短 文

U-D 分解的前向固定区间平滑新算法

史 忠 科
(西北工业大学自控系，710072)

摘 要

本文提出了两种前向固定区间平滑新算法以解决工程问题. 为了确保算法的数值稳定性并提高计算效率，两种算法中的协方差矩阵传播均使用了 U-D 分解形式. 计算量分析结果表明，两种新算法与 Keigo Watanabe 前向平滑算法相比较，计算量减少 40% 以上；状态维数较高时，计算效率提高 3 倍以上.

关键词: Kalman 滤波，固定区间平滑，状态估计，数值稳定性，飞行试验.

一、引 言

为了提高数据处理的精度，工程上常常需要平滑计算. 然而，基本平滑器数值稳定性差、计算效率低. Bierman, Ho. Y. C., Anderson 等人分别提出了固定区间、固定点、固定滞后平滑的新算法，提高了计算效率和数值稳定性[1-6]. 作者近年来在研究 Rauch 平滑器的基础上，提出了 U-D 分解的固定点、固定区间、固定滞后平滑新算法，不仅保证了数值稳定性，而且计算效率是其它算法的 1.5 倍以上[4-6]. 在飞行试验数据处理中，希望平滑结果按时间次序排列，并要求平滑计算效率高、数值稳定性好，以缩短试飞周期和飞机研制周期. 为此，本文基于 Keigo Watanabe 前向平滑算法，提出了一种有效的新方法.

二、前向平滑问题

设线性离散系统的状态方程为

$$\boldsymbol{x}_{j+1} = \Phi_{j+1,j}\boldsymbol{x}_j + \Gamma_j\boldsymbol{w}_j \tag{1}$$

观测方程为

$$\boldsymbol{z}_{j+1} = H_{j+1}\boldsymbol{x}_{j+1} + \boldsymbol{v}_{j+1} \tag{2}$$

其中，$\boldsymbol{x} \in R^n$, $\boldsymbol{w} \in R^q$, $\boldsymbol{z} \in R^m$, $\Phi \in R^{n\times n}$, $\Gamma \in R^{n\times q}$, $H \in R^{m\times n}$;

假定 $E\{\boldsymbol{v}_j\} = 0$, $E\{\boldsymbol{w}_j\} = 0$, $E\{\boldsymbol{w}_j\boldsymbol{v}_K^T\} = 0$, $\boldsymbol{x}_0 \sim N(\hat{\boldsymbol{x}}_0, P_0)$,

$$E\{\boldsymbol{w}_j\boldsymbol{x}_0^T\} = E\{\boldsymbol{v}_j\boldsymbol{x}_0^T\} = 0,\ E\{\boldsymbol{w}_j\boldsymbol{w}_K^T\} = \delta_{Kj}Q_j$$

本文于 1992 年 4 月 15 日收到.

$$E\{v_j v_K^T\} = R_j \delta_{Kj};\ \delta_{Kj} = \begin{cases} 0 & k \neq j \\ 1 & k = j \quad j = 1,2,\cdots,N \end{cases}$$

前向固定区间平滑算法如下[2]:

$$\left.\begin{aligned} \bar{x}_{j+1/N} &= \Phi_{j+1,j} x_{j/N} \\ x_{j+1/N} &= (I - G_j K_{j+1}^T)\bar{x}_{j+1/N} + G_j(I + G_j^T S_{j+1} G_j)^{-1} y_{j+1} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

其中

$$x_{0/N} = (I + P_0 S_0)^{-1}(P_0 q_0 + \hat{x}_0)$$

$$G_j G_j^T \triangleq \Gamma_j Q_j \Gamma_j^T$$

平滑估计的误差协方差阵传播为

$$\left.\begin{aligned} \bar{P}_{j+1/N} &= \Phi_{j+1,j} P_{j/N} \Phi_{j+1,j}^T \\ P_{0/N} &= (I + P_0 S_0)^{-1} P_0 \\ P_{j+1/N} &= (I - G_j K_{j+1}^T)\bar{P}_{j+1/N}(I - G_j K_{j+1}^T)^T + G_j(I + G_j^T S_{j+1} G_j)^{-1} G_j^T \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

由(3)、(4)式知，只要求得 $S_0, q_0, y_{j+1}, K_{j+1}$ 就可得到平滑估计值． 而 S_0, q_0, y_{j+1} 及 K_{j+1} 均可由下述的后向信息滤波器给出[2].

$$\left.\begin{aligned} K_j &= S_{j+1} G_j (I + G_j^T S_{j+1} G_j)^{-1} \\ S_{N+1} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned} \bar{S}_{j+1} &= (I - K_{j+1} G_j^T) S_{j+1} \\ \bar{q}_{j+1} &= (I - K_{j+1} G_j^T) q_{j+1} \\ q_{N+1} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

以及

$$\left.\begin{aligned} S_j &= \Phi_{j+1,j}^T \bar{S}_{j+1} \Phi_{j+1,j} + H_j^T R_j^{-1} H_j \\ q_j &= \Phi_{j+1,j}^T \bar{q}_{j+1} + H_j^T R_j^{-1} z_j \\ y_j &= G_j^T q_j \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

(3)—(7)式就给出了后向滤波——前向平滑的计算公式.

三、前向平滑的新算法

由于上述算法中有大量的 $n \times n$ 矩阵相乘，计算量很大．为了简化前向平滑算法，本文作如下处理．

令

$$\Lambda_j = (I + G_j^T S_{j+1} G_j)^{-1}$$

由(5)式可知

$$K_{j+1} = S_{j+1} G_j \Lambda_j \tag{8}$$

将(8)式代入(6)式中得

$$\bar{S}_{j+1} = (I - K_{j+1} G_j^T) S_{j+1} (I - K_{j+1} G_j^T)^T + K_{j+1} K_{j+1}^T \tag{9}$$

$$\begin{aligned} A_j &= \Phi_{j+1,j}^T \bar{S}_{j+1} \Phi_{j+1,j} \\ &= M_j^T S_{j+1} M_j + \Phi_{j+1,j}^T K_{j+1} K_{j+1}^T \Phi_{j+1,j} \end{aligned} \tag{10}$$

由(7)式可得

$$S_j = A_j + H_j^T R_j^{-1} H_j \tag{11}$$

式中

$$M_j = (I - G_j K_{j+1}^T) \Phi_{j+1,j} \tag{12}$$

$$\boldsymbol{q}_j = M_j^T \boldsymbol{q}_{j+1} + H_j^T R_j^{-1} \boldsymbol{z}_j \tag{13}$$

令

$$\Delta \boldsymbol{x}_{j+1/N} = G_j \Lambda_j \boldsymbol{y}_{j+1}$$

得

$$\Delta \boldsymbol{x}_{j+1/N} = G_j \Lambda_j G_{j+1}^T \boldsymbol{q}_{j+1} \tag{14}$$

(8)、(10)～(14)式就给出了后向信息滤波的新计算公式.

将(12)、(14)式代入(3)式中，得

$$\boldsymbol{x}_{j+1/N} = M_j \boldsymbol{x}_{j/N} + \Delta \boldsymbol{x}_{j+1/N} \tag{15}$$

将(12)式代入(4)式中，得

$$P_{j+1/N} = M_j P_{j/N} M_j^T + G_j \Lambda_j G_j^T \tag{16}$$

(15)、(16)式给出了前向平滑的新公式. 当 $\Phi_{j+1,j}$ 为 j 的函数时，上述新算法还可以简化.

令
$$\left.\begin{aligned} &K_{j+1} = \Phi_{0,j+1}^T K_{j+1}^*, \quad E_j = \Phi_{0,j+1} G_j \\ &S_{j+1} = \Phi_{0,j+1}^T A_{j+1} \Phi_{0,j+1}, \ \boldsymbol{q}_{j+1} = \Phi_{0,j+1}^T \boldsymbol{b}_{j+1}, \ N_j = H_j \Phi_{0,j}^{-1} \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

代入(3)～(7)式中得

$$\left.\begin{aligned} K_{j+1}^* &= A_{j+1} E_j \Lambda_j \\ \bar{A}_{j+1} &= A_{j+1} - A_{j+1} E_j \Lambda_j E_j^T A_{j+1} \\ \bar{\boldsymbol{b}}_{j+1} &= \boldsymbol{b}_{j+1} - K_{j+1}^* E_j^T \boldsymbol{b}_{j+1} \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

及

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{b}_j &= \bar{\boldsymbol{b}}_{j+1} + N_j^T R_j^{-1} \boldsymbol{z}_j \\ A_j &= \bar{A}_{j+1} + N_j^T R_j^{-1} N_j \\ \boldsymbol{y}_j &= E_j^T b_j \\ \Delta \boldsymbol{x}_{j+1/N} &= G_j \Lambda_j E_{j+1}^T b_{j+1} \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

平滑算法仍采用(15)、(16)式. 至此，简化的算法已全部得到. 新算法中，$n \times n$ 矩阵相乘运算大大减少.

为了进一步提高两种算法的计算效率和数值稳定性，滤波和平滑公式中的协方差阵传播均采用 U-D 分解技术. 为了便于区分，(8)、(10)～(14)、(15)、(16)式称为算法 1；(18)、(19)、(15)、(16) 称为算法 2. 在新算法 2 中，(18)式采用 Bierman 1977 年的方法，(19)式采用 Thornton-Jacobson U-D 分解方法；两种新算法的平滑估计(15)、(16)式采用 MWG-S 算法实现.

对于算法 1 滤波问题处理如下：

将(10)式代入(11)式中，得

$$S_j = M_j^T S_{j+1} M_j + \Phi_{j+1,j}^T K_{j+1} K_{j+1}^T \Phi_{j+1,j} + H_j^T R_j^{-1} H_j \tag{20}$$

令　$S_j = U_j D_j U_j^T$，代入(20)式中，得

$$U_j D_j U_j^T = \tilde{Y}_j \tilde{D}_j \tilde{Y}_j^T \tag{21}$$

其中

$$\tilde{Y}_j = [M_j^T U_{j+1}, \ \Phi_{j+i,j}^T K_{j+1}, H_j^T]$$

$$\tilde{D}_j = \mathrm{diag}[D_{j+1}, I, R_j^{-1}]$$

应用 MWG-S 方法，就可得(21)式的 U-D 分解.

四、计算量比较与分析

为了说明新算法的有效性，我们对本文提出的两种新算法进行了计算量分析并与 Reigo Watanabe 前向平滑算法进行了综合比较. 表 1、表 2 分别给出了算法 1 和算法 2 的后向滤波计算量；表 3 给出了前向平滑计算量的比较；表 4 给出了三种算法所需后向滤波计算量的比较；表 5 给出了计算量的综合比较. 在表 3至表 5 中，用 FP 表示 Watanabe 的前向平滑算法； MFP 1，MFP 2 分别表示本文的新算法 1，新算法 2.

表 3至表 5 中，FP 算法的平滑计算量为文献[2]中表 3、表 4 之和；滤波计算量为文献[2]中表 1、表 2 之和.

表 1 算法 1 一步后向滤波计算量

算 式	加 法	乘 法	除 法
K_{j+1}	$nq(n-1)$	n^2q	q^2
$K_{j+1}^T\Phi_{j+1,j}$	$nq(n-1)$	n^2q	
q_j	$n(n-1)+m(m-1)$	n^2+m^2	m
$\Delta x_{j+1/N}$	$2n(m-1)$	$2nm$	
S_j[3]	$1.5n^3+n^2(q+m-1)+0.5n$	$1.5n^3-0.5n^2+n^2(q+m)$	$n-1$
总计	$1.5n^3+n^2(4q+m+1)$ $+n(2m-3q-2.5)+m^2-m$	$1.5n^3+n^2(4q+m+0.5)$ $+2nm$	$q^2+m+n-1$

表 1 中 $S_j=U_jD_jU_j^T$

表 2 算法 2 的一步后向滤波计算量

算 式	加 法	乘 法	除 法
测量更新[3]	$(1.5n^2+1.5n)q$	$(1.5n^2+5.5n)q$	nq
时间更新[3]	n^2m+4nq	$(n^2+2n-1)m+4nq$	$2m(n-1)$
总 计	$(1.5n^2+5.5n)q+n^2m$	$(1.5n^2+9.5n)q$ $+(n^2-2n-1)m$	$2m(n-1)$ $+nq$

表 3 一步平滑所需计算量的比较

算 法	加 法	乘 法	除 法
MFP	$1.5n^3+n^2q+0.5n$	$1.5n^3+0.5n^2+n^2q$	$n-1$
FP[2]	$1.5n^3-0.5n+n^2$ $+(1.5n^3+0.5n^2+4n)q$	$1.5n^3+3n^2-1.5n$ $+(1.5n^3+3n^2+3.5n)q$	$(n-1)(1+3q)$

表 4　一步平滑所需滤波计算量比较

算 法	加 法	乘 法	除 法
MFP1	$1.5n^3+n^2(4q+m+1)+m^2-m+n(2m-3q-2.5)$	$1.5n^3+n^2(4q+m+0.5)+2nm$	$q^2+m+n-1$
MFP2	$(1.5n^2+5.5n)q+n^2m$	$(1.5n^2+9.5n)q+(n^2-2n-1)m$	$2m(n-1)+nq$
FP[2]	$1.5n^3+0.5n^2(3q+2m+1)+n(m+2.5q)$	$1.5n^3+n^2(m+1.5q+2)+n(2m+6.5q-0.5)$	$n-1+(n+1)p$

表 5　一步滤波平滑所需总计算量的比较

算 法	$n=10,\ q=m=2$			$n=10,\ q=m=6$			$n=q=m=10$		
	加法	乘法	除法	加法	乘法	除法	加法	乘法	除法
MFP1	4307	4340	24	6650	6820	60	9120	9300	128
MFP2	2315	2398	65	3980	4094	177	5555	5790	289
FP	6895	8089	94	14580	16500	246	21895	25180	398
算 法	$n=30,\ q=m=4$			$n=30,\ q=m=15$			$n=q=m=30$		
	加法	乘法	除法	加法	乘法	除法	加法	乘法	除法
MFP1	103332	103740	78	159900	163800	298	243810	245700	988
MFP2	53775	54450	397	90240	91575	1409	139965	142200	2789
FP	256035	268680	530	733710	775515	1828	1385085	1459740	3598

由表 3～表 5 可知，本文提出的新算法比 Keigo Watanabe 前向平滑算法要有效得多．当 n、q、m 较大时，越显示出本文方法的优越性．

本文提出的方法不仅计算量小，而且存贮量也少．算法 1 和算法 2 的存贮量均为 $(n+1)(n+q)$，而 Keigo Watanabe 方法的存贮量为 $n^2+q(2n+3)$，每步计算比本文方法多用 $n(p-1)+2p$ 个存贮单元．

五、结 束 语

本文给出两种有效的前向平滑新算法．当 n 较大时，计算效率将是 Keigo Watanabe 方法的数倍．当转移矩阵用 i 函数表示时，计算效率将大大提高．

参 考 文 献

[1] Bierman, G. J., A New Computationally Efficient Fixed-Interval, Discrete-time Smoothers, *Automatica*, **19**(1983), 503—511.

[2] Keigo Watanabe, A New Forward-pass Fixed-Interval Smoother Using U-D Information Matrix Factorization, *Automatica*, **22**(1986), 465—475.

[3] Mayback, P. S., Stochastic Models, Estimation and Control, Academic Press, New York, **1**(1979), 368—405.

[4] 史忠科，固定区间平滑新算法及其在飞行试验中的应用，自动化学报，**17**(1991)，323—329.
[5] 史忠科，U-D 分解的固定点平滑新算法及其在飞行试验中的应用，航空学报，**12**(1991)，A488—494.
[6] 史忠科，U-D 分解的固定滞后平滑新算法及其在飞行状态实时估计中的应用，控制与决策，**5**(1990)，Sppl. 7—12.

A NEW U-D FACTORIZATION-BASED FORWARD-PASS FIXED-INTERVAL DISCRETE-TIME SMOOTHER

SHI ZHONGKE

(Department of Control, Northwestern Polytechnical University, P. O. Box 710072)

ABSTRACT

To solve the problem of time-history arrangement of test data, two kinds of forward-pass fixed-interval discrete-time smoothers are presented. These smoothers are based on the Kalman filter, Rauch-Tung-Streible smoother, and Keigo Watanabe forward-pass smoother. To get high numerical stability and computational efficiency, U-D factorizations are used in the propagations of covariance matrices of these new smoothing algorithms. For different systems, one of the new smoothers would be chosen easily by the comparison of operation counts. These new smoothers exhibit excellent numerical accuracy and stability and the number of operations of both the filter and smoother are decreased greatly. Comparison of operation numbers shows that these new smoothers are more than 1.8 times as faster as Keigo. Watanabe's forward-pass smoother.

Key words: Kalman filter; fixed-interval smoother; state estimation; numerical accuracy; flight test.