第19卷 第6期　自 动 化 学 报　Vol. 19, No. 6
1993 年11月　ACTA AUTOMATICA SINICA　Nov., 1993

短　文

具有同一交工期和指数加工时间的单机随机调度1)

谢益民　　郑应平
(中国科学院自动化所，北京 100080)

摘　　要

本文研究具有同一交工期和指数加工时间、目标函数是期望的未完工费用的单机随机调度问题，即 $1|X_j\sim\exp(\lambda_j),d|E(\Sigma IC_j)$. 工件的最优排序是按 $IC_i\lambda_i$ 非升的排序，得到了排序可交换性及未完工费用的等价性等附加结果.

关键词: 随机调度，单机调度，最优排序，指数分布.

一、引　　言

本文研究这样一类排序问题: k 个工件要在一台机器上加工. 工件$j(j=1,\cdots,k)$在机器上的加工时间 x_j 是独立的随机变量，并服从参数为 λ_j 的指数分布. 所有工件都必须在同一交工期 d 之前完工，未按期完工的工件将招致未完工费用，用 $IC_j(j=1,\cdots,k)$ 表示工件 j 的未完工费用. 假设机器不会空闲，同一时间至多只能加工一个工件，且工件的加工过程不允许中断. 目的是寻求工件的加工次序，使得所有工件总的期望的未完工费用最小，即

$$\min_{l\in L}\sum_{j=1}^{k}IC_jP_r(C_j(l)>d). \tag{1}$$

式中 L 表示 k 个工件所有可能的排序，$C_i(l)$ 表示排序 $l\in L$ 中第 i 个工件的完成时间. 借鉴 Graham 等[1]对确定性排序问题的表示法，本文用数学模型 $1|X_j\sim\exp(\lambda_j),d|E(\sum I(j)$ 表示上述单机随机调度问题.

二、主 要 结 果

令工件 j 的加工时间 x_j 的概率密度函数为

$$f_j(x)=\lambda_je^{-\lambda_jx},\ j=1,\cdots k,\ x\geqslant 0, \tag{2}$$

本文于1991年10月22日收到.
1) 本文得到863高技术 CIMS 主题资金支持.

式中 λ_j 是已知的常数. 假设机器从 $t=0$ 开始加工第一个工件,则有

$$C_j(l)=C_{j-1}(l)+X_j,\ j=1,\cdots k. \tag{3}$$

其中 $C_0(l)=0$, 排序 l 不妨设为

$$l=(1,\cdots,i-1,i,i+1,\ i+2,\cdots,k). \tag{4}$$

由概率论知识不难求得第 i 个工件未按期完工的概率为

$$P_i=P_r(C_i(l)>d)=\sum_{j=1}^{i}\frac{e^{-\lambda_j d}}{\prod\limits_{\substack{m=1\\ m\neq j}}^{i}\left(1-\frac{\lambda_j}{\lambda_m}\right)}. \tag{5}$$

定理 1. 对于模型为 $I|X_j\sim \exp(\lambda_j),d|E(\sum IC_j)$ 的单机随机调度,其最优的工件排序是按 $IC_j\lambda_j$ 非升的排序.

证明. 令

$$l'=(1,\cdots,i-1,i+1,i,i+2,\cdots,k), \tag{6}$$

排序 l' 是从排序 l 中通过互换第 i 和第 $i+1$ 个工件的位置而其它工件位置不变得来的. 令 $\cos t(l)$ 和 $\cos t(l')$ 分别表示两排序 l 和 l' 总的期望的未完工费用. 由于

$$C_j(l)=C_j(l'),j=1,\cdots,i-1,i+2,\cdots,k, \tag{7}$$

又因 $C_{i+1}(l)=C_{i-1}(l)+X_i+X_{i+1},C_i(l')=C_{i-1}(l')+X_{i+1}+X_i$,故有

$$C_{i+1}(l)=C_i(l'), \tag{8}$$

利用 (7) 式,从 (1) 式可得

$$\begin{aligned}\cos t(l)-\cos t(l')&=IC_i[P_r(C_i(l)>d)-P_r(C_i(l')>d)]\\&\quad+IC_{i+1}[P_r(C_{i+1}(l)>d)-P_r(C_{i+1}(l')>d)].\end{aligned} \tag{9}$$

利用 (5) 式可得

$$P_r(C_i(l)>d)=\sum_{j=1}^{i-1}\frac{e^{-\lambda_j d}}{\prod\limits_{\substack{m=1\\ m\neq j}}^{i-1}\left(1-\frac{\lambda_j}{\lambda_m}\right)\left(1-\frac{\lambda_j}{\lambda_i}\right)}+\frac{e^{-\lambda_i d}}{\prod\limits_{m=1}^{i-1}\left(1-\frac{\lambda_i}{\lambda_m}\right)}\triangleq P_m, \tag{10}$$

$$P_r(C_{i+1}(l')>d)=\sum_{j=1}^{i-1}\frac{e^{-\lambda_j d}}{\prod\limits_{\substack{m=1\\ m\neq j}}^{i-1}\left(1-\frac{\lambda_j}{\lambda_m}\right)\left(1-\frac{\lambda_j}{\lambda_{i+1}}\right)}+\frac{e^{-\lambda_{i+1} d}}{\prod\limits_{m=1}^{i-1}\left(1-\frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_m}\right)}\triangleq P_n, \tag{11}$$

$$\begin{aligned}P_r(C_{i+1}(l)>d)&=P_r(C_i(l')>d)\\&=\sum_{j=1}^{i-1}\frac{e^{-\lambda_j d}}{\prod\limits_{\substack{m=1\\ m\neq j}}^{i-1}\left(1-\frac{\lambda_j}{\lambda_m}\right)\left(1-\frac{\lambda_j}{\lambda_i}\right)\left(1-\frac{\lambda_j}{\lambda_{i+1}}\right)}+\frac{e^{-\lambda_i d}}{\prod\limits_{m=1}^{i-1}\left(1-\frac{\lambda_i}{\lambda_m}\right)\left(1-\frac{\lambda_i}{\lambda_{i+1}}\right)}\\&\quad+\frac{e^{-\lambda_{i+1} d}}{\prod\limits_{m=1}^{i-1}\left(1-\frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_m}\right)\left(1-\frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i}\right)}\triangleq P,\end{aligned} \tag{12}$$

则有

$$P-P_n=\lambda_{i+1}\left[\sum_{j=1}^{i-1}\frac{\lambda_j e^{-\lambda_j d}}{\prod\limits_{\substack{m=1\\m\neq j}}^{i-1}\left(1-\frac{\lambda_j}{\lambda_m}\right)(\lambda_{i+1}-\lambda_j)(\lambda_i-\lambda_j)}\right.$$

$$\left.+\frac{e^{-\lambda_{i+1}d}}{\prod\limits_{m=1}^{i-1}\left(1-\frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_m}\right)(\lambda_i-\lambda_{i+1})}+\frac{e^{-\lambda_i d}}{\prod\limits_{m=1}^{i-1}\left(1-\frac{\lambda_i}{\lambda_m}\right)(\lambda_{i+1}-\lambda_i)}\right],\tag{13}$$

$$P-P_m=\lambda_i\left[\sum_{j=1}^{i-1}\frac{\lambda_j e^{-\lambda_j d}}{\prod\limits_{\substack{m=1\\m\neq j}}^{i-1}\left(1-\frac{\lambda_j}{\lambda_m}\right)(\lambda_i-\lambda_j)(\lambda_{i+1}-\lambda_j)}\right.$$

$$\left.+\frac{e^{-\lambda_i d}}{\prod\limits_{m=1}^{i-1}\left(1-\frac{\lambda_i}{\lambda_m}\right)(\lambda_{i+1}-\lambda_i)}+\frac{e^{-\lambda_{i+1}d}}{\prod\limits_{m=1}^{i-1}\left(1-\frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_m}\right)(\lambda_i-\lambda_{i+1})}\right]$$

$$=\lambda_i\cdot\frac{P-P_n}{\lambda_{i+1}}.\tag{14}$$

将 (14) 式代入 (9) 式得

$$\cos t(l)-\cos t(l')=(IC_{i+1}\lambda_{i+1}-IC_i\lambda_i)(P-P_n)/\lambda_{i+1},\tag{15}$$

显然 $P-P_n>0$，故有

$$\cos t(l)-\cos t(l')\leqslant 0,\text{iff}\quad IC_{i+1}\lambda_{i+1}\leqslant IC_i\lambda_i.\tag{16}$$

上式表明，为使期望的未完工费用最小，$IC_i\lambda_i$ 值大的应安排在靠前的位置.　　证毕

推论 1. 若 $IC_j=\omega/\lambda_j, j=1,\cdots,k$, ω 为常数，则对于模型为 $1|X_j\sim\exp(\lambda_j)$, $d|E(\sum IC_j)$ 的单机随机调度，任意的工件排序都是彼此等价的.

证明. 考虑排序 l 和 l'，将 $IC_i=\omega/\lambda_i$ 和 $IC_{i+1}=\omega/\lambda_{i+1}$ 代入 (15) 式可得

$$\cos t(l)-\cos t(l')=0.$$

这意味着任意交换排序 l 中两个相邻工件的位置都不影响该排序期望的未完工费用.

证毕

工件未完工费用与加工时间分布函数的复杂性有关. 由于指数分布的无记忆性，工件在交工期前后的加工量是一致的. 这在排队论中称为“工作量守恒”，故若 IC_j 与指数分布的均值 $1/\lambda_j$ 成正比，任意排序彼此等价是与这种守恒性质相一致的. 此外这种排序等价性在某种意义上与 Weber(1979)[2] 定义的可交换性 (Interchangeability) 相类似. 后者表明，m 个串联的单服务台的任意排序都不影响顾客的离开过程，假若各服务台的服务时间是指数分布的.

推论 2. 若 $IC_j=\omega$, $j=1,\cdots,k$, ω 为常数，则对于模型为 $1|X_j\sim\exp(\lambda_j)$, $d|E(\sum IC_j)$ 的单机随机调度，最优排序是按 λ_j 非升的排序.

证明. 考虑排序 l 和 l'，不难推得，

$$\cos t(l)-\cos t(l')\leqslant 0,\ \text{iff}\ \lambda_{i+1}\leqslant\lambda_i.\tag{17}$$

证毕

推论 2 的物理意义在于工件未完工费用实质上是未按期完工惩罚. 如某工人月计划

加工一批工件，月底时将依其没加工完的工件数扣除其相应的奖金. 事实上，若 $IC_j(j=1,\cdots,k)$ 为常数 ω，则推论 2 的调度问题等价于使得延期工件的个数最少，即性能函数为 $E(\sum\omega U_j)$，其中如 $C_j(l)>d, U_j=1$；如 $C_j(l)\leqslant d, U_j=0$. 在一定程度上推论 2 中调度问题还可等价于"土匪问题" (bandit problem)[3].

三、讨 论

指数分布特性在随机调度的研究中深受欢迎，如 Pinedo(1983)[4]. 本文以工件未完工费用作为判据函数，研究指数加工时间的单机随机调度不失为一种新的提法. 研究其它复杂分布加工时间的调度问题如 Sarin 等人(1991)[5]研究的正态分布加工时间的单机调度问题，问题的关键在于工件未按期完工概率函数的求取，为此可能须对分布函数作某些特殊的处理，如 Sarin 等人对 $N(\mu_j,\sigma_j^2)$ 作了如下处理：1) 截去左半平面的分布；2) 假设 $\sigma_j^2=a\mu_j, j=1,\cdots,k$, a 为常数.

参 考 文 献

[1] Graham, R.L. Lawler, E.L. Lenstra J.K. and Rinnooy Kan, A.H.G. Optimization and Approximation in Deterministic Sequencing and Scheduling: a Survey, *Ann. Discrete Math.*, **5**(1979), 287—326.

[2] Weber, R.R. The Interchangeability of ·/M/1 Queues in Series, *J. Appl. Prob.*, **16**(1979), 690—695.

[3] Kumar, P.R. and Varaiya, P. Stochastic Systems: Estimation, Identification, and Adaptive Control, Prentice Hall, Inc.,(1986),236.

[4] Pinedo, M. Stochastic Scheduling with Release Dates and Due Dates, *Opns. Res*:**31**(1983), (3) 559—572.

[5] Sarin, S., Erel, E. and Steiner, G. Sequencing Jobs on a Single Machine with a Common Due Date and Stochastic Processing Times, European J. Operational Res., **51** (1991), 188—198.

STOCHASTIC SCHEDULING ON A SINGLE MACHINE WITH A COMMON DUE DATE AND EXPONENTIAL PROCESSING TIMES

XIE YIMIN ZHENG YINGPING

(*Institute of Automation, Academia Sinica, Beijing* 100080 *China*)

ABSTRACT

This paper considers stochastic scheduling on a single machine with jobs having a common due date and exponential processing times. The performance measure to be optimized is the expected incompletion cost. Preemptions are not allowed and the machine could not be idle. The results of the paper show that the optimal policy is the sequence the jobs in the nonincrearsing order of $Ic_i\lambda_j$. Besides the properties of the incompletion cost (IC_j)are evaluated and used to obtain some useful results.

Key words: stochastic scheduling; single machine scheduling; optimal sequencing; exponential distribution.