

# MIMO 非线性最小相位系统的光滑调节<sup>1)</sup>

吉英存 高为炳

(北京航空航天大学第七研究室 100083)

## 摘 要

本文研究多输入多输出非线性最小相位系统的光滑调节问题,得到的主要结论是:对合的在原点具有相对阶的局部双曲最小相位系统能渐近跟踪满足某种有界条件的局部 Lyapunov 稳定的信号。一类具有一致相对阶的全局指数稳定的最小相位系统,若满足某种类似的 Lipschitz 条件,则能渐近跟踪一类很广泛的信号,既可以是 Poisson 稳定的,也可以是无界的。

**关键词:** 零动态,非线性最小相位系统,输入输出稳定性,输出调节。

## 1 引 言

文中考虑非线性最小相位系统的光滑调节问题。目前有关非线性系统光滑调节(或跟踪)方面的研究可见文[1—7]。

先给出一些必要的定义<sup>[8]</sup>。设  $\mathcal{F}$  是一个线性泛函空间,  $\mathcal{V}$  是其一个线性赋范子空间,用  $P_T$  表示函数的截取(简记为  $P_T v \triangleq v_T$ )

$$(P_T v)(t) = \begin{cases} v(t), & t \leq T, \\ 0, & t > T, \end{cases} \quad (1.1)$$

这里  $v \in \mathcal{V}$ ,  $T \in R^+$  (表示非负实数)。信号空间  $\mathcal{V}_e$  是一个扩展线性赋范空间, i.e.

$$\mathcal{V}_e = \{v \in \mathcal{F} \mid P_T v \in \mathcal{V}, \forall T \in R^+\}, \quad (1.2)$$

称一个函数  $\gamma: R^+ \rightarrow R^+$  是  $\mathcal{K}$  类函数是指其是严格单调增的,且满足  $\gamma(0) = 0$ 。称  $\gamma$  是  $\mathcal{K}_\infty$  类函数,如果  $\gamma$  是  $\mathcal{K}$  类函数,同时还满足  $\lim_{s \rightarrow \infty} \gamma(s) = \infty$ 。用  $\mathcal{B}$  表示直线  $R$  上的有界函数。用  $\|\cdot\|_p$  表示  $L_p$  范数,  $p \in [1, \infty]$ ,  $|\cdot|$  表示欧氏范数。

考虑对象  $G$

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad (1.3a)$$

$$y = h(x), \quad (1.3b)$$

其状态变量为  $x$ , 定义在  $R^n$  空间包含原点的邻域  $\Omega_x$  上。本文只讨论方系统,不妨设  $u(\cdot), y(\cdot) \in R^m$ , 又设  $f(\cdot), g(\cdot)^{n \times m}$  是光滑映射,  $f(0) = 0, h(0) = 0$ 。当考虑全局问题时  $\Omega_x = R^n$ , 其它变量及映射也是全局定义的。

1) 国家自然科学基金资助项目。  
本文于 1992 年 4 月 4 日收到

参考信号  $r(t)$  由自治系统  $E$  产生

$$\dot{w} = s(w), \quad (1.4a)$$

$$r(t) = -q(w), \quad (1.4b)$$

其中状态变量  $w$  定义在  $R^s$  空间包含原点的邻域  $\Omega_w$  上,  $s(0) = 0$ ,  $s(\cdot)$  是光滑映射. 当考虑全局问题时  $\Omega_w = R^s$ .

采用状态反馈控制器  $u = \alpha(x, w)$ ,  $\alpha(0, 0) = 0$ ,  $\alpha(\cdot)$  是光滑映射, 来实现渐近跟踪.

**定义 1.1.** 称系统(1.3)从原点的状态反馈调节问题可解是指: 如若对系统(1.3)存在光滑状态反馈  $\alpha(x, w)$ ,  $\alpha(0, 0) = 0$ , 使得

$$R1) \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} h(x) + q(w) = 0, \quad (1.5)$$

R2) 系统

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\alpha(x, w), \quad (1.6)$$

给定  $w(t)$ , 存在常数  $\beta$ , 以及  $\psi \in \mathcal{K}_\infty \cup \mathcal{B}$ , 使得系统从原点出发的轨线  $\phi_w(t)$ , 在  $T$  时刻满足

$$\|\phi_w(T)\|_p \leq \psi(\|W_T\|_p) + \beta, \quad (1.7)$$

$$\forall w \in \mathcal{Y}, \forall T \in [0, \infty), P \in [1, \infty].$$

系统(1.6)可视为一个输入输出描述的系统. (1.7)式的要求即是在有限时间  $[0, T]$  内,  $w(T)$  有界, 状态  $x(T)$  也要有界. 但这并不排除  $T = \infty$  时,  $w(T)$  为一个无界信号,  $x(T)$  也有可能为一个无界信号. 这是因为习惯上要求当信号断开时, 闭环渐近稳定. 在线性系统中, 由于叠加原理成立, 渐近稳定也就保证了当加入一个有界输入时, 系统的状态也是有界的. 但是在非线性系统中, 叠加原理不成立, 因此有必要进行更细致的考虑. 在定义(1.1)下, 也有可能考虑临界系统的调节问题, 而这在文[1]下是不可能的.

下面简要回顾一下输出零动态与非线性最小相位系统的概念<sup>[9,10]</sup>. 考虑系统(1.3), 该系统的零动态  $(z^*, f^*)$  定义如下:

i) 流形  $z^*$  是输出零化流形, 亦即  $z^* \subset h(0)$ .

ii) 流形  $z^*$  是受控不变流形, 亦即存在  $u^*(x)$  使得在  $z^*$  上能恰当定义一个向量场  $f^*(x) = f(x) + g(x)u^*(x)$ , 换言之,  $f^*(x)$  与  $z^*$  相切, 亦即初值在  $z^*$  上的轨线, 经过一段时间后仍留在  $z^*$  上.

iii)  $z^*$  对性质 i), ii) 是最大的.

若系统在原点附近零动态存在且渐稳, 则该系统是局部最小相位系统. 如果另外  $f^*(x)$  在原点处的 Jacobian 矩阵的所有特征值都具有负实部, 则该系统称为局部双曲最小相位系统. 相应地, 若系统的零动态是全局存在且渐稳的, 则系统为全局最小相位系统. 又若零动态是全局指数稳定的, 则称之为全局指数最小相位系统.

**引理 1.1.** 设系统(1.3)在原点具有相对阶  $\{r_1, \dots, r_m\}$ , 又若  $g$  是对合的, 则存在坐标变换和反馈变换使得系统可化成如下正则型:

$$\dot{\eta} = Q(\eta, \xi), \quad (1.8a)$$

$$\dot{\xi}^1 = A_1 \xi^1 + b_1 v_1, \quad (1.8b)$$

.....

$$\dot{\xi}^m = A_m \xi^m + b_m v_m. \quad (1.8c)$$

这里,  $\xi^T = [\xi^1, \dots, \xi^m]$ ,  $\xi^i = [\xi_i^1, \dots, \xi_i^{r_i}]$ ,  $y_i = \xi_i^1$ ,  $\{A_i, b_i\}$  是 Brunovsky 标准型.

对于上述引理1也可推广至全局情形. 这时需要如下假设:

H1) 设系统具有一致相对阶  $\{r_1, \dots, r_m\}$ , 从而对任意  $x \in R^n$ ,  $A(x) = \{a_{ij}\} = \{L_{g_j} L_{f^i}^{-1} h_i(x)\}$  非奇.

令  $\beta(x) = A^{-1}(x)$ ,

$$\alpha(x) = -A^{-1}(x) \begin{bmatrix} L_{f^1} h_1(x) \\ \dots \\ L_{f^m} h_m(x) \end{bmatrix},$$

定义向量场  $\tilde{f} = f + g\alpha$ ,  $\tilde{g} = g\beta$ .

H2) 设向量场  $X_j^k = ad_{\tilde{f}}^{k-1} \tilde{g}_j$ ,  $1 \leq j \leq m$ ,  $1 \leq k \leq r_j$ , 是完备的.

H3)  $[X_i^1, X_j^1] = 0$ ,  $1 \leq i, j \leq m$ .

**引理 1.2.** 满足条件 H1)–H3) 的全局最小相位系统经过坐标变换和反馈变换可全局化成正则型(1.8).

## 2 局部调节问题

在非线性系统的调节问题中, 与线性系统的调节问题一样, 对欲跟踪的信号也要有所了解. 设欲跟踪的信号由(1.4)式产生. 在局部调节问题中对欲跟踪信号的假设为

A1)  $w = 0$  是系统(1.4)的 Lyapunov 稳定的平衡点, 但不必是渐近稳定的. 从而其在原点的线性近似系统具有零实部的特征值, 但没有正实部的特征值. 按 Lyapunov 稳定性定义知, 任给  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta(\varepsilon) > 0$ , 当初值  $w_0$  满足  $|w_0| < \delta(\varepsilon)$  时, 从  $w_0$  出发的轨线  $w(t, t_0, w_0)$  满足  $|w(t, t_0, w_0)| < \varepsilon$ .

下面就信号  $r(t) = -q(w)$  及其导数有所假设. 令

$$K(q(w)) = \begin{bmatrix} K_1(q_1(w)) \\ \dots \\ K_m(q_m(w)) \end{bmatrix}, \quad K_i(q_i(w)) = \begin{bmatrix} q_i(w) \\ \dots \\ L_{f^i}^{-1} q_i(w) \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

易知,  $K(\cdot)$  是流  $w(t)$  的函数. 对映射  $K(\cdot)$  假设为:

A2) 任给  $C_p > 0$ , 存在  $\varepsilon(C_p)$ , 当  $|w(t)| < \varepsilon(C_p)$  时,  $|K(q(w))| < C_p$ .

在文[1]中, 假设欲跟踪的信号是 Poisson 稳定的, 亦即外部信号系统的线性近似的所有特征值均具有零实部. 这主要是为了便于应用中心流形理论<sup>[11]</sup>. 本文假设信号是 Lyapunov 稳定的, 包括了信号是 Poisson 稳定的情形.

假设 A2) 是说能找到一个足够小的邻域  $\varepsilon(C_p)$ , 当流在其内部运动时, 参改信号及其导数是有界的, 亦即  $|K(q(w))| < C_p$ .

**引理 2.1.** (Vidyasagar<sup>[12]</sup>). 考虑系统

$$\dot{x} = f(x, u), x \in R^n, u \in R^m. \quad (2.2)$$

设  $f(\cdot)$  在  $x = 0, u = 0$  处是连续可微的, 又若  $x = 0$  是系统  $\dot{x} = f(x, 0)$  的指数稳定的平衡点. 则存在正数  $\gamma_p, C_p$ , 当  $u(\cdot) \in L_p^m, x(0) = 0, |u(t)| < C_p$  时, 有  $\|x\|_p \leq$



$\gamma_p \|u\|_p, p \in [1, \infty]$ .

**定理 2.1.** 对合的在 origin 邻域内具有相对阶的局部双曲最小相位系统从 origin 能渐近跟踪满足 A1), A2) 的信号.

证明. 根据引理 2.1, 对合的在 origin 具有相对阶  $\{r_1, \dots, r_m\}$  的最小相位系统可化成正则型

$$\dot{\eta} = Q(\eta, \xi), \quad \dot{\xi}^i = A_i \xi^i + b_i v_i, \quad y_i = \xi^i,$$

其中  $\xi^T = [\xi^1, \dots, \xi^m]$ ,  $\xi^i = [\xi_{r_i}^i, \dots, \xi_1^i]$ ,  $\{A_i, b_i\}$  是 Brunovsky 标准型,  $i=1, \dots, m$ .

下面做状态变换

$$e_1^i = \xi_1^i + q_i(w), \quad (2.3a)$$

$$e_2^i = \xi_2^i + L_i q_i(w), \quad (2.3b)$$

...

$$e_{r_i}^i = \xi_{r_i}^i + L_{r_i}^{-1} q_i(w), \quad (2.3c)$$

亦即

$$e^i = \xi^i + K^i. \quad (2.4)$$

这里  $e^{iT} = [e_1^i, \dots, e_{r_i}^i]^T$ ,  $\xi^i, K^i$  如前面定义. 此时系统变成

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= Q(\eta, e^1 - K^1, \dots, e^m - K^m), \quad \dot{e}_1^i = e_2^i, \\ &\dots, \\ \dot{e}_{r_i-1}^i &= e_{r_i}^i, \quad \dot{e}_{r_i}^i = L_{r_i}^i q_i + v_i. \end{aligned}$$

做反馈变换

$$v_i = -L_{r_i}^i q_i + K_1^i e_1^i + \dots + K_{r_i}^i e_{r_i}^i. \quad (2.5)$$

此时系统变成

$$\dot{\eta} = Q(\eta, e^1 - K^1, \dots, e^m - K^m), \quad \dot{e}^i = \tilde{A}_i e^i.$$

其中

$$\tilde{A}_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ K_1^i & K_2^i & K_3^i & \dots & K_{r_i}^i \end{bmatrix}.$$

可见适当选择  $\{K_1^i, \dots, K_{r_i}^i\}$ , 可以任置  $\tilde{A}_i$  的极点, 不妨设  $\tilde{A}_i$  的任意特征值  $\lambda(\tilde{A}_i)$  满足

$$\operatorname{Re}[\lambda(\tilde{A}_i)] < 0. \quad (2.6)$$

由此可得  $e^T = [e^1, \dots, e^m]$  满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0. \quad (2.7)$$

下面关键是证明  $\eta(t)$  在有限时间  $T$  内有界. 即  $\|\eta_T\| < \infty, T < \infty$ .  $\|\cdot\|$  表示某种范数. 这里设系统

$$\dot{\eta} = Q(\eta, e^1 - K^1, \dots, e^m - K^m) \quad (2.8)$$

为一个新的输入输出系统, 令  $\tilde{u} = \{e^1, K^1, \dots, e^m, K^m\}$ .

由于系统是局部双曲最小相位系统, 故零动态  $\dot{\eta} = Q(\eta, 0)$  是指数稳定的, 又由于考虑光滑系统, 故  $Q(\eta, \tilde{u})$  关于  $\eta, \tilde{u}$  是连续可微的. 根据有关信号的假设, 知存在邻域

$B_{\delta(\frac{C_p}{2})}$ , 当  $|w^0| < \delta$  时, 有  $|K(w)| < \frac{C_p}{2}$ .

又由于  $e^i = \tilde{A}_i e^i$  是任意指数稳定的, 从而存在邻域  $B_{\delta'}$ , 当  $|e^0| < \delta'$  时, 有  $|e| < \frac{C_p}{2}$ . 根据三角不等式易有.

$$|\tilde{u}| < |e| + |K(w)|, \quad (2.9)$$

从而当  $e^0 \times w^0 \in B_{\delta^*} \times B_{\delta^*}$  时, 这里  $\delta^* = \min\{\delta, \delta'\}$ , 时有  $|\tilde{u}| < C_p$ .

由引理 2.1 知, 从  $\eta(0) = 0$  出发的轨线  $\eta(t)$  满足  $\|\eta_T\|_p < \gamma_p \|\tilde{u}\|_p$ .

注意到在化正则型时采用的坐标变换保持原点且是同胚变换, 从而定理得证.

### 3 全局调节问题

假设参考信号由(1.4)式产生, 同样, 和局部调节问题一样, 可以定义  $K(q(w))$ , 不过此时, 各变量及映射是全局定义的.

对欲跟踪信号的假设为

$$A') K(q(w)) \in \mathcal{V}_c, \quad (3.1)$$

也就是说, 在有限时间内  $K(q(w))$  是一个有界信号, 但并不排除  $T = \infty$  时,  $K(q(w))$  是一个无界信号. 这里对欲跟踪信号没有假设其是缓变的, 也没有设其是有界的, 因而是较一般的. 一般而言, 预先假定参考信号由一个外部信号器产生, 并非总能写出其动力学方程, 有时只知欲跟踪的信号为  $\gamma(t)$ , 以及其相应的导数. 在本节, 也可考虑这种情形, 只不过此时假设 A') 变为

$$\tilde{A}) R(t) \in \mathcal{V}_c,$$

这里

$$R(t) = \begin{bmatrix} R^1(t) \\ \dots \\ R^m(t) \end{bmatrix}, \quad R^i(t) = \begin{bmatrix} \gamma_i(t) \\ \dot{\gamma}_i(t) \\ \dots \\ \gamma_i^{(r_i-1)}(t) \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

**引理 3.1**<sup>[13,14]</sup>. 考虑系统

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x \in R^n, \quad u \in R^m. \quad (3.3)$$

假设 1)  $f(0, 0) = 0$ ,

2)  $f(\cdot)$  是光滑映射,

3) 存在常数  $P_1, K_1$  使得下式成立:

$$|f(x, u_1) - f(x, u_2)| \leq K_1 |u_1 - u_2|^{P_1}, \quad (3.4)$$

4)  $\dot{x} = f(x, 0)$  是全局指数稳定的,

则有  $\|x_T\|_\infty \leq C_\infty \|u_T\|_\infty^{P_1}$ ,  $C_\infty$  为正常数.

证明. 根据假设 4) 知, 存在 Lyapunov 函数  $V: R^n \rightarrow R^+$ , 其连续可微, 且存在正数  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  使得

$$\alpha^2 |x|^2 \leq V(x) \leq \beta^2 |x|^2, \quad (3.5)$$

$$\dot{V}|_* \leq -\gamma|x|^2, \quad (3.6)$$

$$\left| \frac{\partial V}{\partial x} \right| \leq \delta|x|. \quad (3.7)$$

设  $u(\cdot)$  是一个给定输入, 且  $u_T \in \mathcal{V}_e, \forall T > 0$ . 估计函数  $V$  沿着系统

$$\dot{x} = f(x, u)$$

的轨线的导数

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(x(t))|_{(3.3)} &= \frac{\partial V}{\partial x} f(x, u), \\ &= \frac{\partial V}{\partial x} f(x, 0) + \frac{\partial V}{\partial x} [f(x, u) - f(x, 0)]. \end{aligned}$$

由(3.6), (3.4), (3.7)式得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(x(t))|_{(3.3)} &\leq -\gamma|x|^2 + \delta K_1|x||u|^{P_1} \\ &= |x|(\delta K_1|u|^{P_1} - \gamma|x|), \end{aligned}$$

当  $|x| > \frac{\delta K_1}{\gamma}|u|^{P_1}$  时

$$\frac{d}{dt} V(x(t))|_{(3.3)} < 0, \quad (3.8)$$

这说明, 存在常数  $m$ , 当  $|x(0)| \leq m$  时, 有  $T > 0, |x(t)| \leq m, \forall t \in [0, T]$ . 故而

$$V(x(t)) \leq \max_{|x| < \frac{\delta K_1}{\gamma}|u|^{P_1}} V(x) \leq \beta^2 \frac{\delta^2 K_1^2}{\gamma^2} |u|^{2P_1}. \quad (3.9)$$

这里运用了

$$V(x) \leq \beta^2|x|^2.$$

由  $V(x) \geq \alpha^2|x|^2$  得

$$\alpha^2|x|^2 \leq \beta^2 \frac{\delta^2 K_1^2}{\gamma^2} |u|^{2P_1},$$

从而

$$|x| \leq \frac{\beta \delta K_1}{\alpha \gamma} |u|^{P_1}. \quad (3.10)$$

易证, 对任意  $t \geq 0$ , 上式也成立. 再注意  $\frac{\beta}{\alpha} \geq 1$ , 故不等式(3.10)与不等式

$$|x| < \frac{\delta K_1}{\gamma} |u|^{P_1} \quad (3.11)$$

有相同的解. 故有

$$\|x_T\|_\infty \leq C_\infty \|u_T\|^{P_1}, \quad C_\infty = \frac{\beta \delta K_1}{\alpha \gamma}, \quad (3.12)$$

从而引理得证.

**定理 3.1.** 设系统(1.3)满足假设  $H1), H2), H3)$ , 且零动态是全局指数稳定的, 又若化成正则型后的系统有  $|Q(\eta, \xi_1) - Q(\eta, \xi_2)| < K_1|\xi_1 - \xi_2|^{P_1}, K_1, P_1 > 0$ , 则系统(1.3)能渐近跟踪满足条件  $A')$  的信号.

证明. 类似引理 1.2、引理 3.1 和定理 2.1 的证明.

注. 当  $P_1 = 1$  时,

$$|Q(\eta, \xi_1) - Q(\eta, \xi_2)| \leq K_1 |\xi_1 - \xi_2|, \quad (3.13)$$

即是 Lipschitz 条件. 这里只假设  $P_1 > 0$ , 条件比 Lipschitz 条件要弱得多.

### 参 考 文 献

- [1] Isidori A and Bynes C I. Output Regulation of Nonlinear Systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.* 1990, **AC-35**: 130—140.
- [2] Di Benedetto M D. Synthesis of an Internal Model for Nonlinear Output Regulation. *Int. J. Contr.*, 1987, **45**: 1023—1034.
- [3] Huang J and Rugh W J. On a Nonlinear Multivariable Servomechanism Problem, *Automatica*, 1990, **26**: 963—972.
- [4] Hepburn J S A and Wonham W M. Error Feedback and Internal Models on Differential Manifolds, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1984, **AC-29**: 397—403.
- [5] Byrnes C I and Isidori A. Stabilization and Output Regulation of Nonlinear Systems in the Large. 28th C.D.C, Honolulu, Hawaii, 1990, 1255—1261.
- [6] Huang J and Rugh W J. Stabilization on Zero-Error Manifolds and the Nonlinear Servomechanism Problem. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1992, **AC-37**:1009—1013.
- [7] Dayawansa W P, Martin C F and Knowles G.A. Globale Nonlinear Tracking Problem, 28th C.D. C. Honolulu, Hawaii, 1990, 1268—1271.
- [8] 高为炳. 非线性控制系统导论. 科学出版社. 1988.
- [9] Isidori, A. Nonlinear Control Systems. 2nd ed. Springer Verlag. 1989.
- [10] Bynes C I and Isidori A. Asymptotic Stabilization of Minimum Phase Nonlinear Systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.* 1991, **AC-36**: 1122—1137.
- [11] Carr J. Applications of Centre Manifold Theory. New York, Springer Verlag. 1989.
- [12] Vidyasagar M and Vannelli A. New Relations between Input-Out and Lyapunov Stability. *IEEE Trans. Automat. Contr.* 1982, **AC-27**: 481—483.
- [13] Hill D J. A Generalization of the Small-Gain Theorem for Nonlinear Feedback Systems. *Automatica*, 1991, **27**: 1043—1045.
- [14] Hill D J and Moylan P J. Connections between Finit-Gain and Asymptotic Stability. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1980, **AC-25**: 931—936.



## SMOOTH OUTPUT REGULATION OF MINIMUM PHASE NONLINEAR SYSTEMS

Ji YINGCUN GAO WEIBING

(The 7th Research Division of Beijing Uni. of Aero. and Astro. Beijing 100083)

### ABSTRACT

The smooth output regulation problem of minimum phase nonlinear systems is investigated ~~in this paper~~. A more reasonable definition is presented at first. It is shown that if the involutive local hyperbolic minimum phase systems have a relative degree at the origin can asymptotically track Lyapunov stable signal which satisfies a certain bounded condition; the globally exponentially stable minimum phase systems have a relative degree uniformly, under certain Lipschitz condition it can asymptotically track a wide class signal which needn't be Poisson stable or bounded.

**Key words:** zero dynamics; minimum phase, nonlinear systems; I/O stability; ~~output~~ regulation.



**吉英存** 1965年10月生于江苏海安,分别于1988年、1991年在北京航空航天大学获学士、硕士学位,现为该校在读博士生,主要兴趣为线性控制系统、非线性控制系统的综合设计理论及其工程应用。

**高为炳** 照片、简介见本刊第17卷、第6期。