第20卷 第2期 自 动 化 学 报 Vol. 20, No. 2
1994 年 3 月 ACTA AUTOMATICA SINICA Mar., 1994

时域鲁棒设计的新方法

——$\bar{\sigma}[P]$和$\bar{\sigma}[V]\cdot\bar{\sigma}[V^{-1}]$的极小化[1)]

胡庭姝 施颂椒 张钟俊

(上海交通大学自控系 200030)

摘 要

本文讨论在极点配置的约束下，使 $\bar{\sigma}[P]$ 和 $\bar{\sigma}[V]\cdot\bar{\sigma}[V^{-1}]$ (条件数)极小化的问题，其中 P 是 $(A+BF)'P+P(A+BF)=-2I_n$ 的正定解，V 是 $A+BF$ 的特征向量矩阵. 两种指标都反映了系统鲁棒稳定的程度. 通过定义一矩阵函数并引入新的自由变量 U，可放松极点配置的约束，并能系统的推导 $\partial\bar{\sigma}^2[P]/\partial U$ 及 $\partial(\bar{\sigma}^2[V]\cdot\bar{\sigma}^2[V^{-1}])/\partial U$，从而将鲁棒设计转化为无约束的梯度法寻优,实例说明,本文设计方法的效果很好.

关键词: 鲁棒设计,条件数，Lyapunov 方法,极点配置,梯度方法.

1 引 言

对于一般的非结构式不确定系统，一种已知的稳定范围是: $\bar{\sigma}[\Delta]<1/\bar{\sigma}[P]$; 另一种是 $\bar{\sigma}[\Delta]<1/\sup\limits_{\omega}\bar{\sigma}[(j\omega I-A-BF)^{-1}]$. 因而鲁棒设计可通过对 $\bar{\sigma}[P]$ 和 $\sup\limits_{\omega}\bar{\sigma}[(j\omega I-A-BF)^{-1}]$ 最小化来实现. 虽然第一个稳定范围早在80年代初就已得出,但 至今还没有系统的方法使 $\bar{\sigma}[P]$ 最小,而在极点配置的约束下使之最小则是一个更具研究价值的课题,但这一问题似乎更难求解. 原因之一是极点配置的条件难于描述,其二是 $\bar{\sigma}[P]$ 与F之间的关系比较复杂. 文[1,2]对没有约束的情形提出了一些设计方法,然而对稳定性约束的处理仍显得很勉强. 文[1]也没有直接优化 $\bar{\sigma}[P]$.

在极点配置的条件下使 $\sup\limits_{\omega}\bar{\sigma}[(j\omega I-A-BF)^{-1}]$ 最小可通过使 $\bar{\sigma}[V]\cdot\bar{\sigma}[V^{-1}]$ 最小来近似实现. 这是人们一直想要求解的问题. J. Kautsky, N. K Nichols 等人致力于研究这一问题[3,4],然而他们所优化的仅仅是与条件数相关的目标函数. 另外,文[3,4]的迭代方法也比较笨拙,每次用 QR 和 SVD 方法优化一个特征向量，而这一特征向量在下一轮循环中又得改写,最后迭代的结果也不一定收敛到极小点.

本文通过定义一矩阵函数和引入新的自由变量 U，放松了极点配置的约束条件，并求出了目标函数对U的偏导. 这一构思在文[5—7]中已被多次使用,但不同的是,本文优化的目标函数是最大奇异值型的，与以前 Frobenius 范数型的相比有很大改进，更能准

1) 本文的研究获国家自然科学基金资助.
本文于1992年7月30日收到

确地反映鲁棒性.

本文在求解目标函数对U的偏导时,系统应用了矩阵迹、Kroneker 积、行展开和列展开等性质,使最后所得结果形式简单. 便于设计.

2 由鲁棒性分析得到的优化问题

考虑如下不确定系统:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = (A + E)\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u}, \tag{2.1}$$

其中 $\boldsymbol{x} \in R^n$, $\boldsymbol{u} \in R^m$, E为$n \times n$阶不确定矩阵,满足$\bar{\sigma}[E] \leqslant \gamma$. 在状态反馈 $\boldsymbol{u} = F\boldsymbol{x}$ 作用下,得闭环系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = (A + BF + E)\boldsymbol{x}. \tag{2.2}$$

由已有的鲁棒性判据可知, 系统(2.2)鲁棒稳定的充分条件是, $A + BF$ 稳定, 且有[8,9]

1) $\gamma < 1/\bar{\sigma}[P]$, 其中$P$满足 $(A + BF)'P + P(A + BF) = -2I_n$;

2) $\gamma < 1/\sup\limits_{\omega}\bar{\sigma}[(j\omega I - A - BF)^{-1}] = 1/\|(SI - A - BF)^{-1}\|_{\infty}$.

以上 $\bar{\sigma}[Q] = \lambda_{\max}^{\frac{1}{2}}[Q'Q]$, 表示$Q$的最大奇异值.

为了使系统具有最大稳定裕度, 可使 $\bar{\sigma}[P]$ 或 $\|(SI - A - BF)^{-1}\|_{\infty}$ 最小. 后者可用文[10]的方法求得, 但本文将考虑极点配置下的鲁棒设计,原因是: 1) 为使系统具有所需的动态特性; 2) 若没有极点限制,当目标函数趋于最小值时, 闭环特征值会远离虚轴,造成高反馈增益和大的控制甚至饱和. 当$m \geqslant 2$时,配置闭环极点的F有无穷多.

给定特征值集合, $\{\lambda_i, i = 1, n\}$, 设 λ_i 互不相同, 则 $A + BF$ 具有所给定的特征值等效于存在V, 使得 $V^{-1}(A + BF)V = \mathrm{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots, \lambda_n]$. 一般说来, λ_i中有共轭复根,为了避免复数出现,设 $\lambda_i, \lambda_{i+1} = \alpha_i \pm j\beta_i$, 令

$$A_1 = \mathrm{diag}\left[\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{i-1}, \begin{bmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ -\beta_i & \alpha_i \end{bmatrix}, \lambda_{i+2}, \cdots, \lambda_n\right], \tag{2.3}$$

则 $A + BF$ 具有所给定的特征值等效于存在 V, 使

$$V^{-1}(A + BF)V = A_1. \tag{2.4}$$

综合以上分析,可得如下鲁棒设计问题:

1) $\inf\bar{\sigma}[P]$, s.t. $V^{-1}(A + BF)V = A_1, (A + BF)'P + (A + BF)P = -2I_n$.

2) $\inf \|(SI - A - BF)^{-1}\|_{\infty}$, s.t. $V^{-1}(A + BF)V = A_1$.

对于问题 1), 将用梯度法直接求解. 对问题 2), 将通过优化条件数 $\bar{\sigma}[V] \cdot \bar{\sigma}[V^{-1}]$ 来求得次优解. 注意以下不等式:

$$\sup_{\omega}\bar{\sigma}[(j\omega I - A - BF)^{-1}] = \sup_{\omega}\bar{\sigma}[V(j\omega I - A_1)^{-1}V^{-1}]$$

$$\leqslant \bar{\sigma}[V] \cdot \bar{\sigma}[V^{-1}] \cdot \sup_{\omega}\bar{\sigma}[(j\omega I - A_1)^{-1}] = \bar{\sigma}[V] \cdot \bar{\sigma}[V^{-1}] \cdot \max_i\left[\frac{1}{|\lambda_i|}\right]. \tag{2.5}$$

通过优化条件数来进行鲁棒设计, 这与文[3,4]的结论一致. 但文[3,4]并未给出优化条件数的方法. 本文以下将致力于求解如下优化问题:

$$\text{Opt1: } \inf J := \inf \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2[P],$$

$$\text{s.t. } V^{-1}(A+BF)V = A_1, (A+BF)'P + P(A+BF) = -2I_n.$$

$$\text{Opt2: } \inf J := \inf \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2[V]\cdot\bar{\sigma}^2[V^{-1}],$$

$$\text{s.t. } V^{-1}(A+BF)V = A_1.$$

3　消去约束条件

与文[5]的方法一样，本文定义一个矩阵函数

$$f:\ U\in R^{m\times n}\to(F,V)\in R^{m\times n}\times R^{n\times n}.$$

定义 3.1[5-7]. 设(A,B)可控，A_1为(2.3)式所给定的实对角矩阵，A与A_1无相同特征值，则定义 f: $U\to(F,V)$ 如下：

对于 $U\in R^{m\times n}$，解 $AV-VA_1=-BU$，如果V非奇异，则令 $F=UV^{-1}$.

f的定义域，记为D_f，为所有使V非奇异的U的集合，称(F,V)是U在f下的象，记为 $(F,V)=f(U)$. f的值域，记为R_f，为D_f在f下的象集.

关于D_f和R_f，有如下重要性质：

定理 3.1[5-7]. f的值域等于所有满足 $V^{-1}(A+BF)V=A_1$ 的 (F,V)的集合. 即 $R_f=\{(F,V),V^{-1}(A+BF)V=A_1\}$. f的定义域D_f如果非空，则必为$R^{m\times n}$空间中稠的开集.

在文[3,4]中，也有对配置极点的F和V的定义，结果与本文是一样的. 但本文的描述方法对于比较复杂的梯度推导很有效. 而用文[3,4]所定义的函数却很难推导本文所讨论的目标函数的梯度.

利用本文所定义的函数f，可将 $V^{-1}(A+BF)V=A_1$ 的限制用

$$(F,V)=f(U):\ AV-VA_1=-BU, F=UV^{-1}, U\in D_f$$

来代替. 因D_f是稠的开集，U为自由变量，若 $\partial J/\partial U$ 可求，则可用梯度法求解上节优化问题.

4　梯度方法

利用上节的函数，可将 Opt1 转化为

$$\inf J=\inf\frac{1}{2}\bar{\sigma}^2[P],\ \text{s.t. } AV-VA_1=-BU,$$

$$F=UV^{-1},(A+BF)'P+P(A+BF)=-2I_n, U\in D_f.$$

由于F和V可由U唯一地确定，P又由F唯一地确定，所以J是U的函数，而U是自由变量. $\partial J/\partial U$ 由以下定理给出.

定理 4.1. 设 $\lambda_{\max}[P'P]$ 是 $P'P$ 的单特征值，记 $\lambda=\lambda_{\max}[P'P]$. w 是 $P'P$ 的右特征向量，满足 $P'Pw=\lambda w$，且 $w'w=1$，则

$$\partial J/\partial U = [V^{-1}(X'P' + XP)B + YB]',$$

其中 X 满足 $X(A+BF)'+(A+BF)X = -ww'P$, Y 满足 $YA - A_1Y = V^{-1}(X'P'+XP)BF$.

证明详见附录. J 与 U 的函数关系非常复杂,用梯度方法不一定能求得 J 的最小值. 但从所做过的例子来说,梯度方法不是收敛于 $\partial J/\partial U = 0$ 的点,就是在 P 的最大两个奇异值相遇处停止迭代,而最终得出的鲁棒稳定范围都是令人满意的.

Opt2 转化为

$$\inf\ J = \inf \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2[V]\cdot\bar{\sigma}^2[V^{-1}],$$

$$\text{s.t. } AV - VA_1 = -BU, F = UV^{-1}, U \in D_f.$$

定理 4.2. 记 $J_1 = \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2[V]$, $J_2 = \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2[V^{-1}]$, 则 $J = 2J_1J_2$. 设 $\lambda_1 = \lambda_{\max}[V'V]$, w_1 是 $V'V$ 的右特征向量,且 $V'Vw_1 = \lambda_1 w_1, w_1'w_1 = 1$; 设 $\lambda_2 = \lambda_{\max}[(V^{-1})'V^{-1}]$, w_2 是 $(V^{-1})'V^{-1}$ 的右特征向量,且 $(V^{-1})'V^{-1}w_2=\lambda_2 w_2$, $w_2'w_2=1$. $\lambda_{\max}[V'V]$ 和 $\lambda_{\max}[(V^{-1})'\times V^{-1}]$ 分别是 $V'V$ 和 $(V^{-1})'V^{-1}$ 的单特征值,

则
$$\partial J/\partial U = 2(ZB)'$$

其中 Z 满足
$$ZA - A_1Z = -J_2w_1w_1'V' + J_1V^{-1}w_2w_2'(V^{-1})'V^{-1}.$$

证明详见附录.

5 算例

例 1[11]. 不确定系统由(2.1)式给出,其中 $n = 3$, $m = 2$,

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

给定闭环极点为$-2\pm j2$, -4. 则 A_1 取为

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

文[7]对此例进行了 $J = \frac{1}{2}\|A + BF\|_F^2$ 的优化,鲁棒性比文[11]好. 本文对此例进行了 $J = \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2[P]$和 $J = \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2[V]\cdot\bar{\sigma}^2[V^{-1}]$ 的优化,结果如下:

1) $J = \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2[P]$. 取初值 $U_0 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, 得 $J_0 = 9664.939$. 采用最速下降梯度方法,得 $J_1 = 2.23918$, $J_2 = 0.23876, \cdots, J_6 = 0.22136$.在这一点,$P$ 的最大两个奇异值相遇,都等于 0.66537, $\partial J/\partial U$ 不存在,因此停止迭代. 此时

$$F_6 = \begin{bmatrix} -1.82866 & 0.65867 & -2.52803 \\ -3.23901 & -1.47196 & -3.11726 \end{bmatrix},$$

$$\|(SI-A-BF_6)^{-1}\|_\infty = 0.6029,\ \bar{\sigma}[P] = 0.66537.$$

由鲁棒判据可知，当 $\gamma < \max[1/\bar{\sigma}[P],\ 1/\|(SI-A-BF_6)^{-1}\|_\infty] = 1.65865$ 时，系统鲁棒稳定. 这比文[11]给出的稳定范围 $\gamma < 1.5794$ 和文[10]给出的 $\gamma < 1.5961$ 都要大.

若取不同的初值 U_0，梯度方法都在 P 的最大两个奇异值相遇时停止，但 $\bar{\sigma}[P]$ 略有差别，最后所得的 F 也不相同.

虽然此例没有求得 $\bar{\sigma}[P]$ 的最小值. 但梯度方法的效果是很明显的. 尤其是 J_0 到 J_1 的下降幅度相当大.

2) $J=\frac{1}{2}\bar{\sigma}^2[V]\cdot\bar{\sigma}^2[V^{-1}]$. 取初值 $U_0=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$，得 $J_0 = 8.33337$，采用最速下降的梯度方法，得 $J_1 = 5.4982, J_2 = 5.46962, J_6 = 5.45489$，以后下降很缓慢，约在第20步，收敛到 $J^* = 5.45428$ 此时 $\partial J/\partial U \approx 0$. 对应的

$$F^* = \begin{bmatrix}-2.57006 & 1.35318, & -3.15421\\ -3.76895 & -0.84578, & -2.44873\end{bmatrix},$$

$$\|(SI-A-BF)^{-1}\|_\infty = 0.6623.$$

鲁棒稳定范围 $\gamma < 1.5098$. 这比优化 $\frac{1}{2}\bar{\sigma}^2[P]$ 所得的范围小，也比文[7,11]的范围小，但文[7]中 F^* 所对应的 $J=\frac{1}{2}\bar{\sigma}^2[V]\cdot\bar{\sigma}^2[V^{-1}] = 7.99998$. 因此可以说，条件数作为一种鲁棒性能指标并不比 $\frac{1}{2}\|A+BF\|_F^2$ 好.

如果取不同的初值，所得的 J^* 完全相同，收敛点都有 $\partial J/\partial U = 0$. 但 F^* 相差很大.

例 2[3]. 系统由(2.1)式给出，$n=5$，$m=2$.

$$A=\begin{bmatrix}-0.1094 & 0.0628 & 0 & 0 & 0\\ 1.306 & -2.132 & 0.9807 & 0 & 0\\ 0 & 1.595 & -3.149 & 1.547 & 0\\ 0 & 0.0355 & 2.632 & -4.257 & 1.855\\ 0 & 0.00227 & 0 & 0.1636 & -0.1625\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0.0638 & 0\\ 0.0838 & -0.1396\\ 0.1004 & -0.206\\ 0.0063 & -0.0128\end{bmatrix},$$

给定闭环极点为，$-1\pm j1, -1, -0.2, -0.5$.

文[3]利用间接的方法优化条件数，最好的结果是 $\bar{\sigma}[V]\cdot\bar{\sigma}[V^{-1}] = 33.2689$. 对应于 $\|(SI-A-BF)^{-1}\|_\infty = 14.353$，用最速下降梯度法优化 $J=\frac{1}{2}\bar{\sigma}^2[P]$ 和 $J=\frac{1}{2}\bar{\sigma}^2[V]\cdot\bar{\sigma}^{-2}[V^{-1}]$，有如下结果:

1) $J=\frac{1}{2}\bar{\sigma}^2[P]$. 取初值 $U_0=\begin{bmatrix}-4 & 40 & 20 & -20 & 60\\ 6 & 8 & 20 & -10 & 50\end{bmatrix}$，得到 $J_0 = 20943.25$，$J_1 = 2313.167$，$J_2 = 1949.212,\cdots$，$J_{33} = 1687.368$. 在这一点，P 的最大两个奇异值相等，约为 58.09248. 梯度法停止迭代. 此时

$$F_{33}=\begin{bmatrix}-58.91148 & 95.73251 & -212.9592 & 193.06700 & -32.49136\\ -21.82070 & 41.93652 & -71.43281 & 55.18547 & -5.07976\end{bmatrix},$$

$$\|(SI-A-BF_{33})^{-1}\|_\infty=11.4052,\ \bar{\sigma}[P]=58.09248.$$

鲁棒稳定范围是 $\gamma<\max[1/11.4052,1/58.09248]=0.08768$. 比文[3]的范围 $\gamma<1/14.353=0.06967$ 大.

2) $J=\frac{1}{2}\bar{\sigma}^2[V]\cdot\bar{\sigma}^2[V^{-1}]$. U_0 的初值同 1), 得 $\bar{\sigma}[V]\cdot\bar{\sigma}[V^{-1}]=37.64524$、最后 $J^*=503.4385$, 对应于 $\bar{\sigma}[V^*]\cdot\bar{\sigma}[(V^*)^{-1}]=31.73133$.

$$F^*=\begin{bmatrix}-65.10618 & 96.10510 & -204.13021 & 171.98250 & -41.15573\\ -35.58604 & 26.39475 & -40.34365 & 26.80191 & 2.66021\end{bmatrix},$$

$$\|(SI-A-BF^*)^{-1}\|_\infty=14.585.$$

鲁棒稳定范围是 $\gamma<1/14.585=0.06856$ 这比文[3]的范围还小. 虽然文[3]的条件数比 $\bar{\sigma}[V^*]\cdot\bar{\sigma}[(V^*)^{-1}]$ 大,这也说明条件数不是一个很好的鲁棒性指标. 但对 $\bar{\sigma}[P]$ 进行优化,却能使鲁棒稳定范围有明显的改善.

本文通过引入矩阵函数 f: $U\in R^{m\times n}\to(F,V)\in R^{m\times n}\times R^{n\times n}$ 使 $V^{-1}(A+BF)V=A_1$ 的极点配置约束条件得以放松,并导出了目标函数 $J=\frac{1}{2}\bar{\sigma}^2[P]$ 和 $J=\frac{1}{2}\bar{\sigma}^2[V]\cdot\bar{\sigma}^2[V^{-1}]$ 对 U 的梯度. 虽然 $J(U)$ 的函数关系极其复杂,但算例说明,梯度方法能有效地使目标函数下降,求得极小点,或 P 的最大两个奇异值相遇的点, 使闭环系统的鲁棒稳定性得到很大的改善. 虽然 $\bar{\sigma}[P]$ 用于判别鲁棒稳定性具有较大的保守性,但 $\bar{\sigma}[P]$ 优化后, $\|(SI-A-BF)^{-1}\|_\infty$ 总能趋于较小的值. 相反,条件数虽然能得到很好的优化,收敛于最小值或极小值,但条件数优化后, $\|(SI-A-BF)^{-1}\|_\infty$ 却不一定小.

附 录

梯度的推导.

记 $X\otimes Y$ 为 X 与 Y 的 Kroneker 积, trX 为 X 的迹; csX、rsX 分别为 X 的列展开、行展开[12],则有以下性质:

1) $trX=trX'$, $tr[XY]=tr[YX]$, $tr[X+Y]=trX+trY$.

2) $tr[XY]=rsX\cdot csY=rsY\cdot csX$.

3) $cs[XYZ]=(Z'\otimes X)\cdot csY$, $rs[XYZ]=rsY\cdot(X'\otimes Z)$.

4) 对于 $X\in R^{m\times n}$, $Y\in R^{n\times p}$,

$$cs(XY)=(I_p\otimes X)\cdot csY=(Y'\otimes I_m)\cdot csX,$$
$$rs(XY)=rsY\cdot(X'\otimes I_p)=rsX\cdot(I_m\otimes Y).$$

由性质 4) 可得如下结论:

定理 A.1. $AV-VA_1=-BU$ 等效于 $(I_n\otimes A-A_1'\otimes I_n)\cdot csV=-(I_m\otimes B)\cdot csU$ 对于 $M,N,Q\in R^{n\times n}$, $MX+XN=Q$ 等效于

$$(I_n\otimes M+N'\otimes I_n)\cdot csX=csQ \text{ 以及, } rsX(M'\otimes I_n+I_n\otimes N)=rsQ.$$

定理 4.1 的证明. 由 $P'Pw=\lambda w$ 可得

$$\left(\frac{\partial P'}{\partial u_{ij}}P+P'\frac{\partial P}{\partial u_{ij}}\right)w+P'P\frac{\partial w}{\partial u_{ij}}=\frac{\partial\lambda}{\partial u_{ij}}w+\lambda\frac{\partial w}{\partial u_{ij}},$$

两边同时乘以 w'，注意到 $w'w=1$，$w'P'P=\lambda w'$，可得

$$\frac{\partial\lambda}{\partial u_{ij}}=w'\left(\frac{\partial P'}{\partial u_{ij}}P+P'\frac{\partial P}{\partial u_{ij}}\right)w=2w'P'\frac{\partial P}{\partial u_{ij}}w,$$

因此

$$\begin{aligned}\partial J/\partial u_{ij}&=w'P'\frac{\partial P}{\partial u_{ij}}w=tr\left[w'P'\frac{\partial P}{\partial u_{ij}}w\right]\qquad\left(J=\frac{1}{2}\lambda=\frac{1}{2}\lambda_{\max}[P'P]\right)\\&=tr\left[ww'P'\frac{\partial P}{\partial u_{ij}}\right]\qquad(\text{性质 }1)\\&=rs[ww'P']\cdot cs\frac{\partial P}{\partial u_{ij}}.\qquad(\text{性质 }2)\end{aligned}$$

由 $(A+BF)'P+P(A+BF)=-2I_n$，得

$$(A+BF)'\frac{\partial P}{\partial u_{ij}}+\frac{\partial P}{\partial u_{ij}}(A+BF)=-\left[\left(B\frac{\partial F}{\partial u_{ij}}\right)'P+PB\frac{\partial F}{\partial u_{ij}}\right],$$

再由定理 A. 1 可得，

$$cs\frac{\partial P}{\partial u_{ij}}=-[I_n\otimes(A+BF)'+(A+BF)'\otimes I_n]^{-1}\cdot cs\left[\left(B\frac{\partial F}{\partial u_{ij}}\right)'P+PB\frac{\partial F}{\partial u_{ij}}\right],$$

因此，

$$\partial J/\partial u_{ij}=-rs[ww'P']\cdot[I_n\otimes(A+BF)'+(A+BF)'\otimes I_n]^{-1}\cdot cs\left[\left(B\frac{\partial F}{\partial u_{ij}}\right)'P+PB\frac{\partial F}{\partial u_{ij}}\right].$$

设 X 为 $X(A+BF)'+(A+BF)X=-ww'P'$ 的解，则由定理 A.1，可得

$$-rs[ww'P']\cdot[I_n\otimes(A+BF)'+(A+BF)'\otimes I_n]^{-1}=rsX.$$

因此

$$\begin{aligned}\partial J/\partial u_{ij}&=rsX\cdot cs\left[\left(B\frac{\partial F}{\partial u_{ij}}\right)'P+PB\frac{\partial F}{\partial u_{ij}}\right]\\&=tr\left[X\left(B\frac{\partial F}{\partial u_{ij}}\right)'P+XPB\frac{\partial F}{\partial u_{ij}}\right]=tr\left[P'B\frac{\partial F}{\partial u_{ij}}X'+XPB\frac{\partial F}{\partial u_{ij}}\right]\\&=tr\left[(X'P'+XP)B\frac{\partial F}{\partial u_{ij}}\right].\qquad(trM'=trM,tr(MN)=tr(NM))\end{aligned}$$

注意到

$$\frac{\partial F}{\partial u_{ij}}=\frac{\partial(UV^{-1})}{\partial u_{ij}}=\frac{\partial U}{\partial u_{ij}}V^{-1}-UV^{-1}\frac{\partial V}{\partial u_{ij}}V^{-1}=\left(\frac{\partial U}{\partial u_{ij}}-F\frac{\partial V}{\partial u_{ij}}\right)V^{-1},$$

有

$$\partial J/\partial u_{ij}=tr\left[\underbrace{V^{-1}(X'P'+XP)B}_{Q_1}\frac{\partial U}{\partial u_{ij}}\right]-tr\left[\underbrace{V^{-1}(X'P'+XP)BF}_{Q_2}\frac{\partial V}{\partial u_{ij}}\right],$$

$$\begin{aligned}\partial J/\partial u_{ij}&=rsQ_1\cdot\frac{\partial csU}{\partial u_{ij}}-rsQ_2\frac{\partial csV}{\partial u_{ij}}\\&=[rsQ_1+rsQ_2(I_n\otimes A-A_1'\otimes I_n)^{-1}(I_m\otimes B)]\frac{\partial csU}{\partial u_{ij}}.\qquad(\text{定理 }A.1).\end{aligned}$$

设 Y 是 $YA-A_1Y=Q_2$ 的解，再由定理 $A.1$ 可知，

$$\underbrace{rsQ_2\cdot(I_n\otimes A-A_1'\otimes I_n)^{-1}}_{rsY}(I_m\otimes B)=rs(YB),$$

因此

$$\partial J/\partial u_{ij}=rs(Q_1+YB)\cdot\frac{\partial csU}{\partial u_{ij}},$$

即　　$\partial J/\partial U=(Q_1+YB)'$，　(注意到 $Q_1+YB\in R^{n\times m},U\in R^{m\times n}$)．

其中 $Q_1=V^{-1}(X'P'+XP)B$，而 X 和 Y 分别满足

$$X(A+BF)'+(A+BF)X=-ww'P',\quad YA-A_1Y=V^{-1}(X'P'+XP)BF.$$

定理证毕.

定理 4.2 的证明. 类似定理 4.1 的证明,有

$$\frac{\partial J_1}{\partial u_{ij}}=w_1'V'\frac{\partial V}{\partial u_{ij}}w_1=tr\left[w_1w_1'V'\frac{\partial V}{\partial u_{ij}}\right]=rs(w_1w_1'V')\cdot cs\frac{\partial V}{\partial u_{ij}}$$

$$=-rs(w_1w_1'V')\cdot(I_n\otimes A-A_1'\otimes I_n)^{-1}(I_m\otimes B)\cdot\frac{\partial csU}{\partial u_{ij}}.$$

设 X 为 $XA-A_1X=-w_1w_1'V'$ 的解,由定理 A.1 和性质 4)可得

$$-rs(w_1w_1'V')\cdot(I_n\otimes A-A_1'\otimes I_n)^{-1}(I_m\otimes B)=rs(XB),$$

因此

$$\partial J_1/\partial u_{ij}=rs(XB)\cdot\frac{\partial csU}{\partial u_{ij}},$$

即 $\partial J_1/\partial U=(XB)'$, X 满足 $XA-A_1X=-w_1w_1'V'$.

同理可得

$$\frac{\partial J_2}{\partial u_{ij}}=w_2'(V^{-1})'\frac{\partial V^{-1}}{\partial u_{ij}}w_2=-w_2'(V^{-1})'V^{-1}\frac{\partial V}{\partial u_{ij}}V^{-1}w_2$$

$$=-tr\left[V^{-1}w_2w_2'(V^{-1})'V^{-1}\frac{\partial V}{\partial u_{ij}}\right]$$

$$=rs[V^{-1}w_2w_2'(V^{-1})'V^{-1}]\cdot(I_n\otimes A-A_1'\otimes I_n)^{-1}(I_m\otimes B)\frac{\partial csU}{\partial u_{ij}}.$$

设 Y 是 $YA-A_1Y=V^{-1}w_2w_2'(V^{-1})'V^{-1}$ 的解,则

$$\partial J_2/\partial u_{ij}=rs(YB)\cdot\frac{\partial csU}{\partial u_{ij}},$$

即

$$\partial J_2/\partial u_{ij}=(YB)'.$$

由于 $J=2J_1\cdot J_2$, 所以 $\partial J/\partial U=2J_1\dfrac{\partial J_2}{\partial U}+2J_2\dfrac{\partial J_1}{\partial U}$, 最后可得, $\partial J/\partial U=2(ZB)'$, 其中 $Z=J_2X+J_1Y$, 或 Z 满足 $ZA-A_1Z=-J_2w_1w_1'V'+J_1V^{-1}w_2w_2'(V^{-1})'V^{-1}$. 定理证毕.

以上两个定理的证明虽然步骤较多,但很有系统性、规律性,多次应用 $tr(MN)=tr(NM)$ 及 $tr(MN)=rsM\cdot csN$ 的性质,以及定理 A.1 关于 Kroneker 积与矩阵方程的关系、使最后结论非常简单,这种方法还可广泛地用于优化其它类似的目标函数.

参 考 文 献

[1] Badr RI, Hassan MF, Bernussou J, Bilal A Y. Stability and Performance Robustness for Multivariable Linear Systems. *Automatica*, 1989, **25** (6): 935—942.

[2] Keel LH, Bhattacharyya S P, Howze J H. Robust Control with Structured Perturbation *IEEE*, 1988, **AC-33** (1): 68—78.

[3] Kautsky J, Nichols N K Dooren P Van. Robust Pole Assignment in Linear State Feedback Systems. *Int. J. Contr.*, 1985, **41** :1129—1155.

[4] Kautsky J, Nichols NK. Robust Pole Assignment in Systems Subjected to Structured Perturbations, *Syst. Contr. Lett.*, 1990, **15**: 373—380.

[5] Hu T S, Shi S J. The Set of Feedback Matrices that Assign the Poles of a System. Proc. of MTNS-89, **2**: 129—135.

[6] 胡庭姝,施颂椒,张钟俊. 一类关于鲁棒性和敏感性的泛函的优化. 自动化学报,1991,**17**(5): 592—596.

[7] 胡庭姝,施颂椒,张钟俊. 鲁棒设计:闭环系统矩阵的 Frobenius 范数的最小化. 控制与决策,1989,**4**(6): 24—29.

[8] Yedavalli R K, Liang Z. Reduced Conservatism in Stability Robustness Bounds by State Transformation. *IEEE*, 1986, **AC-31**: 863—865.

[9] Hinrichsen D, Pritchard A J. Stability Radius for Structured Perturbations and the Algebraic Riccati Equations. *Syst. Cont. Lett.*, 1986, **8**:105—113.

[10] Hinrichsen D, Prichard A J. Riccati Equation Approach to Maximizing the Complex Stability Radius by State Feedback. *Int. J. Contr.*, 1990, **52**: 769—794.

[11] Dickman A. On the Robustness of Multivariable Linear Feedback Systems in State Space Representation. *IEEE Trans.* 1987, **AC-32**: 467—470.

[12] 须田信英. 曹长修译. 自动控制中的矩阵理论. 科学出版社, 1979.

A NEW APPROACH TO ROBUST DESIGN IN TIME DOMAIN-ON MINIMIZING $\bar{\sigma}[P]$ AND $\bar{\sigma}[V]\bar{\sigma}[V^{-1}]$

Hu Tingshu　Shi SongJiao　Zhang ZhongJun

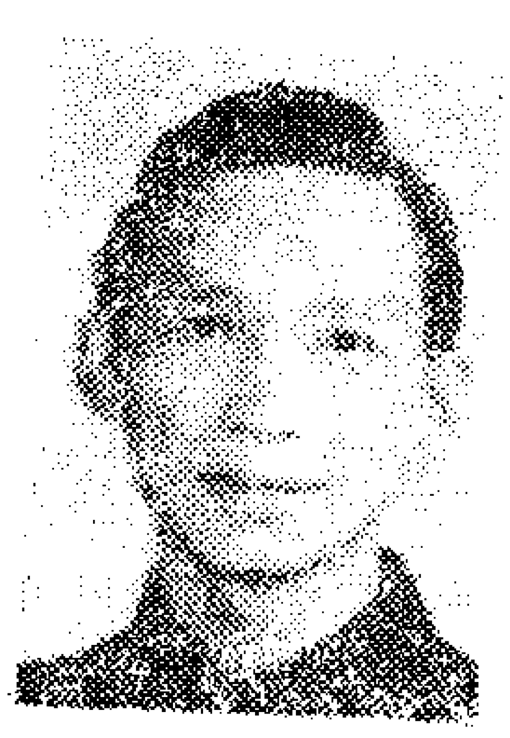
(*Shanghai Jiao Tong University, Dept. of Automatic control* 200030)

Abstract

This paper suggest a method to minimize $\bar{\sigma}[P]$ and $\bar{\sigma}[V]\bar{\sigma}[V^{-1}]$ under the constraint of pole assignment. where P is the selution to $(A+BF)'P+P(A+BF)=-2I_n$, and V is the eigenvector matrix of $A+BF$. These two indices reflect the robustness of a system. By defining a matrix function and introducing a free matrix U, the pole assignment constraint is relaxed, and the gradient $\bar{\sigma}^2[P]/\partial U$ and $\partial\bar{\sigma}^2[V]\bar{\sigma}^2[V^{-1}]/\partial U$ are obtained. Thus. robust design can be achieved by gradient method. Examples show that this method is very effective.

Key words: Robust design; condition number. Lyapunov criterion; pole assignment; gradient method.

胡庭姝　生于 1966 年. 分别于 1985、1988、1990 年在上海交通大学获学士学位，硕士学位和博士学位. 1992 年被提升为副教授. 主要研究领域为鲁棒控制和 H^∞ 控制.



施颂椒　上海交通大学自动控制系教授，博士生导师，中国自动化学会教育工作委员会副主任. 长期从事控制理论及应用学科的教学与科研工作，曾对鲁棒控制与 H^∞ 控制、控制系统 CAD、广义系统等作过研究. 目前感兴趣于自适应鲁棒控制.

张钟俊　照片、简介见本刊第 17 卷第 6 期.