lim_{N\to\infty}E\frac{x_1[N]}{N}=\lim_{N\to\infty}E\frac{x_2[N]}{N}=\cdots=\lim_{N\to\infty}E\frac{x_n[N]}{N}.$$

定理6. 对系统 (2)，若存在 i，使得 $\lim\limits_{N\to\infty}E\dfrac{x_i[N]}{N}=a$, 则有

$$\max\{E\max\{p_i,p_{i+1}\}\,|\,i=1,2,\cdots,n-1\}\leqslant a\leqslant E\max\{p_1,\cdots,p_n\}.$$

三、例 子

例 1. 对两台机器的系统，设 $\xi—\lambda e^{-\lambda t},\eta—\mu e^{-\mu t}$. 则由定理 2 可得系统的稳态指标为

$$\frac{1}{\varphi_1}=\frac{1}{\varphi_2}=\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}-\frac{1}{\lambda+\mu},\quad L=\frac{1}{\lambda}+\frac{2}{\mu}-\frac{1}{\lambda+\mu},$$

$$\rho_1=\mu(\lambda+\mu)/\lambda^2+\mu^2+\lambda\mu,\quad \rho_2=\lambda(\lambda+\mu)/\lambda^2+\mu^2+\lambda\mu.$$

例 2. 若 $p_i—\lambda_i e^{-\lambda_i t},i=1,2,\cdots,n$. 则易得

$$E\max\{p_1,p_2,\cdots,p_n\}=\frac{1}{\lambda_1}+\cdots+\frac{1}{\lambda_n}-\sum_{i\neq j}\frac{1}{\lambda_i+\lambda_j}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n}.$$

设 $n=3$. 如果系统有稳态生产率 φ，对如下参数① $\lambda_1=2,\lambda_2=\lambda_3=10$;② $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=4$，由定理 6 可得 φ 的一个估计区间

(1) $1.89<\varphi<1.95$, (2) $2.18<\varphi<2.67$.

参　考　文　献

[1] 涂奉生，乞敬换，具有有限存贮器的生产线的状态方程描述与性能分析. 系统科学与数学，**11**(1991)，(2).

STEADY-STATE PERFORMANCES ANALYSIS OF SERIAL STOCHASTIC PRODUCTION LINES

Song Dongping

(Institute of Industrial Control. Zhejiang University, Hangzhou 310027, *China)*

Tu Fengsheng

(Dept. of Computer and System Science. Nankai University. Tianjin, 300071)

Key words: serial production line; stiff-connected; max-algebra.

《自动化学报》征稿简则

一、《自动化学报》是中国自动化学会主办的高级学术期刊，每年出版六期；本刊的英文翻译版在美国试行出版，每年四期.

二、本刊刊载自动化科学与技术领域的高水平学术论文和科学研究成果. 内容包括: 1.自动控制理论; 2.系统理论与系统工程; 3.自动化技术及其在国民经济各领域中的创造性应用; 4.自动化系统计算机辅助技术; 5.机器人与自动化; 6.人工智能与智能控制; 7.自动控制系统中的新概念、新原理、新方法、新设计; 8.信息理论与信息处理技术; 9.自动化学科领域的其它重要问题.

三、本刊发表的文章以论文和短文两种形式为主，并不定期地发表综述性文章和书刊评论、问题研讨、读者来信、国内外学术活动信息等.

四、本刊原则上只发表原始性稿件，但不排除刊登已在国内外学术会议上发表或准备发表的优秀论文的可能性(对于此种情况，作者必须如实说明). 请勿一稿多投.

五、来稿格式及要求

1.来稿要求论点明确、论证充分、语言通顺、文字简练. 一般定稿时论文不超过6000字;短文不超过3000字; 其它形式文章视具体内容由编辑部决定.

2.稿件首页应包括下列内容: 标题;作者姓名、工作单位、详细通讯地址(包括邮政编码)、电话号码;中文摘要;关键词.

3.论文和短文的文章结构请参照本刊最近发表的文章格式. 论文摘要必须在200字以内;短文100字左右. 文中非标准缩写词(中文或英文)须在首次出现时定义清楚; 公式、图、表均须分别用阿拉伯数字全文统一编号. 插图应贴于稿纸并附在文末.

4.计量单位一律用国际单位，即 SI 单位制. 名词术语必须规范化、标准化，前后一致. 外国人名、地名、书刊名称除已通用者外一律用原文.

5.参考文献按文中出现的先后次序排列，文献如为期刊，按[编号]，作者(姓在前如 Wiener. L. N. Kalman. R. E. and Wang, H. 等)，文章题目，期刊名(外文可根据国际惯例使用缩写词)，卷号(年份)，期号，页码顺序编排. 文献如为图书，则按[编号]，作者(姓在前)，书名，版次(初版不写)，出版者，地点，年份，页码顺序排列. 文中未引用的文献不得列入参考文献栏目.

(下转698页)