第20卷 第2期 自 动 化 学 报 Vol. 20, No. 2
1994 年 3 月 ACTA AUTOMATICA SINICA Mar., 1994

链式散射描述与线性分式变换[1)]

裘聿皇 季红彬
(中国科学院自动化研究所 北京 100080)

摘 要

本文介绍了链式散射描述与线性分式变换的背景、定义及相互变换,论述了它们的性质及其应用.

关键词: 链式散射描述,线性分式变换,鲁棒控制系统.

1 引 言

许多控制问题可以归结为标准问题[1],而标准问题所得到的传递矩阵就是线性分式变换(Linear Fractional Transformation 简记为 LFTs),因此有一批学者正在 LFTs 上开展深入的工作[2,3].

LFTs 有一个重要的特点:任意两个 LFTs 的组合仍是 LFTs 形式,但是组合中用到 Redheffer 星积,因而使 LFTs 之间的运算变得复杂.把 LFTs 等价地变换成链式散射描述(Chain Scattering Description,简记为 CSDs)的形式.而 CSDs 有这样的特点:任意两个 CSDs 的组合仍是 CSDs 形式,同时在组合中只用到直积运算,这就为设计鲁棒控制系统带来了方便.

2 定 义

定义 1[3]. 设 $P=\begin{bmatrix}P_{11} & P_{12}\\ P_{21} & P_{22}\end{bmatrix}\in C^{(p_1+p_2)\times(m_1+m_2)}$,并设 $C_1\subset C^{m_2\times p_2}$ 和 $C_2\subset C^{m_1\times p_1}$,定义下线性分式变换(Lower Linear Fractional Transformations,简记为 LLFT)及上线性分式变换(Upper Linear Fractional Transformations,简记为 ULFT)分别为下列映射:

$$\mathrm{LLFT}(p,\cdot):\quad C_1\to C^{p_1\times m_1},$$
$$\mathrm{ULFT}(p,\cdot):\quad C_2\to C^{p_2\times m_2},$$

且

$$\mathrm{LLFT}(P,K)=P_{11}+P_{12}K(I-P_{22}K)^{-1}P_{21},\tag{1}$$

1) 本文得到国家自然科学基金资助. 初稿曾在 1992 年全国控制理论及其应用年会上宣读.

本文于 1992 年 10 月 27 日收到

$$\mathrm{ULFT}(P,\Delta)=P_{22}+P_{21}\Delta(I-P_{11}\Delta)^{-1}P_{12}, \tag{2}$$

其中 $K\in C_1$，和 $\Delta\in C_2$，并设上列式子逆矩阵都存在。

通常 Δ、P 和 K 分别表示不确定性，标准装置和要设计的控制器，如图 1 所示。

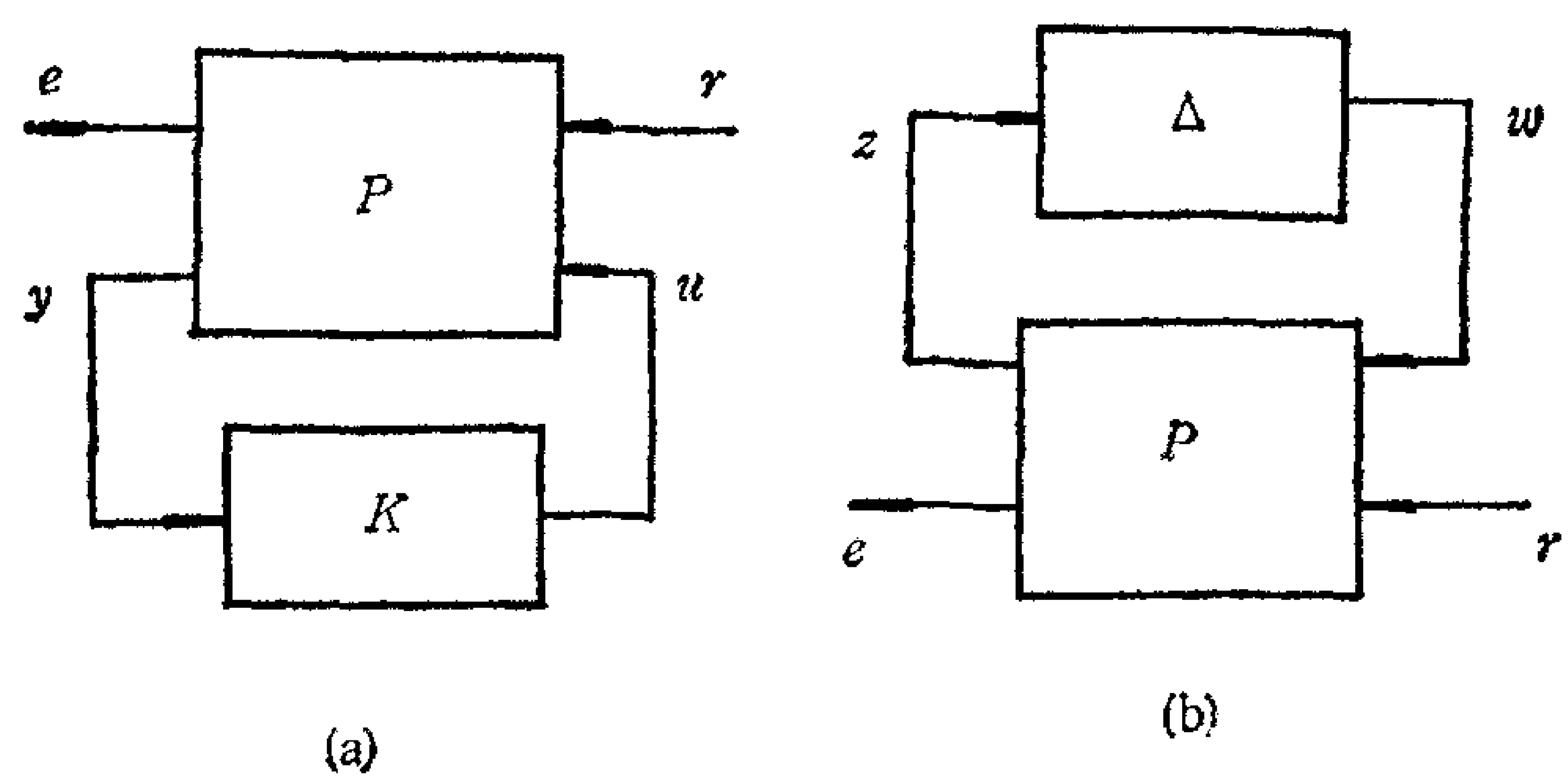

图 1　LLFT 与 ULFT

(a) LLFT　(b) ULFT

若 P_{21}^{-1} 存在，对(1)式，由图 1(a) 可得

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}\\ \boldsymbol{r}\end{bmatrix}=S\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{y}\end{bmatrix},$$

其中

$$S=\begin{bmatrix}S_{11}&S_{12}\\ S_{21}&S_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}P_{12}-P_{11}P_{21}^{-1}P_{22}&P_{11}P_{21}^{-1}\\ -P_{21}^{-1}P_{22}&P_{21}^{-1}\end{bmatrix}. \tag{3}$$

注意到 $\boldsymbol{u}=K\boldsymbol{y}$，并设 $(S_{21}K+S_{22})^{-1}$ 存在，得

$$\boldsymbol{e}=(S_{11}K+S_{12})(S_{21}K+S_{22})^{-1}\boldsymbol{r}. \tag{4}$$

同理，对(2)式，由图 1(b)可得

$$\boldsymbol{e}=(S_{22}-\Delta S_{12})^{-1}(-S_{21}+\Delta S_{11})\boldsymbol{r}=(T_{11}+\Delta T_{21})^{-1}(T_{12}+\Delta T_{22})\boldsymbol{r}, \tag{5}$$

其中

$$T=\begin{bmatrix}T_{11}&T_{12}\\ T_{21}&T_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}S_{22}&-S_{21}\\ -S_{12}&S_{11}\end{bmatrix}. \tag{6}$$

可用图 2 描述上面的结果.

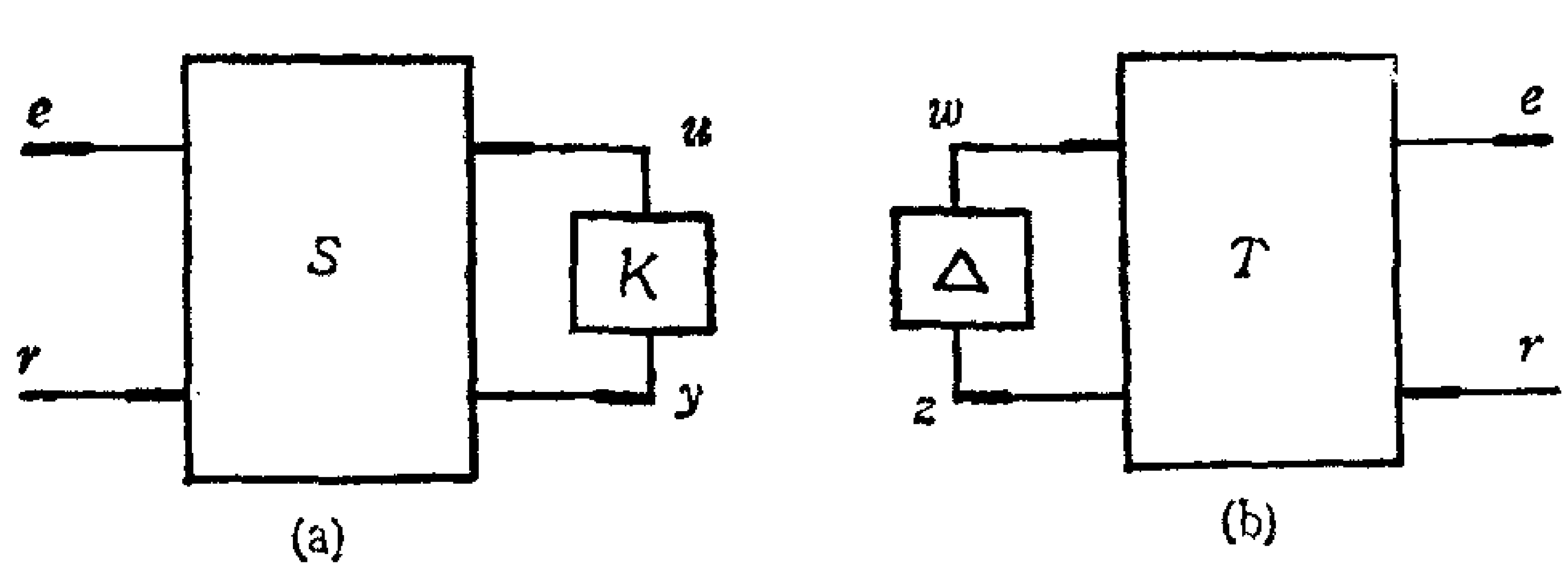

图 2　RCSD 与 LCSD

(a) RCSD　(b) LCSD

这样，就对线性分式变换给出了另一种表达，即链式散射描述。这种描述被广泛地使用在网络理论中[4].

定义 2. 设 $S=\begin{bmatrix}S_{11} & S_{12}\\ S_{21} & S_{22}\end{bmatrix}\in C^{(p_1+m_1)\times(m_2+p_2)}$, $T=\begin{bmatrix}T_{11} & T_{12}\\ T_{21} & T_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}S_{22} & -S_{21}\\ -S_{12} & S_{11}\end{bmatrix}$, 并设 $P_2=m_1$, $C_1\subset C^{m_2\times p_2}$, $C_2\subset C^{m_1\times p_1}$, 定义右链式散射描述 (Right Chain Scattering Description, 记为 RCSD) 及左链式散射描述 (Left Chain Scattering Description, 记为 LCSD) 分别为下列映射:

$$\mathrm{RCSD}(S,\cdot):\ C_1\to C^{p_1\times m_1},$$
$$\mathrm{LCSD}(T,\cdot):\ C_2\to C^{p_2\times m_2},$$

且

$$\mathrm{RCSD}(S,K)=(S_{11}K+S_{12})(S_{21}K+S_{22})^{-1},\tag{7}$$
$$\mathrm{LCSD}(T,\Delta)=(T_{11}+\Delta T_{21})^{-1}(T_{12}+\Delta T_{22}),\tag{8}$$

其中 $K\in C_1$, $\Delta\in C_2$, 并设上列式子中的逆矩阵都存在.

从图 2 可见,对 RCSD 按信号箭头方向从 $\boldsymbol{r},\boldsymbol{y},\boldsymbol{u}$ 到 $\boldsymbol{e}$ 是逆时针方向;对 LCSD 按箭头方向从 $\boldsymbol{r},\boldsymbol{z},\boldsymbol{w}$ 到 $\boldsymbol{e}$ 是顺时针方向.

3 互　换

本节将考虑 LFTs 与 CSDs 之间, LLFT 与 ULFT,LCSD 与 RCSD 之间的互换问题.

定理 1. 1) 若 P_{21}^{-1} 存在, 且 $\det(S_{21}K+S_{22})\neq 0$, 定义 1 中的 LLFT 可以转换成 RCSD, 且有 $\mathrm{LLFT}(P,K)=\mathrm{RCSD}(\pm S,K)$, 其中 S 如(3)式所示.

2) 若 P_{21}^{-1} 存在, 且$\det(T_{11}+\Delta T_{21})\neq 0$, 定义 1 中的 ULFT 可以转换成 LCSD, 且有 $\mathrm{ULFT}(P,\Delta)=\mathrm{LCSD}(\pm T,\Delta)$, 其中 T 如(6)式所示.

定理 2. 1) 若 S_{22}^{-1} 存在, 且 $\det(I-P_{22}K)\neq 0$, RCSD 可以转换成 LLFT, 且有 $\mathrm{RCSD}(S,K)=\mathrm{LLFT}(P,K)$ 其中

$$P=\begin{bmatrix}S_{12}S_{22}^{-1} & S_{11}-S_{12}S_{22}^{-1}S_{21}\\ S_{22}^{-1} & -S_{22}^{-1}S_{21}\end{bmatrix}.\tag{9}$$

2) 若 T_{11}^{-1} 存在,且 $\det(I-P_{11}\Delta)\neq 0$,LCSD 可以转换成 ULFT, 且有$\mathrm{LCSD}(T,\Delta)=\mathrm{ULFT}(P,\Delta)$. 其中

$$P=\begin{bmatrix}-T_{21}T_{11}^{-1} & T_{22}-T_{21}T_{11}^{-1}T_{12}\\ T_{11}^{-1} & T_{11}^{-1}T_{12}\end{bmatrix}.\tag{10}$$

当然,也可以把 LLFT 转换成 LCSD, ULFT 转换成 RCSD, 反之亦然,不一一列举了.

在上述转换中, 要求 P_{21}^{-1} 存在或 S_{22}^{-1},T_{11}^{-1} 存在. 下面把 CSDs 推广到伪链式散射描述. 记 A^+ 为 A 的 Penrose-Moore 伪逆. 通常 $AA^+\neq I$, 但是当 A 满行秩时, 有 $AA^+=I$; 当 A 满列秩时,有 $A^+A=I$.

定理 3. 1) 设 U_{22} 满列秩, U_{22}^+ 是它的左逆,且 $\det(I+KU_{22}^+U_{21})\neq 0$, 那么伪右链式散射描述 (Pseudo RCSD, 记为 PRCSD) 可以变换成 LLFT.

即　$$\mathrm{PRCSD}(U,K)=(U_{11}K+U_{12})(U_{21}K+U_{22})^+=\mathrm{LLFT}(P,K),\tag{11}$$

其中

$$P=\begin{bmatrix}U_{12}U_{22}^{+} & U_{11}-U_{12}U_{22}^{+}U_{21}\\ U_{22}^{+} & -U_{22}^{+}U_{21}\end{bmatrix}. \tag{12}$$

2）设 V_{11} 满行秩，V_{11}^{+} 是它的右逆，且 $\det(I+V_{21}V_{11}^{+}\Delta)\neq 0$ 那么伪左链式散射描述(Pseudo LCSD，记为 PLCSD）可以变换成 ULFT，即

$$\mathrm{PLCSD}(V,\Delta)=(V_{11}+\Delta V_{21})^{+}(V_{12}+\Delta V_{22})=\mathrm{ULFT}(P,\Delta), \tag{13}$$

其中

$$P=\begin{bmatrix}-V_{21}V_{11}^{+} & V_{22}-V_{21}V_{11}^{+}V_{12}\\ V_{11}^{+} & V_{11}^{+}V_{12}\end{bmatrix}. \tag{14}$$

证明：1）

$$(U_{11}K+U_{12})(U_{21}K+U_{22})^{+}=(U_{11}K+U_{12})[U_{22}^{+}-U_{22}^{+}U_{21}(I+KU_{22}^{+}U_{21})^{-1}KU_{22}^{+}]$$
$$=U_{12}U_{22}^{+}+[U_{11}K-U_{11}KU_{22}^{+}U_{21}(I+KU_{22}^{+}U_{21})^{-1}K-U_{12}U_{22}^{+}U_{21}(I+KU_{22}^{+}U_{21})^{-1}K]U_{22}^{+}$$
$$=U_{12}U_{22}^{+}+(U_{11}-U_{12}U_{22}^{+}U_{21})(I+KU_{22}^{+}U_{21})^{-1}KU_{22}^{+}=\mathrm{LLFT}(P,K).$$

2）同理证之.

定理 4. 1）任何 $\mathrm{LLFT}(P,K)$ 可以被等价地转换成 $\mathrm{ULFT}(\tilde{P},K)$，即

$$\mathrm{LLFT}(P,K)=\mathrm{ULFT}(\tilde{P},K), \tag{15}$$

其中

$$\tilde{P}=\begin{bmatrix}0 & I\\ I & 0\end{bmatrix}P\begin{bmatrix}0 & I\\ I & 0\end{bmatrix}. \tag{16}$$

2）设 S 与 $\tilde{S}$ 都是 $(p+q)\times(p+q)$ 阵，那么 $\mathrm{RCSD}(S,K)$ 可以被等价地转换成 $\mathrm{LCSD}(\tilde{S},K)$，即

$$\mathrm{RCSD}(S,K)=\mathrm{LCSD}(\tilde{S},K), \tag{17}$$

记 $J=\mathrm{diag}(I_p,-I_q)$，则有

$$\tilde{S}JS=J \text{ 或 } \tilde{S}JS=-J. \tag{18}$$

4 性　质

性质 1[3]. LLFT 的组合仍是 LLFT，ULFT 的组合仍是 ULFT，即

$$\mathrm{LLFT}(N,\mathrm{LLFT}(M,K))=\mathrm{LLFT}(T,K), \tag{19}$$
$$\mathrm{ULFT}(M,\mathrm{ULFT}(N,\Delta))=\mathrm{ULFT}(T,\Delta). \tag{20}$$

其中 T 是 N 与 M 的 Redheffer 星积，(参见图 3)，定义 T 为

$$T=\begin{bmatrix}T_{11} & T_{12}\\ T_{21} & T_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathrm{LLFT}(N,M_{11}) & N_{12}(I-M_{11}N_{22})^{-1}M_{12}\\ M_{21}(I-N_{22}M_{11})^{-1}N_{21} & \mathrm{ULFT}(M,N_{22})\end{bmatrix}.$$

这里假定矩阵 M、N 的分块是合理的，以保证有关的矩阵乘积存在，并设上式中的逆阵存在.

性质 2. RCSD 的组合仍是 RCSD，LCSD 的组合仍是 LCSD. 即

$$\mathrm{RCSD}(A,\mathrm{RCSD}(B,K))=\mathrm{RCSD}(AB,K), \tag{21}$$
$$\mathrm{LCSD}(C,\mathrm{LCSD}(D,\Delta))=\mathrm{LCSD}(DC,\Delta). \tag{22}$$

以上矩阵应有适当的维数，以保证等式有意义.

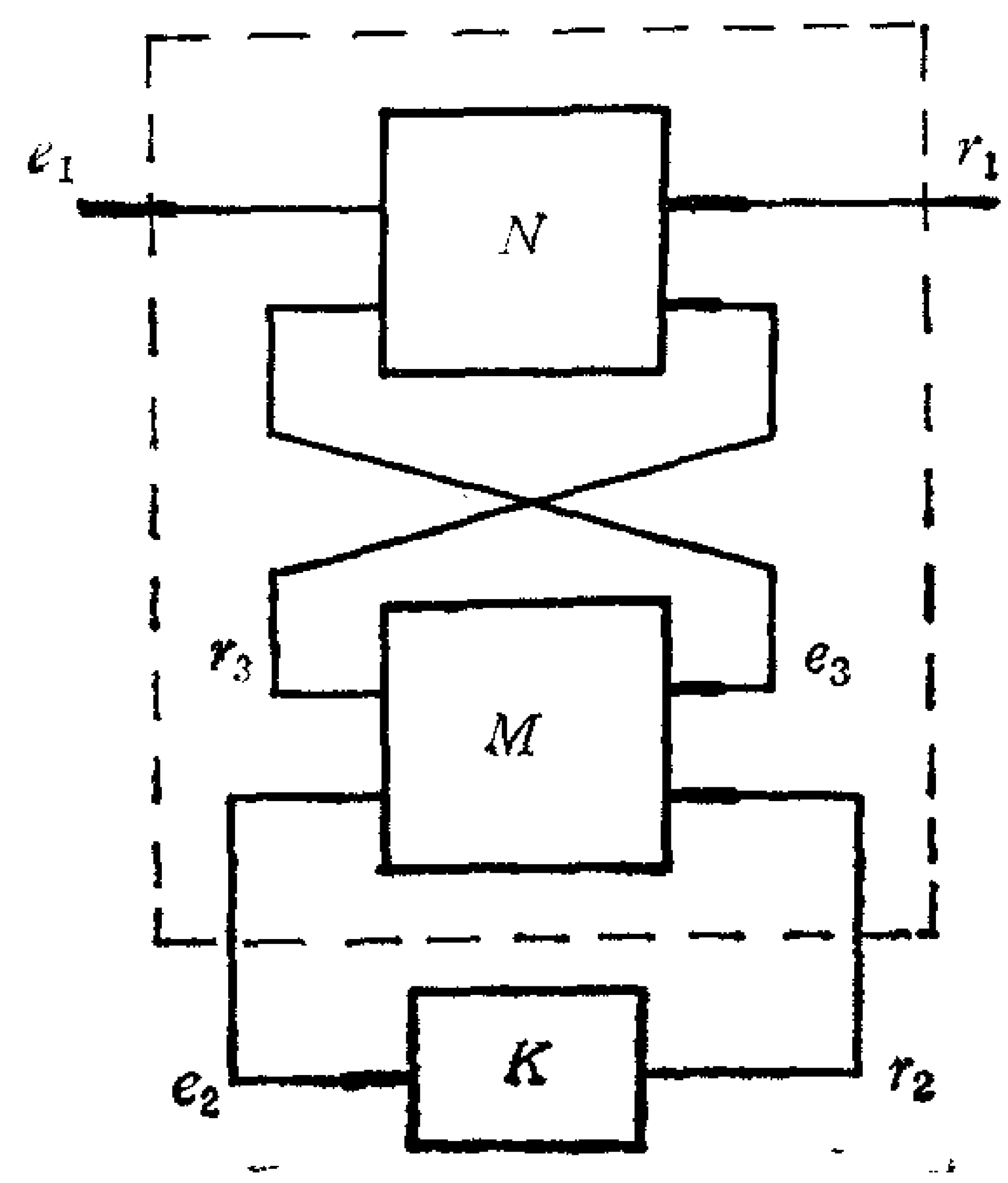

图 3 两个 LLFTs 的组合

性质 3. 设 P, S 和 K 是有理传递矩阵,且 $G = \mathrm{LLFT}(P,K) = \mathrm{RCSD}(S,K)$, 则

1) 若 P 和 K 是真的,且 $\det(I - P_{22}K)(\infty) \neq 0$, 那么 G 也是真的;

2) 若 S 和 K 是真的,且 $\det(S_{21}K + S_{22})(\infty) \neq 0$, 那么 G 也是真的.

性质 4. 若 $\mathrm{LLFT}(P,K) = \mathrm{RCSD}(S,K)$, 则有

1)
$$S = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}^{-1} = S_n S_d^{-1}$$
$$= \begin{bmatrix} I & -P_{11} \\ 0 & P_{21} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} P_{12} & 0 \\ -P_{22} & I \end{bmatrix} = \tilde{S}_d^{-1} \tilde{S}_n. \tag{23}$$

2)
$$P = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{21} & S_{22} \\ I & 0 \end{bmatrix}^{-1} = P_n P_d^{-1}$$
$$= \begin{bmatrix} I & -S_{12} \\ 0 & S_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & S_{11} \\ I & -S_{21} \end{bmatrix} = \tilde{P}_d^{-1} \tilde{P}_n. \tag{24}$$

性质 5. 若 $\mathrm{ULFT}(P,\Delta) = \mathrm{LCSD}(T,\Delta)$, 则有

1)
$$T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -P_{11} & P_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{21} & -P_{22} \\ 0 & I \end{bmatrix}^{-1} = T_n T_d^{-1}$$
$$= \begin{bmatrix} P_{11} & I \\ P_{21} & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & P_{12} \\ I & P_{22} \end{bmatrix} = \tilde{T}_d^{-1} \tilde{T}_n. \tag{25}$$

2)
$$P = \begin{bmatrix} T_{22} & -T_{21} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -T_{12} & T_{11} \\ I & 0 \end{bmatrix}^{-1} = P_n P_d^{-1}$$
$$= \begin{bmatrix} I & T_{21} \\ 0 & T_{11} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & T_{22} \\ I & T_{12} \end{bmatrix} = \tilde{P}_d^{-1} \tilde{P}_n. \tag{26}$$

性质 6. 设 $G = \mathrm{LLFT}(P,K) = \mathrm{RCSD}(S,K)$ 那么

1) 令 $R = P^{-1}$, P 和 G 是真的,且 $\det P(\infty) \neq 0$, $\det(P - [I\ \ 0]^T G [I\ \ 0])(\infty) \neq 0$, P_{12}, P_{21} 可逆,则 K 是真的,且由下式给出:
$$K = \mathrm{ULFT}(R,G). \tag{27}$$

2) 令 $Q=S^{-1}$, S 和 G 是真的, 且 $\det S(\infty)\neq 0$, $(Q_{21}G+Q_{22})$ 可逆, 则 K 是真的,且由下式给出:

$$K=\mathrm{RCSD}(\pm Q,G). \tag{28}$$

可从控制观点来证实上述性质, LFT 的情况也可参见文[3].

性质 7. 1) 假设 $\mathrm{LLFT}(M,K)$ 与 $\mathrm{ULFT}(N,\Delta)$ 是非异方阵且对 K 和 Δ 有定义. M_{11} 与 N_{22} 可逆,则 $\mathrm{LLFT}(M,K)$ 和 $\mathrm{ULFT}(N,\Delta)$ 的逆也可以被分别表示成 LLFT 和 ULFT, 即

$$[\mathrm{LLFT}(M,K)]^{-1}=\mathrm{LLFT}(\widetilde{M},K), \tag{29}$$

$$\widetilde{M}=\begin{bmatrix} M_{11}^{-1} & -M_{11}^{-1}M_{12} \\ M_{21}M_{11}^{-1} & M_{22}-M_{21}M_{11}^{-1}M_{12}\end{bmatrix}, \tag{30}$$

及

$$[\mathrm{ULFT}(N,\Delta)]^{-1}=\mathrm{ULFT}(\widetilde{N},\Delta), \tag{31}$$

$$\widetilde{N}=\begin{bmatrix} N_{11}-N_{12}N_{22}^{-1}N_{21} & N_{12}N_{22}^{-1} \\ -N_{22}^{-1}N_{21} & N_{22}^{-1}\end{bmatrix}. \tag{32}$$

2) 假设 $\mathrm{RCSD}(S,K)$ 与 $\mathrm{LCSD}(T,\Delta)$ 是非异方阵且对 K 和 Δ 有定义. 则 RCSD 与 LCSD 的逆也可以被分别表示成 RCSD 与 LCSD 的形式,即

$$[\mathrm{RCSD}(S,K)]^{-1}=\mathrm{RCSD}(\pm\widetilde{S},K), \tag{33}$$

$$\widetilde{S}=\begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0\end{bmatrix} S=\begin{bmatrix} S_{21} & S_{22} \\ S_{11} & S_{12}\end{bmatrix}, \tag{34}$$

及

$$[\mathrm{LCSD}(T,\Delta)]^{-1}=\mathrm{LCSD}(\pm\widetilde{T},\Delta), \tag{35}$$

$$\widetilde{T}=T\begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0\end{bmatrix}. \tag{36}$$

这里单位矩阵的维数与矩阵 S 及 T 的分块相兼容.

证明. 1) 见文[3]. 2) 由 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ 及 CSDs 的定义得证.

性质 8[6]. $\mathrm{RCSD}(S,\Phi)$的 S 阵是 J 酉阵(或 J 无损)的充要条件是它相应的$\mathrm{LLFT}(P,\Phi)$ 的 P 阵是全通的(或内的).

性质 9[5,6].

1) 令 $\mathrm{LLFT}(P,\Phi)$ 为 P 是内的,则有

$$\|\mathrm{LLFT}(P,\Phi)\|_\infty<1,\ \forall\Phi\in B\mathrm{H}^\infty.$$

2) 令 $G=\mathrm{RCSD}(S,\Phi)$, 且 S 是 J 无损,那么

$$G\in B\mathrm{H}_\infty \text{ 的充要条件是 } \Phi\in B\mathrm{H}^\infty,$$

令 $\widetilde{G}=\mathrm{LCSD}(T,\Phi)$, 且 T 是共轭 J 无损,那么

$$\widetilde{G}\in B\mathrm{H}_\infty \text{ 的充要条件是 } \Phi\in B\mathrm{H}_\infty.$$

其中 $B\mathrm{H}_\infty:=\{\Phi\in R\mathrm{H}_\infty:\|\Phi\|_\infty<1\}$.

显然,性质 9 是很有用的性质, 实际上它还是从 $B\mathrm{H}_\infty$ 到 $B\mathrm{H}_\infty$ 的一一映射, 这在 H_∞ 优化问题中将起重要作用.

5 应用与结论

见图1(a)，所谓标准问题是寻找真的，实系数有理控制器 K，闭环后系统是内稳定的，且有

$$\|\mathrm{LLFT}(P,K)\|_\infty < 1.$$

由定理1可知，上述问题通过变换可转化为寻找 K，有

$$\|\mathrm{RCSD}(S,K)\|_\infty < 1.$$

若能通过 J 无损互质分解，得

$$S = \Theta\Pi^{-1},$$

其中 Θ 是 J 无损，Π 和它的逆是稳定的，由性质2，可推得

$$\mathrm{RCSD}(S,K) = \mathrm{RCSD}(\Theta\Pi^{-1},K) = \mathrm{RCSD}(\Theta,\mathrm{RCSD}(\Pi^{-1},K)).$$

令 $\Phi = \mathrm{RCSD}(\Pi^{-1},K)$，只要 $\|\Phi\|_\infty < 1$，由性质9，知

$$\|\mathrm{RCSD}(S,K)\|_\infty = \|\mathrm{RCSD}(\Theta,\Phi)\|_\infty < 1.$$

由性质6知此时 $K = \mathrm{RCSD}(\pm\Pi,\Phi)$，且 $\|\Phi\|_\infty < 1$. 因此，只要求得 Π，就能保证取得一类矩阵，而使 $\|\mathrm{RCSD}(S,K)\|_\infty < 1$.

问题的关键是求得 Π，Π 的求法可参见文[6].

从以上讨论可以看到，LFTs 与 CSDs 是等价的，它们之间可以互相转换. LFTs 的物理意义比较明确. CSDs 对串联系统具有很好的代数性质. 在本文中，把 CSDs 推广到 PCSDs 以克服某些逆阵不存在的困境. 由于获得了 LFTs，特别是 CSDs 的许多性质，使一些问题的处理显得非常简洁. 这在本节所举的应用例子就可以看到. LFTs 与 CSDs 的结合将为鲁棒控制系统的设计提供很好的框架. 在这个框架上，可以较方便地设计鲁棒控制器，CSDs 还具有其他性质和应用，限于篇幅，不再列举.

参考文献

[1] Francis B A. A Course in H^∞ Control Theory. New York, Springer-Verlag, 1987.

[2] Doyle J C. Lecture Notes in Advances in Multivariable Control. ONR/Honeywell Workshop. Minneapolis, MN, 1984.

[3] Zhou K, Packard A and Doyle J. Review of LFTs, LMIs, and SSV, 1991.

[4] Anderson B D O and Vongpanitlerd S. Network Analysis and Synthesis. Prentice-Hall, Inc. 1973.

[5] Dewilde P and Dym H. Lossless Chain Scattering Matrices and Optimum Linear Prediction: the Vector Case. *Circuit Theory and Application*. 1981, **9**: 135—175.

[6] Tsai M C and Postlethwaite I. On J-lossless Coprime Factorizations and H^∞ Control. *Int. J. of Robust and Nonlinear Control*. 1991, **1**: 47—68.

CHAIN SCATTERING DESCRIPTIONS AND LINEAR FRACTIONAL TRANSFORMATIONS

QIU YUHUANG JI HONGBIN
(*Institute of Automation, Academia Sinica, P. O. Box* 2728, *Beijing* 100080)

ABSTRACT

Chain scattering descriptions and linear fractional transformations play an important role in robust control theory. Their background, definitions and multual transformations between them are presented in this paper. Their properties and applications are also discussed.

Key words: Chain scattering description; linear fractional transformation; robust control systems.