第 20 卷 第 2 期 自 动 化 学 报 Vol. 20, No. 2
1994 年 3 月 ACTA AUTOMATICA SINICA Mar., 1994

控制系统的排列与模型匹配问题

刘 频 郑毓蕃
(上海交通大学自控系 200030) (上海华东师范大学数学系 200062)
张钟俊
(上海交通大学自控系 200030)

摘 要

本文利用排列思想对非线性系统的模型匹配问题进行了研究，分别给出了非线性广义模型匹配、模型匹配问题解存在的充要条件，并且给出了求解的具体算法.

关键词: 排列技术，模型匹配，非线性系统.

1 引言及问题描述

模型匹配问题 (Model Matching Problem, 简记为 MMP) 是控制系统理论的基本课题之一. 粗略地说，MMP 即是对一个控制系统设计一个补偿器，使得闭环系统的动力学输入输出特性具有预先指定的性质. 如果将预定的性质以一动力学模型来表示的话，MMP 就是设计一补偿器使闭环系统尽可能与此模型相匹配. 如果模型与控制系统均是线性系统，则称为线性系统的模型匹配问题，否则称为非线性模型匹配问题.

线性模型匹配问题的研究已有较长的历史. 许多学者用不同的方法得到了各种形式的解. 例如，Moore 与 Silverman[1] 运用 Silverman 结构算法[2]给出了一种解. Morse[3] 运用几何概念给出了包含一个适宜的可控子空间结构的一种解. Morse[4] 以及 Emre, Hautus[5] 又指出模型匹配问题与干扰解耦问题之间存在着等价性. 这部分工作对非线性模型匹配问题具有重要的影响.

非线性模型匹配问题大致分为两大类. 一类是以非线性系统匹配线性系统，其研究成果参见文[6,7]. 另一类是一般非线性系统模型匹配问题，对这类问题进行全面深入地讨论，并获得比较好结果的是 Di Benedetto 与 Isidori, 其主要思想为以微分几何为工具，将模型匹配问题转化为一个干扰解耦问题，从而得出 MMP 有解的充分条件和必要条件[8,9].

建立在非线性结构算法[10]基础上的用系统的结构不变量描述 MMP 有解的充分条件[11]的方法是解决 MMP 的另一种方法. 该方法严格依赖于结构算法，因而在系统结构性质的描述上有一定的局限性. 同时，此解的条件也不是必要的. 本文的主要工作是从一个独立的、不同的角度来阐明非线性系统 MMP 与广义 MMP (简记为 GMMP) 解的

本文于 1991 年 10 月 8 日收到

存在性问题,给出了 MMP 与 GMMP 有解的充要条件[12],这个结果比文[11]的结论更广泛,也更为直观、简洁.

下面给出模型匹配问题的数学描述. 考虑非线性对象 P

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})+G(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}, & (1.1\mathrm{a})\\ \boldsymbol{y}=\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}), & (1.1\mathrm{b})\end{cases}$$

其中 $\boldsymbol{x}\in X\subset R^n,\boldsymbol{u}\in R^m,\boldsymbol{y}\in R^p,\boldsymbol{f}(\cdot)$ 与阵矩 $G(\cdot)$ 的 m 个列向量 $\boldsymbol{g}_1,\cdots,\boldsymbol{g}_m$ 为 R^n 上的实解析向量场,$\boldsymbol{h}$ 为向量解析函数. 另外,假设给定模型 M 的方程为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}_M(t)=\boldsymbol{f}_M(\boldsymbol{x}_M)+G_M(\boldsymbol{x}_M)\boldsymbol{v}, & (1.2\mathrm{a})\\ \boldsymbol{y}_M=\boldsymbol{h}_M(\boldsymbol{x}_M), & (1.2\mathrm{b})\end{cases}$$

其中 $\boldsymbol{x}_M\in X_M\subset R^{n_1}$, $\boldsymbol{v}\in R^{m_1}$, $\boldsymbol{y}_M\in R^p$, 且 $\boldsymbol{f}_M,G_M,\boldsymbol{h}_M$ 为实解析的. MMP 即为对于模型(1.2)及系统(1.1)寻找一真的 (proper) 正则补偿器 Q 及函数 $\tau(\cdot)$

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{z}}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x})+B(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x})\boldsymbol{v},\boldsymbol{z}(0)=z_0=\tau(x_{M_0}). & (1.3\mathrm{a})\\ \boldsymbol{u}=\boldsymbol{c}(z,x)+D(z,x)v, & (1.3\mathrm{b})\end{cases}$$

其中 $\boldsymbol{z}\in X_Q\subset R^{n_2}$,使得闭环系统 P_0Q

$$\begin{cases}\begin{pmatrix}\dot{\boldsymbol{x}}\\ \dot{\boldsymbol{z}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})+G(\boldsymbol{x})\boldsymbol{c}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x})\\ \boldsymbol{a}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x})\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}G(x)D(z,x)\\ B(z,x)\end{pmatrix}\boldsymbol{v}, & (1.4\mathrm{a})\\ \hat{\boldsymbol{y}}=\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}). & (1.4\mathrm{b})\end{cases}$$

的输出与原模型的输入之差 $\boldsymbol{y}_e=\hat{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z},\boldsymbol{v})-\boldsymbol{y}_M(\boldsymbol{x}_M,\boldsymbol{v})$与 $\boldsymbol{v}$ 无关.广义模型匹配问题(GMMP) 即为寻找一适当正数 $q>0$ 及一非真(nonproper) 正则补偿器 Q 及函数 $\boldsymbol{\tau}(\cdot)$

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{z}}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x})+\boldsymbol{b}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},\cdots,\boldsymbol{v}^{(q)}),\boldsymbol{z}(0)=\boldsymbol{\tau}(x_{M_0}), & (1.5\mathrm{a})\\ \boldsymbol{u}=\boldsymbol{c}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},\cdots,\boldsymbol{v}^{(q)}), & (1.5\mathrm{b})\end{cases}$$

使得相应的闭环系统 P_0Q 的输出与原输出之差 $\boldsymbol{y}_e=\hat{\boldsymbol{y}}-\boldsymbol{y}_M$ 与 $\boldsymbol{v}^{(q)}$ 无关. 这里,(1.3)式或(1.5)式描述的补偿器 Q 称为正则的是指闭环系统(1.4)为可逆的. 即(1.4)式的输出微分秩等于 m_1.

2 排列技术

对于系统(1.1)中的输出 $\boldsymbol{y}$ 的各分量,令

$$h_l^{(0)}(x)=h_l(x),$$

$$h_l^{(k+1)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\cdots,\boldsymbol{u}^{(k)})=\frac{\partial h_l^{(k)}}{\partial x}(\boldsymbol{f}+G\boldsymbol{u})+\frac{\partial h_l^{(k)}}{\partial u}\dot{\boldsymbol{u}}+\cdots+\frac{\partial h_l^{(k)}}{\partial \boldsymbol{u}^{(k-1)}}\boldsymbol{u}^{(k)}, \quad (2.1)$$

其中 $l=1,\cdots,p,k>0$. 将(2.1)式两边同时微分得

$$\mathrm{d}y_l=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial h_l^{(0)}}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i,$$

$$\mathrm{d}y_l^{(k)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial h_l^{(k)}}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i+\sum_{\nu=0}^{k-1}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial h_l^{(k)}}{\partial u_j^{(\nu)}}\mathrm{d}u_j^{(\nu)},(k\geqslant 1). \quad (2.2)$$

记 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\cdots\boldsymbol{u}^{(N-1)})$ 的半纯函数域为 $\mathbb{K}$, 为中 N 为充分大的正整数. 记由 $\{\mathrm{d}x_i,\mathrm{d}u_j^{(\nu)}\mid i\in\underline{n},\ j\in\underline{m},\ 0\leqslant\nu<N\}$ 张成的 $\mathbb{K}$ 上的矢量空间为 $\mathbb{E}$. 则由 (2.2) 式知 $\mathrm{d}y_l^{(k)}(l\in\underline{p},$

$k \in [0,N]$）为 $\mathbb{E}$ 中的一个元素.

将 $\mathbb{E}$ 分解为两个子空间

$$\mathbb{E}_x = \mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{dx_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n\},$$
$$\mathbb{E}_u = \mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{du_j^{(\nu)} \mid 1 \leqslant j \leqslant m, 0 \leqslant \nu < N\}.$$

显然, $\mathbb{E} = \mathbb{E}_x \oplus \mathbb{E}_u$.

$\{dy_l^{(k)}\}$ 的排列定义为

$$dy_1, dy_2, \cdots, dy_p, d\dot{y}_1, d\dot{y}_2, \cdots, d\dot{y}_p, \cdots, dy_1^{(k)}, dy_2^{(k)}, \cdots, dy_p^{(k)}, \cdots. \tag{2.3}$$

等价地,将 $\{y_l^{(k)}\}$ 的排列定义为

$$y_1, y_2, \cdots, y_p, \dot{y}_1, \dot{y}_2, \cdots, \dot{y}_p, \cdots, y_1^{(k)}, y_2^{(k)}, \cdots, y_p^{(k)}, \cdots. \tag{2.4}$$

在上式中, $y_{l_1}^{(k_1)}$ 在 $y_{l_2}^{(k_2)}$ 的左边(记为 $y_{l_1}^{(k_1)} \prec y_{l_2}^{(k_2)}$)的充要条件为 $k_1 < k_2$ 或 $k_1 = k_2$, 但 $l_1 < l_2$. 需要注意的是,对于 $p > 1$ 的情况, $\{y_l^{(k)}\}$ 的排列(2.4)是不唯一的. 事实上,对于 $(1,2,\cdots,p)$ 的任一种置换 $(l_1,\cdots,l_p)$,均对应于 $\{y_l^{(k)}\}$ 的一种排列

$$y_{l_1}, y_{l_2}, \cdots, y_{l_p}, \dot{y}_{l_1}, \dot{y}_{l_2}, \cdots, \dot{y}_{l_p}, \cdots, y_{l_1}^{(k)}, y_{l_2}^{(k)}, \cdots, y_{l_p}^{(k)}, \cdots. \tag{2.4}$$

定义 1. 对于(2.3),(2.4)中的排列,如果

$$dy_l^{(k)} \in \mathbb{E}_x + \mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{dy_\alpha^{(\beta)} \mid y_\alpha^{(\beta)} \prec y_l^{(k)}\}, \tag{2.5}$$

则称 $dy_l^{(k)}$ 为 $\boldsymbol{u}$-左相关的,否则称 $dy_l^{(k)}$ 为(2.3)式中的 $\boldsymbol{u}$-左独立元. 若 $dy_l^{(k)}$ 为(2.3)式中的 $\boldsymbol{u}$-左相关元(或 $\boldsymbol{u}$-左独立元),则称 $y_l^{(k)}$ 为(2.4)式中的 $\boldsymbol{u}$-左相关(或 $\boldsymbol{u}$-左独立)元.

定义 2. 给定排列(2.4),记集合

$$\mathscr{L}_u = \{y_j^{(k)} \mid y_j^{(k)} \text{ 为 } \boldsymbol{u}\text{-左独立元}, 1 \leqslant j \leqslant p, k > 0\}, \tag{2.6}$$

且对于任一 $l \in \underline{p}$,记

$$k_l = \begin{cases} \infty & ,\text{若 } y_l^{(k)} \notin \mathscr{L}_u, \forall k > 0, \\ \min\{k \mid y_l^{(k)} \in \mathscr{L}_u\}, & \text{其它}, \end{cases} \tag{2.7}$$

称 k_l 为 y_l 的 $\boldsymbol{u}$-左独立阶.

由此定义可直接得下面的命题:

命题 1. 对所有 $l \in \underline{p}$ 有

i）若 $k_l < \infty$,则存在唯一的实函数 ϕ_{0l} 及矢量函数 ϕ_{1l} 使得

$$\begin{aligned} y_l^{(k_l)} = {} & \phi_{0l}(\boldsymbol{x}, y_\alpha^{(\beta)} \mid y_\alpha^{(\beta)} \prec y_l^{(k_l)}, \text{且 } y_\alpha^{(\beta)} \in \mathscr{L}_u) \\ & + \phi_{1l}(\boldsymbol{x}, y_\alpha^{(\beta)} \mid y_\alpha^{(\beta)} \prec y_l^{(k_l-1)}, \text{且 } y_\alpha^{(\beta)} \in \mathscr{L}_u)\boldsymbol{u}, \end{aligned} \tag{2.8}$$

$$y_l^{(\gamma)} = \phi_l^{(\gamma)}(\boldsymbol{x}, y_\alpha^{(\beta)} \mid y_\alpha^{(\beta)} \prec y_l^{(\gamma)} \text{ 且 } y_\alpha^{(\beta)} \in \mathscr{L}_u), 0 \leqslant \gamma < k_l. \tag{2.9}$$

ii）若 $k_l = \infty$,则对于任一 $\gamma \geqslant 0$,均存在函数 ϕ_{0l}^γ 使得

$$y_l^{(\gamma)} = \phi_{0l}^\gamma(x, y_\alpha^{(\beta)} \mid y_\alpha^{(\beta)} \prec y_l^{(\gamma)} \text{ 且 } y_\alpha^{(\beta)} \in \mathscr{L}_u), \tag{2.10}$$

(2.8)式又称为非线性系统(1.1)的无穷远处结构方程(Structure equation at infinity).

命题 2. (2.8)式是(1.1)式的无穷远处结构方程. 记 $\sigma = \{l \mid k_l < \infty, l \in \underline{p}\}$,且设 σ 中元素的排列顺序为 $l_1 < l_2 < \cdots < l_t (t = \dim\{\sigma\})$,则

$$\mathrm{rank}\boldsymbol{\phi}_1 \triangleq \mathrm{rank}\begin{bmatrix} \phi_{1l_1} \\ \vdots \\ \phi_{1l_t} \end{bmatrix} = t. \tag{2.11}$$

3 非线性系统的模型匹配

对于(1.1)式给定的对象 P 的输出 $y_i(i\in \underline{p})$,给出其排列为

$$y_1,y_2,\cdots,y_p,\dot{y}_1,\dot{y}_2,\cdots,\dot{y}_p,\cdots,y_1^{(k)},y_2^{(k)},\cdots,y_p^{(k)},\cdots \tag{3.1}$$

设此排列满足(2.4)式的假设条件,记分量 y_l 的左独立阶为 $k_l\,(l\in \underline{p})$, 同时考察复合系统 P_0M

$$\begin{cases}\begin{pmatrix}\dot{\boldsymbol{x}}\\ \dot{\boldsymbol{x}}_M\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{f}(x)\\ \boldsymbol{f}_M(x_M)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ G_M(\boldsymbol{x}_M)\end{pmatrix}\boldsymbol{v}+\begin{pmatrix}G(\boldsymbol{x})\\ 0\end{pmatrix}\boldsymbol{u}, & (3.2a)\\ \tilde{\boldsymbol{y}}=\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{h}_M(\boldsymbol{x}_M). & (3.2b)\end{cases}$$

令 $\hat{\boldsymbol{x}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{x}_M\end{pmatrix}$,对于具有(3.1)排列的对象 P, 假设对应复合系统 P_0M 的输出 $\tilde{\boldsymbol{y}}$ 的各分量的排列为

$$\tilde{y}_1,\tilde{y}_2,\cdots,\tilde{y}_p,\dot{\tilde{y}}_1,\dot{\tilde{y}}_2,\cdots,\dot{\tilde{y}}_p,\cdots,y_1^{(k)},y_2^{(k)},\cdots,y_p^{(k)},\cdots \tag{3.3}$$

若将 $\boldsymbol{v}$ 看作复合系统的参变量,记 $\tilde{k}_l$ 为 $\tilde{y}_l$ 的 $\boldsymbol{u}$-左独立阶,则易得

引理 1. 对于排列(3.1),(3.3),当视 $\boldsymbol{v}$ 为参变量时,恒有

$$k_l=\tilde{k}_l,l\in \underline{p}.$$

利用状态 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{x}_M$ 的解耦性及 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 关于 $\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{v}$ 的解耦性直接可得此引理.

同样考虑复合系统(3.2),令 $\tilde{\boldsymbol{u}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{v}\end{pmatrix}$, 将空间 $\mathbf{E}_{\boldsymbol{u}}$ 扩充为

$$\mathbf{E}\tilde{\boldsymbol{u}}=\{\mathrm{d}u_j^{(k)},\mathrm{d}v_i^{(l)}\,|\,1\leqslant j\leqslant m,1\leqslant i\leqslant m_1,k\geqslant 0,l\geqslant 0\}.$$

在排列(3.3)中,记 ρ_l 为分量 $\tilde{y}_l$ 的 $\tilde{\boldsymbol{u}}$-左独立阶,有如下定理:

定理 1. 对于系统(1.1)与复合系统(3.2)及其各自的排列(3.1)与(3.3), MMP 有解的充要条件为对于所有 $l\in \underline{p}$ 恒有 $k_l=P_l$ 且模型的输出微分秩为 m_1.

为了证明定理 1,给出下面的引理. 对集合 $\sigma=\{l\,|\,l\in \underline{p},k_l<\infty\}$,记 $\bar{k}=\max\{k_l:l\in\sigma\}$,则有

引理 2. 对于排列(3.1)与(3.3),若对于所有 $l\in \underline{p}$,恒有 $k_l=\rho_l$,则

i) 当 $l\in\sigma$ 时,存在函数 $\phi_{0l},\boldsymbol{\phi}_{1l},\boldsymbol{\phi}_{2l}$,使得

$$\begin{aligned}\tilde{y}_l^{(k_l)}=&\,\phi_{0l}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_M,\tilde{y}_\alpha^{(\beta)}\,|\,\tilde{y}_\alpha^{(\beta)}\in\mathscr{L}\tilde{u},\tilde{y}_\alpha^{(\beta)}\prec\tilde{y}_l^{(k_l)})\\ &+\boldsymbol{\phi}_{1l}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_M,\tilde{y}_\alpha^{(\beta)}\,|\,\tilde{y}_\alpha^{(\beta)}\in\mathscr{L}\tilde{u},\tilde{y}_\alpha^{(\beta)}\prec\tilde{y}_l^{(k_l)})\boldsymbol{u}\\ &+\boldsymbol{\phi}_{2l}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_M,\tilde{y}_\alpha^{(\beta)}\,|\,\tilde{y}_\alpha^{(\beta)}\in\mathscr{L}\tilde{u},\tilde{y}_\alpha^{(\beta)}\prec\tilde{y}_l^{(k_l-1)})\boldsymbol{v}.\end{aligned}\tag{3.4}$$

ii) 当 $l\bar{\in}\sigma$ 时,对于所有 $k>0$,存在函数 ϕ_{0l}^k,使得

$$\tilde{y}_l^{(k)}=\phi_{0l}^{(k)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_M,\tilde{y}_\alpha^{(\beta)}\,|\,\tilde{y}_\alpha^{(\beta)}\in\mathscr{L}\tilde{u},\tilde{y}_\alpha^{(\beta)}\prec\tilde{y}_l^{(k)}).\tag{3.5}$$

iii) 对于所有 $l\in\sigma$,将(3.4)式记为

$$\tilde{\boldsymbol{Y}}=\boldsymbol{\phi}_0+\Phi_1\boldsymbol{u}+\Phi_2\boldsymbol{v},\tag{3.6}$$

其中

$$\tilde{\boldsymbol{Y}}=\begin{pmatrix}\tilde{y}_{l_1}^{(k_{l_1})}\\ \vdots\\ \tilde{y}_{l_t}^{(k_{l_t})}\end{pmatrix},\boldsymbol{\phi}_0=\begin{pmatrix}\phi_{0l_1}\\ \vdots\\ \phi_{0l_t}\end{pmatrix},\Phi_1=\begin{pmatrix}\phi_{1l_1}\\ \vdots\\ \phi_{1l_t}\end{pmatrix},\phi=\begin{pmatrix}\phi_{2l_1}\\ \vdots\\ \phi_{2l_t}\end{pmatrix}.$$

且 $\{l_1,\cdots,l_t\}=\sigma, l_1<l_2<\cdots<l_t$，则 Φ_I 为行满秩的，即 Φ_I 存在右逆 Φ_I^+，且使 $\det\Phi_1\Phi_1^+=0$ 的点的集合是函数空间 $\mathbb{K}$ 上的零测度集。

该引理的证明由定义及第二节的命题直接可得。定理 1 的证明。充分性。对于所有 $l\in\sigma$，考虑集合 $\sigma_l=\left\{k:\bar{k}\rangle k\geqslant k_l\ \text{且}\ \dfrac{\partial[\phi_0\Phi_1\Phi_2]}{\partial\tilde{y}_l^{(k)}}\neq 0\right\}$，当 $\sigma_l\neq$ 空集时定义整数

$$\lambda_l=\max\{k-k_l\,|\,k\in\sigma_l\}. \tag{3.7}$$

当 $\lambda_l=0$ 时，定义参数

$$z_l=z_{l_0}=d_l=\text{const}.$$

当 $\lambda_l>0$ 时，定义向量

$$z_l=\begin{pmatrix} z_{l_0}\\ z_{l1}\\ \vdots\\ z_{i\lambda_l-1}\end{pmatrix},$$

满足动力学特性

$$\begin{aligned}
&\dot{z}_{l_0}=z_{l1}, && z_{l_0}(0)=\tilde{y}_l^{(k_l)}(0),\\
&\dot{z}_{l1}=z_{l2}, && z_{l1}(0)=\tilde{y}_l^{(k_l+1)}(0),\\
&\quad\vdots && \quad\vdots\\
&\dot{z}_{l\lambda_{l-1}}=d_l\triangleq\text{const}, && z_{l\lambda l-1}(0)=\tilde{y}_l^{(k_l+\lambda_l-1)}(0).
\end{aligned} \tag{3.8a}$$

将 z_{ij} 的表达式合记为

$$\dot{\boldsymbol{z}}_1=\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{z}_1)+\boldsymbol{d},\quad \boldsymbol{z}_1(0)=\boldsymbol{z}_{10}. \tag{3.8b}$$

对于(3.6)式中的 $\boldsymbol{\phi}_0$，Φ_1 及 Φ_2 的自变量 $\boldsymbol{x}_M$ 与 $y_\alpha^{(\beta)}$，考虑替换 $\boldsymbol{z}_0\longmapsto x_M, z_{l_0}\longmapsto y_l^{(k_l)}$ $(l\in\sigma)$。由引理 2 知，几乎对所有的 $\boldsymbol{d}$，函数阵 $\Phi_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}_0,\boldsymbol{z}_1)$ 均为左可逆的。令 $\boldsymbol{z}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{z}_0\\ \boldsymbol{z}_1\end{pmatrix}$，定义补偿器

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{z}}_0=\boldsymbol{f}_M(\boldsymbol{z}_0)+G_M(\boldsymbol{z}_0)\boldsymbol{v}, \boldsymbol{z}_0(0)=\boldsymbol{x}_M(,0)\\ \dot{\boldsymbol{z}}_1=\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{z}_1)+\boldsymbol{d}, \qquad \boldsymbol{z}_1(0)=\boldsymbol{z}_{10},\\ \boldsymbol{u}=\Phi_1^+\{\tilde{\boldsymbol{Y}}-\boldsymbol{\phi}_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})-\Phi_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})\boldsymbol{v}\},\end{cases} \tag{3.9}$$

其中 $\tilde{\boldsymbol{Y}}$ 为 z_1 的部分分量构成的向量，即

$$\tilde{\boldsymbol{Y}}=(z_{l_10}\cdots z_{l_t0})^T,$$

且当 σ_l 为空集时令 $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{z}_0$。将补偿器(3.9)代入闭环系统(1.4)后知此时 $\boldsymbol{y}_e=\tilde{\boldsymbol{y}}$，同时对于所有分量 $\tilde{y}_l(1\leqslant l\leqslant p)$ 恒有(注意到引理 2 的 ii))

$$\tilde{y}_l^{(k)}=\begin{cases}0, & \text{当 } k\geqslant\bar{k} \text{ 且 } l\in\sigma \text{ 时},\\ \phi_e(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_M,\boldsymbol{z}), & \text{其它}.\end{cases} \tag{3.10}$$

即 $\boldsymbol{y}_e=\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z},\boldsymbol{v})-\boldsymbol{y}_M(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_M,\boldsymbol{v})$ 与 $\boldsymbol{v}$ 无关。更进一步，对于排列(3.3)，若将 $\boldsymbol{u}$ 看作复合系统的参变量，记 β_l 为 $\tilde{y}_l$ 的 $\boldsymbol{v}$-左独立阶，由 $k_l=\rho_l$ 知，$\beta_l\geqslant k_l(l=1,\cdots,p)$。将补偿器(3.9)代入闭环系统(1.4)可得(注意到 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{x}_M$ 的动态解耦特性以及 $\boldsymbol{x}_M$ 与 $\boldsymbol{z}_0$ 的同构特性)

$$\begin{aligned}\hat{y}_l^{(\beta_l)}&=h_l^{(\beta_l)}(\boldsymbol{x})=\tilde{y}_l^{(\beta_l)}+y_{m_l}^{(\beta_l)}\\ &=a+\phi_{0l}(\boldsymbol{x}_M,y_{M\alpha}^{(\beta)}\,|\,y_{M\alpha}^{(\beta)}\prec y_{Ml}^{(\beta_l-1)}\ \text{且}\ y_{M\alpha}^{(\beta)}\in\mathscr{L}_v)\end{aligned}$$

$$+\boldsymbol{\phi}_{1l}(\boldsymbol{x}_M, y_{M\alpha}^{(\beta)} \mid y_{M\alpha}^{(\beta)} \prec y_{Ml}^{(\beta_l-1)} \text{ 且 } y_{M\alpha}^{(\beta)} \in \mathscr{L}_v)\boldsymbol{v}, l = 1, \cdots, p.$$

其中 a 为 0 或与 $\boldsymbol{v}$ 无关之函数 $\phi_l(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_M, \boldsymbol{z})$（见(3.10)式），且由模型的输出微分秩为 m_1 知

$$\Psi_1 = (\boldsymbol{\phi}_{11} \cdots \boldsymbol{\phi}_{1p})^T$$

满足 $\operatorname{rank}\tilde{\Psi}_1 = m_1$。因此，补偿器(3.9)是正则的，即(3.9)式为 MMP 的解．充分性得证．

必要性．设存在正则补偿器(1.3)使得 MMP 有解。记$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_M, \boldsymbol{u}, \cdots, \boldsymbol{u}^{(N-1)}, \boldsymbol{v}, \cdots, \boldsymbol{v}^{(N-1)})$ 的半纯函数域为 $\mathbb{K}$，$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_M, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{v}, \cdots, \boldsymbol{v}^{(N-1)})$ 的半纯函数域为 $\mathbb{K}_c$，且定义空间

$$\mathbb{E} = \operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{d\theta \mid \theta \in \mathbb{K}\}, \mathbb{E}_c = \operatorname{span}_{\mathbb{K}_c}\{d\theta \mid \theta \in \mathbb{K}_c\}.$$

显然，当 $\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 等由(1.3)式相联系时，有 $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{K}_c$。而当(1.3)式为正则时，有[13]

$$\dim_{\mathbb{K}}\mathbb{E} = \dim_{\mathbb{K}_c}\operatorname{span}_{\mathbb{K}_c}\mathbb{E}. \tag{3.11}$$

设此时存在 l_0 使得 $k_{l_0} \neq \rho_{l_0}$，则由定义知必有 $k_{l_0} > \rho_{l_0}$。考虑到系统已匹配，因此

$$d\tilde{y}_{l_0}^{(\rho_{l_0})} \in \operatorname{span}_{\mathbb{K}_c}\{d\boldsymbol{x}, d\boldsymbol{x}_M, d\boldsymbol{z}\},$$
$$d\tilde{y}_{l_0}^{(\rho_0)} \bar{\in} \operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{d\boldsymbol{x}, d\boldsymbol{x}_M\},$$

于是有

$$\dim_{\mathbb{K}}\mathbb{E} > \dim_{\mathbb{K}_c}\operatorname{span}_{\mathbb{K}_c}\mathbb{E},$$

即(1.3)式不是正则的，矛盾．故 $k_l = \rho_l, l = 1, \cdots, p$。证毕。

用类似的方法易得 GMMP 的解。

由引理 1 及命题 1,2 可得

引理 3. 对于复合系统(3.2)，排列(3.3)，当视 $\boldsymbol{v}$ 为参变时有

i) 对于所有 $l \in \sigma$，存在唯一函数 $\phi_{0l}, \boldsymbol{\phi}_{1l}$ 使得

$$\tilde{y}_l^{(k_l)} = \phi_{0l}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_M, \boldsymbol{v}, \cdots, \boldsymbol{v}^{(k_l-1)}, \tilde{y}_\alpha^{(\beta)}[\tilde{y}_\alpha^{(\beta)} \in \mathscr{L}u, \tilde{y}_\alpha^{(\beta)} \prec \tilde{y}_l^{(k_l)})$$
$$+\boldsymbol{\phi}_{1l}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_M, \boldsymbol{v}, \cdots, \boldsymbol{v}^{(k_l-2)}, \tilde{y}_\alpha^{(\beta)} \mid \tilde{y}_\alpha^{(\beta)} \in \mathscr{L}u, \tilde{y}_\alpha^{(\beta)} \prec \tilde{y}_l^{(k_l-1)})\boldsymbol{u}, \tag{3.12}$$

或简记为

$$\tilde{\boldsymbol{Y}}_1 = \boldsymbol{\phi}_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_M, \boldsymbol{v}, \cdots, \boldsymbol{v}^{(k-1)}, \tilde{y}_\alpha^{(\beta)} \mid \tilde{y}_\alpha^{(\beta)} \in \mathscr{L}_u, \tilde{y}_\alpha^{(\beta)} \prec \tilde{y}_l^{(k_l)}) + \Psi_1\boldsymbol{u}, \tag{3.13}$$

其中

$$\tilde{\boldsymbol{Y}}_1 = \begin{pmatrix} \tilde{y}_{l_1}^{(k_{l_1})} \\ \vdots \\ \tilde{y}_{l_t}^{(k_{l_t})} \end{pmatrix}, \boldsymbol{\phi}_0 = \begin{pmatrix} \phi_{0l_1} \\ \vdots \\ \phi_{0l_t} \end{pmatrix}, \Psi_1 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\phi}_{1l_1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\phi}_{1l_t} \end{pmatrix},$$

且 $\{l_1, \cdots, l_t\} = \sigma, l_1 < \cdots < l_t, \bar{k} = k_{l_t}$，则 Ψ_1 为行满秩的，即存在右逆 Ψ_1^+。

ii) 对于所有 $l \bar{\in} \sigma$ 及任意 $\bar{k} \geqslant k \geqslant 0$，存在函数 ϕ_{0l}^k 使得

$$\tilde{y}_l^{(k)} = \phi_{0l}^k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_M, \boldsymbol{v}, \cdots, \boldsymbol{v}^{(k-1)}, \tilde{y}_\alpha^{(\beta)} \mid \tilde{y}_\alpha^{(\beta)} \in \mathscr{L}_u, \tilde{y}_\alpha^{(\beta)} \prec \tilde{y}_l^{(k)}). \tag{3.14}$$

定理 2. 对于系统(1.1)与复合系统(3.2)及其各自的排列 (3.1)，(3.3)，GMMP 有解的充要条件为，对于所有 $l \bar{\in} \sigma$ 恒有 $\rho_l = \infty$，且模型的输出微分秩为 m_1。这里 $\sigma = \{l: l \in \underline{p}, k_l < \infty\}$。

证明．充分性．设对所有 $l \bar{\in} \sigma$ 有 $\rho_l = \infty$。令 $q = \bar{k}$，则对所有 $l \bar{\in} \sigma$ 有

$$\tilde{y}_l^{(k)} = \phi_{0l}^k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_M, \boldsymbol{v}, \cdots, \boldsymbol{v}^{(q-1)}, \tilde{y}_\alpha^{(\beta)} \in \mathscr{L}_u, \tilde{y}_\alpha^{(\beta)} \prec \tilde{y}_l^{(k)}), k > 0. \tag{3.15}$$

对于 $l \in \sigma$，考虑集合 $\sigma_l = \left\{k: \bar{k} > k \geqslant k_l, \dfrac{\partial[\Psi, \phi_0]}{\partial \tilde{y}_l^{(k)}} \neq 0\right\}$，当 σ_l 为非空集时定义整数

$$\lambda_l = \max\{k - k_l : k \in \sigma_l\}, \tag{3.16}$$

$\boldsymbol{z}_1$ 如 (3.8b) 式，将(3.12)式中的 $\boldsymbol{\phi}_0$、Ψ_1 中的自变量 $\boldsymbol{x}_M$ 用 $\boldsymbol{z}_0$ 代替，$\tilde{y}_l^{(k_l)}(l \in \sigma)$ 用 z_{l_0} 代替，定义动态补偿器（Ψ_1^+ 的存在性选择类似定理 1 之证明)为

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{z}}_0 = \boldsymbol{f}_M(\boldsymbol{z}_0) + G_M(\boldsymbol{z}_0)\boldsymbol{v}, \boldsymbol{z}_0(0) = \boldsymbol{x}_M(0), \\ \dot{\boldsymbol{z}}_1 = \phi(\boldsymbol{z}_1) + \boldsymbol{d}, \qquad z_1(0) = z_{10}, \\ \boldsymbol{u} = \Psi_1^+\{\hat{\boldsymbol{Y}}_1 - \boldsymbol{\phi}_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{v}, \cdots \boldsymbol{v}^{(q)})\}, \end{cases} \tag{3.17}$$

其中

$$\hat{\boldsymbol{Y}}_1 = \begin{pmatrix} z_{l_{1_0}} \\ \vdots \\ z_{l_{t_0}} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{z}_0 \\ \\ \boldsymbol{z}_1 \end{pmatrix}.$$

将补偿器(3.17)代入闭环系统 P_0G 知 $\boldsymbol{y}_e = \tilde{\boldsymbol{y}}$，同时对于所有分量 $\tilde{y}_l(1 \leqslant l < p)$ 恒有(注意到(3.15)式)

$$\tilde{y}_l^{(k)} = \begin{cases} 0, & \text{当 } k \geqslant \bar{k} \text{ 且 } l \in \sigma \text{ 时}, \\ \phi_l(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_M, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{v}, \cdots, \boldsymbol{v}^{(q-1)}), & \text{其它}, \end{cases} \tag{3.18}$$

即 $\boldsymbol{y}_e$ 与 $\boldsymbol{v}^{(q)}$ 无关。类似于定理 1 的证明可知，此解亦为正则的，即(3.17)式为 GMMP 的解。充分性得证。

必要性。类似于定理1的证明。事实上，若 GMMP 有解，存在 $l_0 \bar{\in} \sigma, \rho_{l_0} < \infty$，则

$$\mathrm{d}\tilde{y}_{l_0}^{(\rho_{l_0}+q)} \in \mathrm{span}_{\mathbb{K}_c}\{\mathrm{d}\boldsymbol{x}, \mathrm{d}\boldsymbol{x}_M, \mathrm{d}\boldsymbol{z}, \mathrm{d}\boldsymbol{v}, \cdots, \mathrm{d}\boldsymbol{v}^{(q-1)}\},$$

且

$$\mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{y}}_{l_0}^{(\rho_{l_0}+q)} \bar{\in} \mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{\mathrm{d}\boldsymbol{x}, \mathrm{d}\boldsymbol{x}_M, \mathrm{d}\boldsymbol{v}, \cdots, \mathrm{d}\boldsymbol{v}^{(q-1)}\}.$$

因此，补偿器(1.5)此处不是正则的，与 GMMP 的解矛盾。证毕。

由定理 2 可以直接获得下面的推论：

推论. 假设模型M是右可逆系统，则 GMMP 有解的充要条件为对象P亦为右可逆的.

4 算例

例 1. 给定模型M为

$$\dot{x}_M = \begin{pmatrix} y_{M_2} \\ 0 \\ x_{M_3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v, \quad y_M = \begin{pmatrix} x_{M_1} \\ x_{M_3} \end{pmatrix}.$$

系统P的方程为

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_3 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} u, \quad y = \begin{pmatrix} x_2 + x_3 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

易于验证 $k_1 = \rho_1 = 1, k_2 = \rho_2 = 1$，且

$$\dot{\tilde{y}} = \begin{pmatrix} x_3 - x_{M_3} \\ -x_{M_3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ x_3 & 0 \end{pmatrix} u,$$

代入(3.9)得 MMP 的解为(此处 σ_l 为空集)

$$\dot{z}=\begin{pmatrix} z_2 \\ 0 \\ z_3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v, \quad z(0)=x_M(0),$$

$$u=\begin{pmatrix} z_3/x_3 \\ \frac{1}{2}(z_2-x_3-z_3/x_3) \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1/x_3 \\ -\frac{1}{2x_3} \end{pmatrix} v_2.$$

例 2. 给定模型 M

$$\dot{x}_M=\begin{pmatrix} x_{M_2} \\ 0 \\ x_{M_3} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ x_{M_1} \\ 0 \end{pmatrix} v, \quad y_M=\begin{pmatrix} x_{M_1} \\ x_{M_2} \end{pmatrix},$$

对象 P

$$\dot{x}=\begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u, \quad y=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

易知 $k_1=\rho_1=2, k_2=\rho_2=\infty$，这说明系统是一不可逆系统，此时，

$$\tilde{y}_1^{(2)}=x_1-x_{M_1}v+u,$$
$$\tilde{y}_2^{(k)}=x_3-x_{M_3}, \ (k\geqslant 0),$$

MMP 的解为

$$\dot{z}=\begin{pmatrix} z_2 \\ 0 \\ z_3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ z_1 \\ 0 \end{pmatrix} v, \ z(0)=x_M(0), \quad u=-x_1+z_1 v.$$

至此，应用排列技术解决了非线性系统广义模型匹配问题与模型匹配问题．在证明解存在的充分性时亦给出了利用排列技术求动态补偿器的方法．该方法简单直观，求解方便．

参 考 文 献

[1] Moor B C and Silverman L M. Model matching by state feedback and dynamic compensation. *IEEE Trans. Aut. Control*, 1972, **AC-17**: 491—497.

[2] Silvermam L M. Inversion of Multivariable Linear Systems. *IEEE Trans. Aut. Control*, 1969, **AC-14**: 270—276.

[3] Morse A S. Structure and Design of Linear model following systems. *IEEE Trans. Aut. Control*, 1973, **AC-18**: 346—354.

[4] ——, Minimal solutions to transfer matrix equations. *IEEE Trans. Aut. Control*, 1976, **AC-21**: 131—133.

[5] Emre E and Hautus, M L J. A Polynomial Characterization of (A, B)-invariant and Reachability Subspaces. *SIAM J. Contr. Optim.*, 1980, **18**: 420—436.

[6] Isidori A and Ruberte A. On the Synthesis of Linear inputoutput Responses of Nonlinear Systems. *System. Contr. Lett.*, 1984, **4**: 17—22.

[7] Okutani T and Furuta K. Model Matching of Nonlinear Systems. IFAC 9th Wirld Congress, Budapest, 1984, **IX**:168—172.

[8] Di Benedetto M and Isidori A. The Matching of Nonlinear Models Via Dynamic State Feedback. *SIAM J. Contr. Optim.*, 1986, **24**: 1603.

[9] Di Benedetto M. Nonlinear Strong Model Matching. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 1990, **AC-35:**

1351—1355.

[10] Singh S N. A Modified Algorithm for Invertibility in Nonlinear Systems. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 1981, **26**: 595—598.

[11] Moog C H, Perdon A M and Conte G. Model Matching and Factorization for Nonlinaer Systems: a Structural Approach, 1989. preprint.

[12] Zheng Y F and Cao L. The Rankings and Relavent Rivariant of Control Systems. Proc. MTNS'91, Kobe, 1991.

[13] Cao L and Zheng Y F. On Minimal Compensators for Decoupling Control. Sci. Report. East China Normal University, 1990.

RANKING OF CONTROL SYSTEMS AND MODEL MATCHING PROBLEM

LIU PIN

(*Department of Automatic Control, Shanghai Jiao Tong University* 200030)

ZHENG YUFAN

(*Applied Mathematics Research Laboratory, East China Normal University Shanghai* 200062)

ZHANG ZHONGJUN

(*Department of Automatic Control, Shanghai Jiao Tong University* 200030)

ABSTRACT

The model matching problem for nonlinear control systems is studied by the ranking technique. In this paper the sufficient and necessary conditions for both model matching problem and generalized model matching problem are given. In the proofs of main results. the algorithms for designing the compensetors, which make the model matching are provided.

Key words: Ranking; nonlinear system; model matching.

刘　频　照片、简介见本刊第 19 卷第 5 期.

郑毓蕃　1941 年生. 1965 年毕业于上海华东师范大学数学系，后在该校担任助教、讲师. 1986 年任教授. 1980 年至 1981 年赴加拿大多伦多大学，在 Wonhan M 教授领导下从事离散事件系统的早期研究工作. 80 年代曾在欧洲、美国、日本的十余所大学、研究所担任客籍教授、讲学或做短期研究，目前担任亚洲自动化联合会 Ascc 领导委员会成员. 国家自然科学基金委、自动化学科审评专家组成员等职.

张钟俊　照片、简介见本刊第 19 卷第 5 期.