短文

复杂摄动系统的鲁棒稳定性判定方法[1)]

唐建国
(四川轻化工学院电子系 自贡 643033)
黄家英
(成都科技大学自控系 成都 610065)

摘要

本文讨论了由几个区间多项式族相乘和相加后形成的多项式族，根据其值域的几何性质，提出了这类复杂摄动多项式族鲁棒稳定性的判定方法.

关键词: 复杂摄动，多项式族，鲁棒稳定性.

1 前言

在控制系统的稳定性分析中，经常会碰到如下形式的闭环特征多项式:

$$P(s)=U(s)V(s)+X(s)Y(s) \tag{1}$$

对于不确定性系统，有 $P(s)\in \boldsymbol{P}$, $U(s)\in \boldsymbol{U}$, $V(s)\in \boldsymbol{V}$, $X(s)\in \boldsymbol{X}$, $Y(s)\in \boldsymbol{Y}$. 考虑$\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$都是独立的区间多项式族的情况，则$\boldsymbol{P}$是一个具有复杂摄动的多项式族. 本文从区间多项式族值域断面的几何性质出发，提出了一种检验这类复杂摄动多项式族鲁棒稳定性的方法.

2 准备知识

任取一个固定的 $\omega\in R$, 分别用 $\Omega_u(\omega)$, $\Omega_v(\omega)$, $\Omega_x(\omega)$ 和 $\Omega_y(\omega)$ 表示$\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$ 4个区间多项式族在 $s=j\omega$ 处的值域断面. 由文献[1]知，这些值域断面都是复平面上的正矩形（两边分别与坐标轴平行的矩形），矩形的4个顶点分别为4个 Kharitonov 多项式的取值. 记 $R_u^+(\omega)$ 和 $R_u^-(\omega)$ 分别为 $\Omega_u(\omega)$ 实部的上、下界，$I_u^+(\omega)$ 和 $I_u^-(\omega)$ 分别为 $\Omega_u(\omega)$ 虚部的上、下界.

定义如下检验函数:

$$F_u(\omega)=\max\{R_u^-(\omega),\ -R_u^+(\omega),\ I_u^-(\omega),\ -I_u^+(\omega)\}. \tag{2}$$

本文于1991年7月16日收到.

1) 本文部分结果曾收入1991年控制理论及其应用年会论文集(威海).

引理 1[1]. $0 \notin \Omega_u(\omega)$ 等价于 $F_u(\omega) > 0$,

类似地可以构造出另外几个区间多项式族的检验函数 $F_v(\omega)$, $F_x(\omega)$ 和 $F_y(\omega)$. $r_{u_i}(\omega)$, $\theta_{u_i}(\omega)$ 分别表示 $\Omega_u(\omega)$ 的第 i 个顶点向量的矢径和幅角, $i = 1,2,3,4$.

$$\theta_u^+(\omega) = \max_{i \leq 4} \theta_{u_i}(\omega), \quad \theta_u^-(\omega) = \min_{i \leq 4} \theta_{u_i}(\omega),$$

$$r_u^+(\omega) = \max_{i \leq 4} r_{u_i}(\omega),$$

$$r_u^-(\omega) = \begin{cases} 0, \; F_u(\omega) \leq 0, \\ \min\{|R_u^+(\omega)|, \; |R_u^-(\omega)|\}, \; I_u^+(\omega) I_u^-(\omega) \leq 0, \\ \min\{|I_u^+(\omega)|, \; |I_u^-(\omega)|\}, \; R_u^+(\omega) R_u^-(\omega) \leq 0, \\ \min\limits_{i \leq 4} r_{u_i}(\omega), \quad \text{其它}. \end{cases}$$

任取一个非零复数 $z \in \boldsymbol{C}$, 则 $z\Omega_x(\omega)$ 仍然是一个矩形值域, 若 $z = re^{i\theta}$, 则 $z\Omega_x(\omega)$ 的 4 个顶点坐标可分别如下求得:

$$R_{zx_i}(\omega) = r \cdot r_{x_i}(\omega) \cos(\theta_{x_i}(\omega) + \theta),$$

$$I_{zx_i}(\omega) = r \cdot r_{x_i}(\omega) \sin(\theta_{x_i}(\omega) + \theta), \; i = 1,2,3,4.$$

上两式分别表示第 i 个顶点的实部和虚部.

$$R_{zx}^+(\omega) = \max_{i \leq 4} R_{zx_i}(\omega), \quad I_{zx}^+(\omega) = \max_{i \leq 4} I_{zx_i}(\omega),$$

$$R_{zx}^-(\omega) = \min_{i \leq 4} R_{zx_i}(\omega), \quad I_{zx}^-(\omega) = \min_{i \leq 4} I_{zx_i}(\omega).$$

类似可得到另一个矩形域 $(-z\Omega_v(\omega))$ 的 4 个顶点坐标以及最大、最小值的表达式.

下面再定义两个集合:

$$\Omega_{ux}(\omega) = \{z \in \boldsymbol{C} \mid U_0(j\omega) = zX_0(j\omega) \quad U_0(s) \in \boldsymbol{U}, X_0(s) \in \boldsymbol{X}\},$$

$$\Omega_{yv}(\omega) = \{z \in \boldsymbol{C} \mid Y_0(j\omega) = -zV_0(j\omega) \quad Y_0(s) \in \boldsymbol{Y}, V_0(s) \in \boldsymbol{V}\}.$$

下面的讨论还满足这样两个基本假定:

(1) $\boldsymbol{P}$ 中至少存在一个严格稳定的多项式 $P_*(s) \in \boldsymbol{P}$;

(2) $\boldsymbol{P}$ 中所有多项式都具有相同的阶数.

引理 2[2]. 以下两条是 $\boldsymbol{P}$ 鲁棒稳定的充要条件:

(1) $\forall \omega \in \boldsymbol{R}$, $0 \notin (\Omega_u(\omega) \cup \Omega_v(\omega)) \cap (\Omega_x(\omega) \cup \Omega_y(\omega))$,

(2) $\forall \omega \in \boldsymbol{R}$, $\Omega_{ux}(\omega) \cap \Omega_{yv}(\omega) = \varnothing$.

3 主要结果

本文的主要结果就是为引理 2 的两条充要条件提供一个检验的方法.

条件(1)的检验是很容易的. 构造如下检验函数:

$$F_1(\omega) = \max\{F_{uv}(\omega), F_{xy}(\omega)\}, \tag{3}$$

其中

$$F_{uv}(\omega) = \min\{F_u(\omega), F_v(\omega)\},$$

$$F_{xy}(\omega) = \min\{F_x(\omega), F_y(\omega)\}.$$

引理 3. $F_1(\omega)>0$ 与 $0\notin(\Omega_u(\omega)\cup\Omega_v(\omega))\cap(\Omega_x(\omega)\cup\Omega_y(\omega))$ 等价.

证明. 因为 $F_u(\omega)|>0$ 与 $0\notin\Omega_u(\omega)$ 等价，$F_v(\omega)>0$ 与 $0\notin\Omega_v(\omega)$ 等价，所以 $F_{uv}(\omega)>0$ 与 $0\notin(\Omega_u(\omega)\cup\Omega_v(\omega))$ 等价. 同理，$F_{xy}(\omega)>0$ 与

$$0\notin(\Omega_x(\omega)\cup\Omega_y(\omega))$$

等价. 所以，引理 3 成立. 证毕.

为了构造检验引理 2 中条件 (2) 的检验函数，先看图 1 中几个矩形域之间的关系. 其中，$z\bar{\Omega}_x(\omega)$ 是 $z\Omega_x(\omega)$ 的外接正矩形，

$$\bar{\Omega}_{ux}(\omega)=\Omega_u(\omega)\cap z\bar{\Omega}_x(\omega).$$

显然，$z\notin\Omega_{ux}(\omega)$ 与

$$\Omega_u(\omega)\cap z\Omega_x(\omega)=\varnothing$$

等价，而 $\bar{\Omega}_{ux}(\omega)=\varnothing$ 是 $z\notin\Omega_{ux}(\omega)$ 的充分条件.

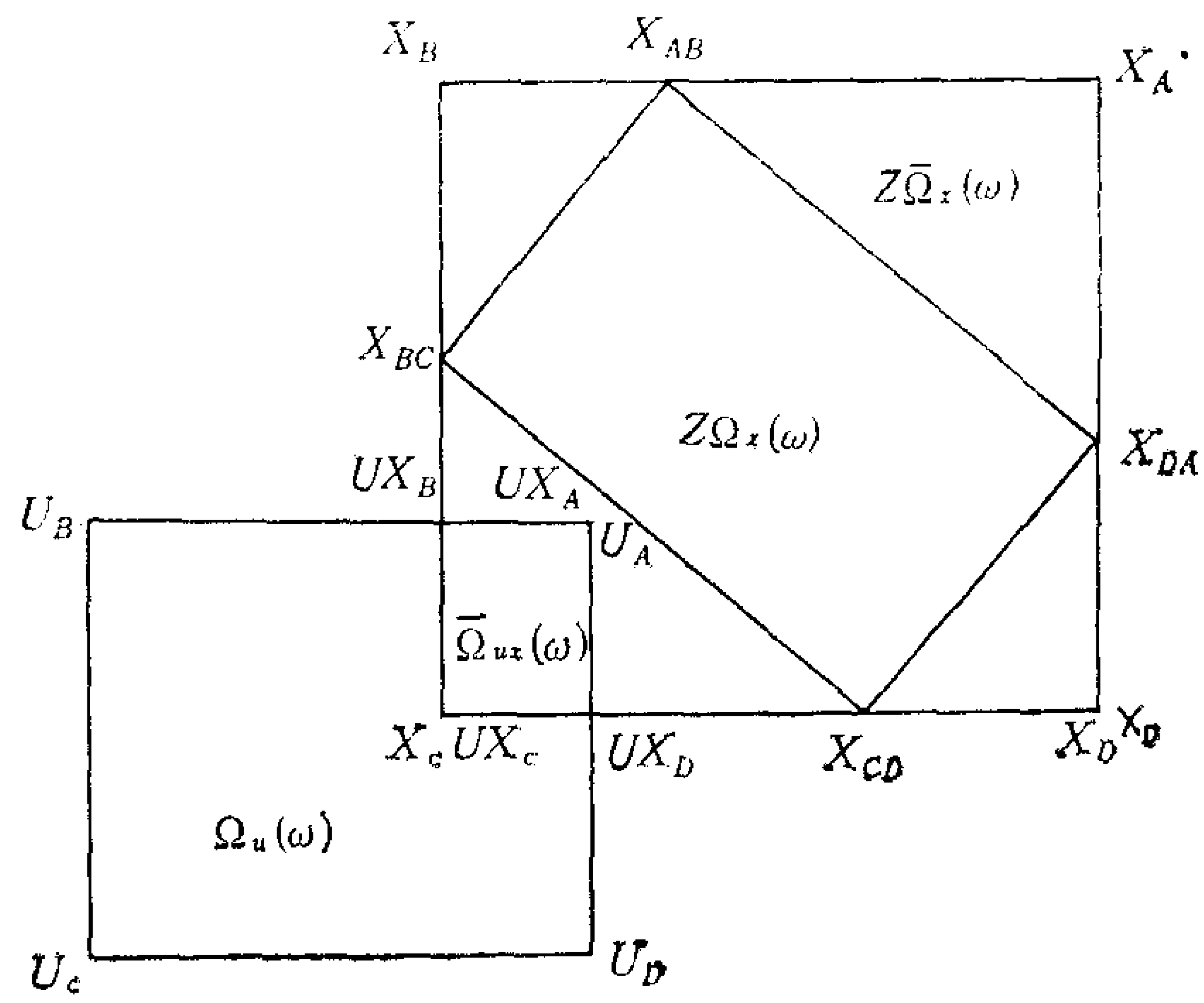

图 1　几个矩形域之间的关系

图 1 中各个标记点的坐标为

$$\begin{aligned}
&X_A:\ (R^{+}_{zx}(\omega),\ jI^{-}_{zx}(\omega)),\quad X_B:\ (R^{-}_{zx}(\omega),\ jI^{+}_{zx}(\omega)),\\
&X_C:\ (R^{-}_{zx}(\omega),\ jI^{-}_{zx}(\omega)),\quad X_D:\ (R^{+}_{zx}(\omega),\ jI^{-}_{zx}(\omega)),\\
&X_{AB}:\ (R_{zx_1}(\omega),\ jI^{+}_{zx}(\omega)),\quad X_{BC}:\ (R^{-}_{zx}(\omega),\ jI_{zx_2}(\omega)),\\
&X_{CD}:\ (R_{zx_3}(\omega),\ jI^{-}_{zx}(\omega)),\quad X_{DA}:\ (R^{+}_{zx}(\omega),\ jI_{zx_4}(\omega)),\\
&UX_A:\ (R^{+}_{ux}(\omega),\ jI^{+}_{ux}(\omega)),\quad UX_B:\ (R^{-}_{ux}(\omega),\ jI^{+}_{ux}(\omega)),\\
&UX_C:\ (R^{-}_{ux}(\omega),\ jI^{-}_{ux}(\omega)),\quad UX_D:\ (R^{+}_{ux}(\omega),\ jI^{-}_{ux}(\omega)).
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
&R^{+}_{ux}(\omega)=\min\{R^{+}_{zx}(\omega),R^{+}_{u}(\omega)\},\quad I^{+}_{ux}(\omega)=\min\{I^{+}_{zx}(\omega),I^{+}_{u}(\omega)\},\\
&R^{-}_{ux}(\omega)=\max\{R^{-}_{zx}(\omega),R^{-}_{u}(\omega)\},\quad I^{-}_{ux}(\omega)=\max\{I^{-}_{zx}(\omega),I^{-}_{u}(\omega)\}.
\end{aligned}$$

根据以上记号，可构造如下检验函数：

$$\begin{aligned}
&f_{ux}(\omega)=\max\{(R^{-}_{ux}(\omega)-R^{+}_{ux}(\omega)),\ I^{-}_{ux}(\omega)-I^{+}_{ux}(\omega)\},\\
&S_{ux}(\omega)=\max_{i\leqslant 4}S_{ux_i}(\omega).
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
&S_{ux_1}(\omega)=S_\Delta(X_A,X_{AB},X_{DA})-S_\Delta(X_A,X_{AB},UX_C)-S_\Delta(X_A,X_{DA},UX_C),\\
&S_{ux_2}(\omega)=S_\Delta(X_B,X_{AB},X_{BC})-S_\Delta(X_B,X_{AB},UX_D)-S_\Delta(X_B,X_{BC},UX_D),\\
&S_{ux_3}(\omega)=S_\Delta(X_C,X_{BC},X_{CD})-S_\Delta(X_C,X_{BC},UX_A)-S_\Delta(X_C,X_{CD},UX_A),\\
&S_{ux_4}(\omega)=S_\Delta(X_D,X_{CD},X_{DA})-S_\Delta(X_D,X_{CD},UX_B)-S_\Delta(X_D,X_{DA},UX_B).
\end{aligned}$$

$S_\Delta(\quad)$ 表示以括弧中三个顶点围成的三角形面积.

引理 4. 若 $\omega\in R$ 和 $z=re^{j\theta}\in C$ 是固定的，则 $z\notin\Omega_{ux}(\omega)$ 的充要条件为

$$F_{ux}(\omega)=\max\{f_{ux}(\omega),\ S_{ux}(\omega)\}>0 \tag{4}$$

证明. 必要性. 若 $z\notin\Omega_{ux}(\omega)$，意味着 $\Omega_u(\omega)\cap z\Omega_x(\omega)=\varnothing$，则 $\Omega_u(\omega)$ 矩形

必定在 $z\Omega_x(\omega)$ 矩形的 4 条边中某一条边的外侧. 如图 1 中, $\Omega_u(\omega)$ 就在 $z\Omega_x(\omega)$ 的 X_{BC}—X_{CD} 边的外侧. 这时又有两种情况: 一种是 $\bar{\Omega}_{ux}(\omega)=\varnothing$,这将使得 $f_{ux}(\omega)>0$, 进而得到 $F_{ux}(\omega)>0$; 另一种情况是 $\bar{\Omega}_{ux}\neq\varnothing$, 根据几何知识可知, 4 个$S_{ux_i}(\omega)$ 中必有、且仅有一个要大于 0, 图 1 是 $z\notin\Omega_{ux}(\omega)$ 的情况, 容易验证, 只有 $S_{ux_3}(\omega)>0$, 这也使得 $F_{ux}(\omega)>0$, 必要性得证.

充分性. 若已知 $F_{ux}(\omega)>0$, 则 $f_{ux}(\omega)$ 和 $S_{ux}(\omega)$ 中至少有一个要大于 0, 这又可以推出 $z\notin\Omega_{ux}(\omega)$ 的结论,故充分性也得证.

类似地, 可以构成检验 z 是否属于 $\Omega_{yv}(\omega)$ 的检验函数 $F_{yv}(\omega)$, 使得当 $\omega\in\boldsymbol{R}$和 $z\in\boldsymbol{C}$ 固定时, $F_{yv}(\omega)>0$ 成为 $z\notin\Omega_{yv}(\omega)$ 的充要条件,于是有下面结果:

引理 5. 对任意固定的 $\omega\in\boldsymbol{R}$, $\Omega_{ux}(\omega)\cap\Omega_{yv}(\omega)=\varnothing$ 的充要条件为: 任取非零复数 $z\in\boldsymbol{C}$,

$$F_2(\omega)=\max\{F_{ux}(\omega),\ F_{yv}(\omega)\}>0. \tag{5}$$

此结果直接由 $F_2(\omega)$ 的构造和引理 4 得出,故不需证明. 至此,得出本文的主要结果如下:

定理 1. 按(1)式定义的复杂摄动多项式族 $\boldsymbol{P}$ 是鲁棒稳定的充要条件为: $\forall\omega\in\boldsymbol{R}$, $z\in\boldsymbol{C}$, $z\neq0$, 满足

$$F(\omega)=\min\{F_1(\omega),F_2(\omega)\}>0. \tag{6}$$

定理 1 的证明可以直接由 $F_1(\omega)$ 和 $F_2(\omega)$ 的定义得出. $F_1(\omega)$ 和 $F_2(\omega)$ 分别为引理 2 的两条充要条件的检验函数.

定理 1 为本文论及的摄动系统提供了一种检验其鲁棒稳定性的方法. 文献 [2] 也提出了一种方法,但本文方法具有几何意义清楚,便于计算机编程的优点.

为了减少计算工作量,下面给出另一个结果,用它可以将 z 的搜索范围限制在一个不大的区域中.

引理 6. 若 $z=re^{j\theta}\in\Omega_{ux}(\omega)$, 则必有

$$r\in[r_{ux}^-(\omega),r_{ux}^+(\omega)],\ \theta\in[\theta_{ux}^-(\omega),\theta_{ux}^+(\omega)].$$

其中 $r_{ux}^+(\omega)=r_u^+(\omega)/r_x^-(\omega)$, $r_{ux}^-(\omega)=r_u^-(\omega)/r_x^+(\omega)$,

$$\theta_{ux}^+(\omega)=\begin{cases}\theta_u^+(\omega)-\theta_x^-(\omega), & F_u(\omega)>0,\ F_x(\omega)>0,\\ 2\pi, & \text{其它}.\end{cases}$$

$$\theta_{ux}^-(\omega)=\begin{cases}\theta_u^-(\omega)-\theta_x^+(\omega), & F_u(\omega)>0,\ F_x(\omega)>0,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

类似地,若 $z=re^{j\theta}\in\Omega_{yv}(\omega)$, 则必有

$$r\in[r_{yv}^-(\omega),r_{yv}^+(\omega)],\ \theta\in[\theta_{yv}^-(\omega),\theta_{yv}^+(\omega)].$$

其中 $r_{yv}^+(\omega)=r_y^+(\omega)/r_v^-(\omega)$, $r_{yv}^-(\omega)=r_y^-(\omega)/r_v^+(\omega)$,

$$\theta_{yv}^+(\omega)=\begin{cases}\theta_y^+(\omega)-\theta_v^-(\omega)+\pi, & F_y(\omega)>0,F_v(\omega)>0.\\ 2\pi, & \text{其它}.\end{cases}$$

$$\theta_{yv}^-(\omega)=\begin{cases}\theta_y^-(\omega)-\theta_v^+(\omega)+\pi, & F_y(\omega)>0,F_v(\omega)>0,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

引理 6 的证明可以由各个区间的构造过程给出,故从略. 再定义如下记号:

$$r^{+}(\omega)=\min\{r_{yv}^{+}(\omega),r_{ux}^{+}(\omega)\},\quad r^{-}(\omega)=\max\{r_{yv}^{-}(\omega),r_{ux}^{-}(\omega)\},$$
$$\theta^{+}(\omega)=\min\{\theta_{yv}^{+}(\omega),\theta_{ux}^{+}(\omega)\},\quad \theta^{-}(\omega)=\max\{\theta_{yv}^{-}(\omega),\theta_{ux}^{-}(\omega)\}.$$

显然，若存在某个 $z=re^{i\theta}\in\Omega_{ux}(\omega)\cap\Omega_{yv}(\omega)$，则 z 必定在如下区域之中，即

$$r\in[r^{-}(\omega),r^{+}(\omega)],\quad \theta\in[\theta^{-}(\omega),\theta^{+}(\omega)].$$

因此，对任一固定的 $\omega\in\boldsymbol{R}$，只须在上述区域内取 z 值进行搜索。如果上述区域的下限大于上限，即 r 或 / 和 θ 的取值区间不存在，则此 ω 下不必对 z 进行搜索。所以，按上述方法先确定 z 的搜索区域可以大大减少计算工作量。

参考文献

[1] Barmish, B. R., A Generalization of Kharitonov's Four-Polynomial Concept for Robust Stability Problems with Linearly Dependent Coefficient Perturbations, *IEEE Trans.*, **AC-34**(1989), 2, 157—164.

[2] Barmish, B. R., Shi, Z. C., Robust Stability of a Class of Polynomials with Coefficients Depending Multilinearly on Perturbations, *IEEE Trans.*, **AC-35**(1990), 9, 1040—1043.

A ROBUST STABILITY CRITICIZING METHOD OF COMPLEX PERTURBED SYSTEMS

TANG JIANGUO

(Sichuan Institute of Light Industry and Chemical Technology)

HUANG JIAYING

(University of Science and Technology of Chengdu)

ABSTRACT

This paper deals with the problem of Stability analysis of a polynomial family generated by multiplication and addition of several interval polynomials. In accordance with the geometric properties of their value regions, a new method is proposed to judge the robust stability of such a complicated perturbed polynomial family.

Key words: complex perturbation; polynomial family; robust stability.