第19卷 第6期 自 动 化 学 报 Vol.19, No. 6
1993年11月 ACTA AUTOMATICA SINICA Nov., 1993

短 文

加权多步预报控制——鲁棒性的频域分析[1)]

徐立鸿 冯纯伯
(东南大学自动化所,南京,210018)

摘 要

本文给出了加权多步预报控制(WLPC)[1]算法的鲁棒性分析,其中包括 WLPC 算法允许的建模误差的界域和鲁棒性的频域分析结果. 分析表明,只要适当选取权因子且配置好闭环极点, WLPC 算法是一鲁棒性能良好的控制算法.

关键词: 预测控制,建模误差,鲁棒性,频域分析.

一、引 言

文献[1]所提出的加权多步预报控制算法(WLPC), 由于具有预测控制的多步预测和滚动优化机理,同时还具有闭环极点配置、零点补偿、前馈和输出动态反馈的机理,因而是一种性能优良的预测控制算法. 本文将从频域角度分析该算法的鲁棒性, 给出具有明晰频域意义的鲁棒性结果, 并从理论上证明了 WLPC 是一鲁棒性能良好的控制算法.

二、鲁棒性定理

设被控系统的传递函数为

$$G_0(z)=\frac{z^{-1}B_0(z^{-1})}{A_0(z^{-1})}. \tag{1}$$

其理论模型为

$$G_m(z)=\frac{z^{-1}B(z^{-1})}{A(z^{-1})}. \tag{2}$$

因此,建模误差为

$$\tilde{G}(z)=G_0(z)-G_m(z). \tag{3}$$

本文于1992年1月27日收到.
1) 国家自然科学基金和东南大学青年教师基金资助. 本文曾在1991年全国控制理论与应用年会上宣读.

文献[1]提出的加权多步预报控制（WLPC）算法，是在模型(2)的基础上，极小化以下性能函数：

$$J = E\left\{\sum_{j=1}^{N}[Py(t+j) - Qr(t+j)]^2 + \sum_{j=1}^{M}[R_j u(t+j-1)]^2\right\} \tag{4}$$

得到的．这里，r 为跟踪的设定值，$P(z^{-1})$，$Q(z^{-1})$ 为待选取的加权多项式，$R_j(z^{-1})$ 的形式如下：

$$R_j(z^{-1}) = \begin{cases}\lambda & 2 \leqslant j \leqslant M \\ \lambda + z^{-1}\cdot(K_W(z^{-1})/K_L(z^{-1})), & j = 1,\ (K_L(0) = 1).\end{cases} \tag{5}$$

$\lambda(>0)$ 为待选常数；K_W, K_L 为待选的 z^{-1} 的多项式．

文献[1]给出的 WLPC 控制器为

$$u(t) = \mathscr{D}^{-1}[\mathscr{L}r - \mathscr{G}y(t)]. \tag{6}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}\mathscr{D} &= K_L + z^{-1}[(\boldsymbol{g}^{\tau}\boldsymbol{G}^{(2)})K_L + \sqrt{\lambda}\, a^* K_W],\\ \mathscr{G} &= (\boldsymbol{g}^{\tau}\boldsymbol{F})K_L,\\ \mathscr{L} &= g^* Q K_L.\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

这里，向量 $\boldsymbol{g}, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{G}^{(2)}$ 以及数 a^*, g^* 的定义见文献[1]．权因子 Q 和 P 隐含于 $\boldsymbol{F}$ 中，可以任选．权因子 K_L 和 K_W 由以下极点配置方程得到：

$$\mathscr{A}_1 K_L + z^{-1}\mathscr{B}_1 K_W = T,\ T(0) = 1. \tag{8}$$

其中 $\mathscr{A}_1$ 和 $\mathscr{B}_1$ 均为 z^{-1} 的多项式，其系数只由模型 A 和 B 确定[1]．$T(z^{-1})$ 为由设计者选取的具有期望零点的稳定多项式．

当不存在建模误差时(即 $G_m = G_0$)，闭环系统的传递函数为

$$G^* = \frac{z^{-1}\mathscr{L}B}{T}. \tag{9}$$

称 G^* 为理想的闭环系统的传递函数．

当存在建模误差时，闭环传递函数为

$$G = \frac{A\mathscr{L}G_0}{T + A\mathscr{G}(G_0 - G_m)}. \tag{10}$$

定理． 假定被控系统(1)和模型(2)均是稳定的，且 A 与 B 互质，若建模误差满足

$$|G_m - G_0| < \left|\frac{T}{A\mathscr{G}}\right| \triangleq M_\Delta,\quad z \in \Gamma \tag{11}$$

(其中 Γ 为单位圆周，即 $\Gamma = \{z: z = e^{i\omega},\ 0 < \omega \leqslant 2\pi\}$)，则 WLPC 算法闭环渐近稳定．

引进 Rouché 定理作为引理．

引理． 设 $f(z)$，$g(z)$ 为区域 V 中的解析函数，若在 V 的边界上满足

$$|f(z)| > |g(z)|,$$

则 $f(z) + g(z)$ 与 $f(z)$ 在 V 中有相同个数的零点．

定理的证明．记 V_1 为单位圆内区域，即 $V_1 = \{z: |z| < 1\}$，记 V_2 为单位圆外区域，即 $V_2 = \{z: |z| > 1\}$．再令

$$F^* = T + A\mathscr{G}(G_0 - G_m), \tag{12}$$

则 F^* 的零点包含闭环系统的所有极点.

因为 G_0 和 G_m 均稳定，故 F^* 在单位圆外的区域 V_2 中解析，而在 V_2 的边界 $\Gamma\cup\{z=\infty\}$ 上,由于当 $z=\infty$时，$z^{-1}=0$，从而 $G_m(0)=G_0(0)=0$，而 $T(0)=1$，故连同定理条件(11)式便有

$$|A\mathscr{G}(G_m - G_0)| < |T|, \quad z \in \Gamma\cup\{z=\infty\}. \tag{13}$$

由 Rouché 定理，F^* 与 T 在 V_2 中有相同个数的零点. 但 T 稳定,它在 V_2 中没有零点，因此，F^* 的零点全在单位圆内. 定理得证. [证毕]

三、鲁棒性的频域分析

由文献[1]知,系统的前馈和反馈环节的传递函数分别为

$$G_{FF} = \mathscr{L}/\mathscr{D}, \quad G_{FB} = \mathscr{G}/\mathscr{D}. \tag{14}$$

注意到鲁棒性定理的主要条件(11)可写成

$$M_\Delta = |G_m/G^*| \cdot |G_{FF}/G_{FB}|, \quad z \in \Gamma. \tag{15}$$

于是,建模误差界域的频域表达式为

$$|G_m(e^{i\omega}) - G_0(e^{i\omega})| < |G_m(e^{i\omega})/G^*(e^{i\omega})| \cdot |G_{FF}(e^{i\omega})/G_{FB}(e^{i\omega})|. \tag{16}$$

由上式即知,建模误差的界域 M_Δ 与 $|G_m/G^*|$ 和 $|G_{FF}/G_{FB}|$ 成正比. 而 M_Δ 越大则 WLPC 算法的鲁棒性越好. 注意到 $|G_{FF}/G_{FB}|$ 与权因子 $P(z^{-1})$，$Q(z^{-1})$ 有关，故可选取这两个权因子使 $|G_{FF}/G_{FB}|$ 较大. 由 $|G_m/G^*|$ 可知,对通常的伺服问题,一般要求理想的闭环系统传递函数的增益 $|G^*|$ 在低频部分接近一个常数. 因此，要使 $|G_m/G^*|$ 在低频较大,应使 G_m 的低频增益较高,而被控过程 G_0 的低频增益一般高于理想的闭环系统的低频增益[2]. 所以，如果模型 G_m 在低频部分能较好地拟合被控对象 G_0 的话，则 $|G_m/G^*|$ 在低频部分将是较大的，WLPC 算法的鲁棒性将会更好. 中高频部分中，因为 $|G_0|$ 和 $|G_m|$ 在高频部分通常比较小,即使在高频部分模型 G_m 和被控对象 G_0 的偏差比较大，$|G_m - G_0|$也比较小. 此时，只要选取 G^* 中的 $T(z^{-1})$ 使 $|G_m/G^*|$在中高频区间为一常数,则建模误差不会超出(16)式的界域 M_Δ，因而鲁棒性得以保证.

综上可得关于 WLPC 算法鲁棒性的频域分析,结果如下:

只要模型 G_m 在主频带(即带宽范围内)上能够较好地拟合被控对象 G_0 的频率特性，则 WLPC 算法就是一种鲁棒性好的算法.

注意到通常的未建模动态都是高频动态,故由以上的分析结果可知,合理选取$T(z^{-1})$后，WLPC 是一鲁棒性能良好的控制算法.

四、鲁棒性的机理分析

WLPC 算法为什么对建模误差具有较好的鲁棒性呢? 由文献[1]知，式(8)中的多项式 $T(z^{-1})$ 还可用下式表示:

$$T = A\mathscr{D} + z^{-1}B\mathscr{G}, \tag{17}$$

故

$$M_{\Delta} = |T/A\mathscr{G}| = |(\mathscr{D}/\mathscr{G}) + (z^{-1}B/A)| = \left|\frac{1}{G_{FB}} + G_m\right|. \tag{18}$$

由此可知，反馈通道的传递函数增益越小，则鲁棒性越好．当对象模型 G_m 确定后，WLPC 算法主要是通过选取 T 和其他权因子，来减小反馈环节传递函数的增益，达到对付建模误差的目的．因此，利用输出信息进行极点配置和动态反馈校正，是 WLPC 算法鲁棒性好的主要控制机理．

此外，WLPC 算法所具有的前馈零点增补和预测控制的多步预报、滚动优化机理，是 WLPC 算法具有良好控制品质的控制机理．

关于 WLPC 算法的机理分析可详见作者博士学位论文[1)]．

参　考　文　献

[1] 徐立鸿、冯纯伯，加权多步预报控制，自动化学报，**17**(1991)，(6)，658—668.

[2] Åström, K. J., Robustness of a Design Method Based on Assignment of Poles and Zeros, *IEEE Trans. on Automatic Control*, **AC-25**(1980), (4), 588—590.

WEIGHTED LONG-RANGE PREDICTIVE CONTROL——FREQUENCY DOMAIN ANALYSIS OF ROBUSTNESS

Xu Lihong Feng Chunbo

(Research Institute of Automation, Southeast University, Nanjing, 210018, *China)*

Abstract

This paper gives robustness analysis of Weighted Long-range Predictive Control (WLPC) algorithm, which includes a bound of allowed modelling errors and a result in frequency domain analysis of robustness of WLPC algorithm. It shows that WLPC is an algorithm with a good robustness.

Key words: predictive control; modelling errors; robustness; frequency domain analysis.

1) 徐立鸿，预测控制的研究，博士学位论文，东南大学，1991.