第 20 卷 第 2 期　　自 动 化 学 报　　Vol. 20, No. 2
1994 年 3 月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　Mar., 1994

设计多变量鲁棒控制系统的正规矩阵方法[1)]

张 霖　吴 麒　高黛陵
(清华大学自动化系　北京　100084)

摘　　要

本文研究了设计多变量鲁棒控制系统的正规矩阵方法，证明了正规传递函数矩阵是 H^∞ 范数最优的一个充分条件，从而表明，正规矩阵方法可以达到与 H^∞ 方法同样好的鲁棒性. 在此基础上，提出一种正规矩阵参数优化设计方法，该方法既保证了系统的鲁棒性又可兼顾系统的动静态性能，同时所得到的控制器比较简单.

关键词: 多变量控制系统，正规矩阵，鲁棒控制，H^∞ 控制理论.

1　引言

鲁棒控制系统的设计问题是目前控制理论领域中令人关注的课题. 近年来，人们在这方面取得了许多可喜的成果. 特别是 H^∞ 设计理论在解决控制系统的鲁棒性问题上效果尤其显著.

值得注意的是，H^∞ 方法虽然在理论上已形成一个完美的体系，但在工程实践中至今未能得到广泛的应用. 原因是多方面的，其中 H^∞ 方法本身的弱点不容忽视. 从工程角度出发，一个理想的鲁棒控制系统必须至少满足以下三个条件:

1）具有良好的鲁棒性;

2）具有满意的动静态性能;

3）控制器尽量简单.

用 H^∞ 方法设计的控制系统无疑具有良好的鲁棒性，因此能够满足条件 1)；但要满足条件 2),3) 却比较困难，尤其在控制器的简单性方面，H^∞ 方法远不能令人满意，它所得的控制器的阶次之高是工程设计人员难以接受的. 因此可以说，鲁棒控制系统的设计问题目前仍没有从根本上得到解决.

本文以传统的频率域理论为基础提出一种新的多变量鲁棒控制系统的设计方法——正规矩阵参数优化 (Optimization of Parametrized NORmal Matrix, OPNORM) 方法. 该方法在鲁棒性方面与 H^∞ 方法同样好，而在兼顾系统的动静态性能及控制器的简单性

1) 国家自然科学基金资助项目 69174010.
本文于 1992 年 7 月 9 日收到

方面比 H^∞ 方法具有明显的优越性.

2　正规矩阵的 H^∞ 指标

定义 1. 矩阵 $A \in C^{m\times m}$ 称为正规矩阵，是指 A 满足 $AA^* = A^*A$. 其中 $*$ 表示矩阵的共轭转置.

正规矩阵具有如下重要性质:[1]

矩阵 $A \in C^{m\times m}$ 为正规矩阵的充分必要条件为 A 有对角的酉特征分解，即 A 可展开为如下形式:

$$A = Z\Sigma Z^*, \tag{1}$$

其中 Z 为酉矩阵，$\Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_m)$，$\sigma_i$ 为 A 的奇异值（$i = 1,2,\cdots,m$），$\sigma_1 = \bar{\sigma}(A)$ 为 A 的最大奇异值，$\sigma_m = \underline{\sigma}(A)$ 为 A 的最小奇异值.

另外，称一个函数矩阵为正规矩阵是指该矩阵在 D 形围线上每一点均为正规矩阵.

考虑图 1 所示的线性系统，$G(s)$ 为 $m\times m$ 维对象的标称传递函数矩阵；$\Delta(s)$ 表示对象受到的摄动；$G_p(s)$ 为摄动后的传递函数矩阵；$K(s)$ 为 $m\times m$ 控制器的传递函数矩阵，$G(s),\Delta(s)$ 与 $G_p(s)$ 满足 $G_p(s) = (I + \Delta(s))G(s)$，且 $\bar{\sigma}(\Delta(j\omega)) < |W_3(j\omega)|$，$\forall\omega$，其中 $W_3(s) \in RH^\infty$ 为最小相位传递函数. H^∞ 设计理论认为,闭环系统鲁棒稳定的一个充分条件为，$K(s)$ 镇定 $G(s)$，且满足

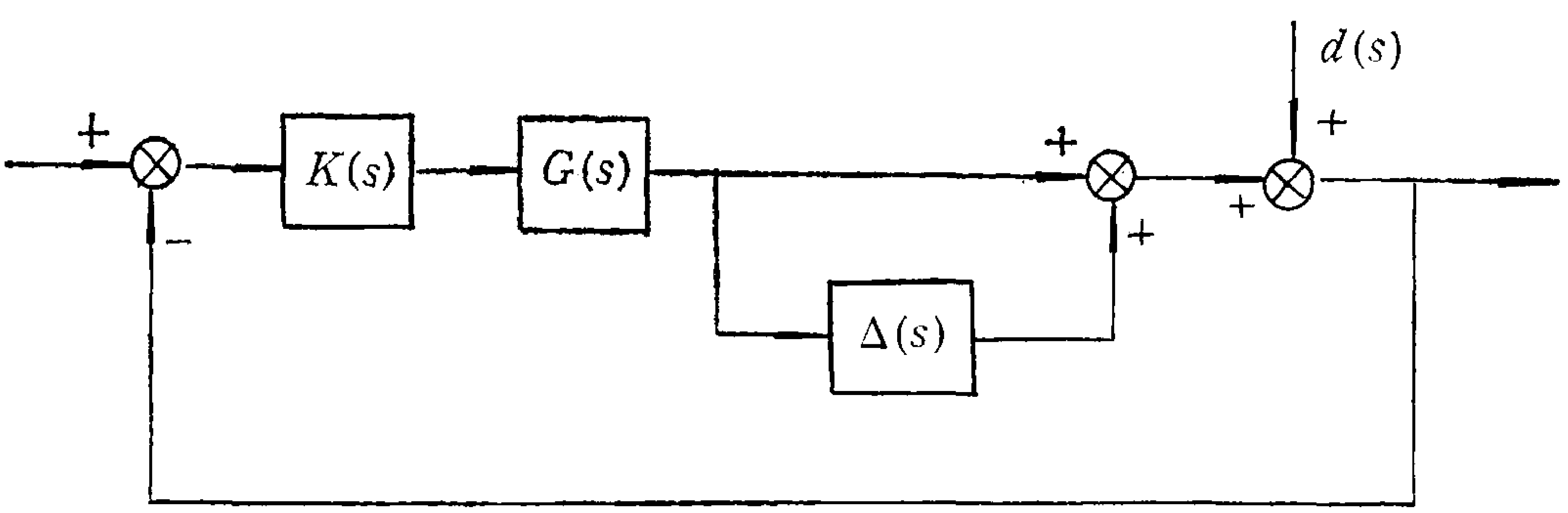


图　1

$$J = \|W_3(s)(I - S(s))\|_\infty = \|W_3(s)[I - (I + G(s)K(s))^{-1}]\|_\infty$$
$$= \|W_3(s)[I + (G(s)K(s))^{-1}]^{-1}\|_\infty < 1.$$

因此,鲁棒设计可以归结为求解镇定 $G(s)$ 并极小化 J 的控制器 $K(s)$.

记 $\Lambda(s) = \mathrm{diag}(\lambda_1(s),\cdots,\lambda_m(s))$，而以 $\Gamma^{m\times m}_{\Lambda(s)}$ 表示特征函数为给定的 $\lambda_1(s),\cdots,\lambda_m(s)$ 的 m 维函数矩阵全体的集合. 关于正规传递函数矩阵与 H^∞ 指标 J 的关系有如下结论:[1)]

结论 1. 对于所有 $G(s)K(s) \in \Gamma^{m\times m}_{\Lambda(s)}$，若 $G(s)K(s)$ 为正规矩阵,则指标 J 达到最小值.

1）张霖、吴麒、高黛陵，正规传递函数矩阵的 H^∞ 指标，全国控制理论及其应用年会论文集，南京，1992 年.

这就说明,当设计控制器传递函数 $K(s)$ 使 $G(s)K(s)$ 为正规矩阵时, 系统的鲁棒性与 H^∞ 设计方法同样好. 这里需要说明的是,在结论 1 中假设 $G(s)K(s)\in\Gamma^{m\times m}_{\Lambda(s)}$. 众所周知, $G(s)K(s)$ 的特征函数决定了系统的动静态性能,因此设 $G(s)K(s)\in\Gamma^{m\times m}_{\Lambda(s)}$, 就是为了在相同的动静态性能下来研究系统的鲁棒性. 也正因为如此, 才使得本文所提出的设计方法能同时兼顾鲁棒性和动静态性能.

3 正规矩阵参数优化 (OPNORM) 设计方法

由上节结论可知, 对于图 1 所示的乘性摄动, 只要将系统的开环传递矩阵 $Q(s)=G(s)K(s)$ 选为正规矩阵,便可使系统具有最佳的鲁棒性. 若将 $Q(s)$ 表示成如下形式:

$$Q(s)=Z(s)\operatorname*{diag}_{i=1}^{m}\{\lambda_i(s)\}Z^*(s), \tag{2}$$

其中 $\lambda_i(s)$ 为稳定并具有满意的动静态性能的有理函数, 则由上节所述的正规矩阵的性质可知, $Q(s)$ 为正规矩阵的充分必要条件是 $Z(s)$ 为酉矩阵. 换句话说, 选择任何一个酉矩阵 $Z(s)$, 都能使 $Q(s)$ 为正规矩阵. 因此,任选一个 $Z(s)$,系统的鲁棒性都是一样地好. 所以 $Z(s)$ 的选择有相当大的自由度. 设 $G(s)$ 为非奇异矩阵, 当选定某个有理的 $Z(s)$ 时,控制器可由下式求出:

$$K(s)=G^{-1}(s)Q(s)=G^{-1}(s)Z(s)\operatorname*{diag}_{i=1}^{m}\{\lambda_i(s)\}Z^*(s), \tag{3}$$

显然, $K(s)$ 为有理函数矩阵. 选择不同的 $Z(s)$, 所得系统的鲁棒性均相同,但由(3)式求出的 $K(s)$ 却不相同: 有的阶次可能很高,有的则较低. 这样,鲁棒控制系统的设计问题就化为如何选择适当的有理函数矩阵 $Z(s)$, 使由(3)式求得的控制器 $K(s)$ 的阶次尽可能低.

为简单起见,将 $Z(s)$ 限制为实常数正交矩阵,记为 Z, 并假设这种正交矩阵可以表示成某种参数化形式

$$Z=Z(\boldsymbol{x}_Z), \tag{4}$$

其中 $\boldsymbol{x}_Z=(x_1,x_2,\cdots,x_t)^T$ 为参数向量, x_i 为实数, $i=1,2,\cdots,t$. 这时(2),(3)式就相应地变为

$$Q(s)=Z(\boldsymbol{x}_Z)\operatorname*{diag}_{i=1}^{m}\{\lambda_i(s)\}Z^T(\boldsymbol{x}_Z), \tag{5}$$

$$K(s)=G^{-1}(s)Q(s)=G^{-1}(s)Z(\boldsymbol{x}_Z)\operatorname*{diag}_{i=1}^{m}\{\lambda_i(s)\}Z^T(\boldsymbol{x}_Z). \tag{6}$$

对于 2×2 的情形,正交矩阵的参数化形式有以下两种:[2]

$$Z(\theta)=\begin{bmatrix}\sin\theta & -\cos\theta\\ \cos\theta & \sin\theta\end{bmatrix} \text{ 或 } Z(\theta)=\begin{bmatrix}\sin\theta & \cos\theta\\ \cos\theta & -\sin\theta\end{bmatrix},$$

其中 $-\pi\leqslant\theta<\pi$, 此时有

$$\boldsymbol{x}_Z=\theta,\ t=1.$$

对于 $m\times m(m>2)$ 的情形, 可以采用初等反射矩阵 $Z=I_m-2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^*$, 其中 m 维向量 $\boldsymbol{x}$ 满足 $\|\boldsymbol{x}\|_2=1$. 显然 Z 为 Hermite 酉矩阵,令 $t=m$, 则 $\boldsymbol{x}_Z=(x_1,x_2,\cdots,x_m)^T$,

此时 $Z(\boldsymbol{x}_Z)$ 为

$$Z(\boldsymbol{x}_Z) = I_m - 2\frac{\boldsymbol{x}_Z\boldsymbol{x}_Z^*}{\|\boldsymbol{x}_Z\|_2^2}.$$

在通常的频率域方法中，$\lambda_i(s)$ 是根据系统稳定性及静动态性能的要求而事先选定的，$\lambda_i(s)$ 的选择完全取决于设计者的经验和习惯。在多变量情形下，$\lambda_i(s)$ 的选择并不考虑(也无法考虑)控制器的简单性。事实上，$\lambda_i(s)$ 的选择对控制器的简单性有很大影响,即根据动静态性能相近的两组 $\lambda_i(s)$ 所求得的控制器,其阶次可能相差很大。至于如何选择适当的 $\lambda_i(s)$ 使之在保证系统性能的前提下使控制器尽可能简单，目前尚未见有人研究。

根据上面的参数化思想,将 $\lambda_i(s)$ 也进行参数化,即表示为如下形式:

$$\lambda_i(s) = \lambda_i(s,\boldsymbol{x}_{\lambda_i}),\quad i = 1,2,\cdots,m. \tag{7}$$

其中 $\boldsymbol{x}_{\lambda_i}$ 为参数向量。记

$$\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{x}_Z^T,\boldsymbol{x}_{\lambda_1}^T,\cdots,\boldsymbol{x}_{\lambda_m}^T]^T,$$

则(5),(6)式变为

$$Q(s) = Q(s,\boldsymbol{x}) = Z(\boldsymbol{x}_Z)\operatorname*{diag}_{i=1}^{m}\{\lambda_i(s,\boldsymbol{x}_{\lambda_i})\}Z^T(\boldsymbol{x}_Z), \tag{8}$$

$$K(s) = K(s,\boldsymbol{x}) = G^{-1}(s)Z(\boldsymbol{x}_Z)\operatorname*{diag}_{i=1}^{m}\{\lambda_i(s,x_{\lambda_i})\}Z^T(\boldsymbol{x}_Z). \tag{9}$$

现在,问题的关键在于,如何在降低控制器阶次的同时,保证关于 $\lambda_i(s)$ 在稳定性、动静态性能及鲁棒性等方面的要求。

吴麒等[3]曾对四种典型的最小相位模型的参数与性能指标之间的关系做了详细的研究。图 2 所示为其中一种典型 4 阶最小相位模型的对数幅频特性。图中的 1,2,3 为线段的斜率,如“1”代表 -20 分贝/十倍频程。其余类推。这四种模型可以表示成统一的参数化形式[1)]

$$\lambda(s) = \frac{k(T_{N1}s+1)(T_{N2}s+1)\cdots(T_{Np}s+1)}{s^d(T_{D1}s+1)(T_{D2}s+1)\cdots(T_{Dq}s+1)}, \tag{10}$$

其中 k 为实数，d 为正负整数或 0，$p < d + q$。对于给定的 ω_c，其参数向量即为

$$\boldsymbol{x}_\lambda = (d,T_{N1},\cdots,T_{Np},T_{D1},\cdots,T_{Dq})^T.$$

为实现设计目标，对于每种模型的传递函数集合分别按动态性能划分为“优 (Excellent, E)”, “良 (Good, G)”,“可 (Acceptable, A)” 三个性能等级。通过对几百组模型所作的大量实际计算和统计分析,为每种性能等级确定了各参数的允许取值范围。例如,对图 2 所示 4 阶模型,当性能等级为“优”时,各参数的取值范围是

$$d = 1,\ T_{N1}\in\left(\frac{2.5}{\omega_c},\ \frac{10}{\omega_c}\right),\ T_{D1}\in(2T_{N1},\ \omega_c T_{N1}^2),$$

$$T_{D2}\in\left(\frac{0.33}{\omega_c},\ \frac{0.5}{\omega_c}\right),\quad T_{D3}\in\left(0.1T_{D2},\ \frac{0.083}{\omega_c^2 T_{D2}}\right).$$

综上所述，设计任务化为在相应的取值范围内选择参数向量 $\boldsymbol{x}$，使由 (9) 式求出的

1) 满化录,控制系统开环传递函数的计算机设计及软件. 清华大学自动化系毕业设计论文,1991.

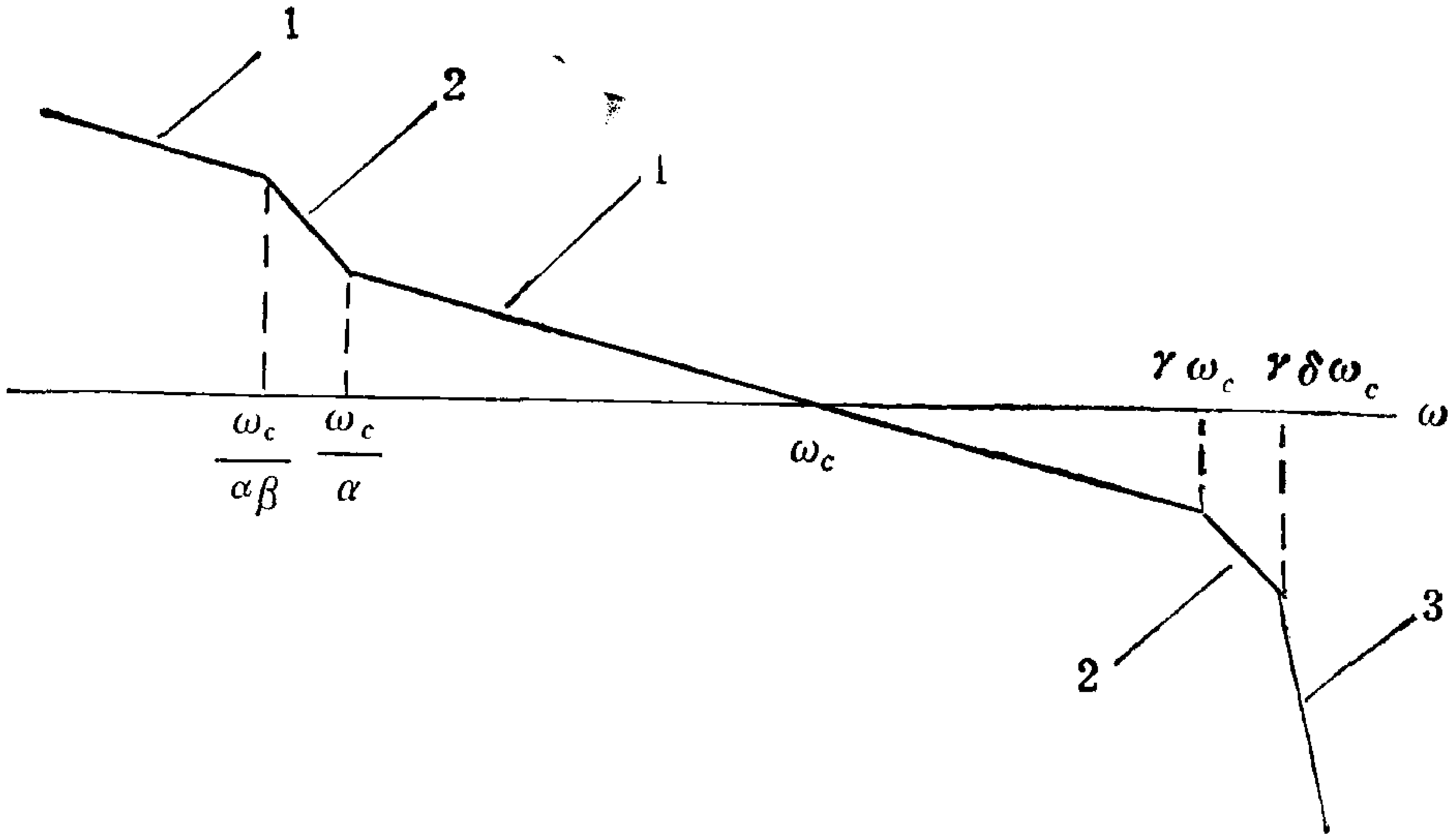


图 2

$K(s)$ 的各元 $k_{il}(s)$ 的次数尽可能低，以便用阶次尽可能低的有理函数来实现它们. 换句话说，就是选择 $\boldsymbol{x}$，使得用给定阶次的有理函数来近似 $k_{il}(s)(i,l=1,2,\cdots,m)$ 时，其近似误差尽量小.

设对于某一个 $k_{il}(s)$，希望用 n 次的有理函数去近似它，也就是要求找 $a_{il}(s)$ 和 $b_{il}(s)$

$$\left.\begin{aligned} a_{il}(s) &= a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 \\ b_{il}(s) &= b_n s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0 \end{aligned}\right\}, \tag{11}$$

其中 $b_n = 1$，使 $k_{il}(s) \approx \dfrac{a_{il}(s)}{b_{il}(s)}$，$\forall s \in D$ 形围线.

从工程角度看,这个问题可以变为如下提法：取一组频率点 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_p,p>2n+1$，要求寻找实系数 n 次多项式 $a_{il}(s)$ 和 $b_{il}(s)$，使

$$k_{il}(j\omega_r) \approx \frac{a_{il}(j\omega_r)}{b_{il}(j\omega_r)},\quad r=1,2,\cdots,p. \tag{12}$$

关于求解这个问题的算法，文献[4]中有详细讨论. 设 $a_{il}^*(s)$ 和 $b_{il}^*(s)$ 为求得的最优近似解. 记拟合误差为

$$E_{il} = \left(\frac{1}{p}\sum_{r=1}^{p}\left|\frac{a_{il}^*(j\omega_r)}{b_{il}^*(j\omega_r)} - k_{il}(j\omega_r)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{13}$$

并命 $E = \dfrac{1}{m^2}\left(\sum\limits_{l=1}^{m}\sum\limits_{i=1}^{m} E_{il}\right)$，显然 E 依赖于参数向量 $\boldsymbol{x}$，即 E 为 $\boldsymbol{x}$ 的函数 $E=E(\boldsymbol{x})$. 寻找 $\boldsymbol{x}^*$，使 $E^* = E(\boldsymbol{x}^*) = \min\limits_{\boldsymbol{x}} E(\boldsymbol{x})$. 若 E^* 满足工程要求,则 $\boldsymbol{x}^*$ 所对应的 a_{il}^*, b_{il}^*（记作 a_{il}^{**}, b_{il}^{**}）即为所求的解，$i,l=1,2,\cdots,m$，而

$$K(s) = \left(\frac{a_{il}^{**}(s)}{b_{il}^{**}(s)}\right).$$

根据以上的讨论，可得正规矩阵参数优化（OPNORM）方法的设计步骤如下：

1）将系统动态性能等级暂定为"优"；

2）令 $n=0$；

3）为 $\boldsymbol{x}$ 选一组初值；

4）根据(9)式计算 $K(s,\boldsymbol{x})$；

5）用最小二乘法求得 n 阶控制器 $\widetilde{K}_n$，及拟合误差 $E(\boldsymbol{x})$；

6）将 $E(\boldsymbol{x})$ 对 $\boldsymbol{x}$ 寻优，得 E^*（寻优时，$\boldsymbol{x}$ 的各分量约束在相应于选定的性能等级的范围之内）；

7）判断 E^* 是否满足工程要求，若满足，则转 8)；若不满足，则令 $n=n+1$，转 3)；

8）判断阶次 n 是否满足要求，若满足，则运算结束；否则将性能等级降低一级，转 2)．

OPNORM 设计方法，与其说是设计 $K(s)$，毋宁说是设计 $Q(s)$，如(8)式所示，$Q(s)$ 包含标架矩阵 $Z(\boldsymbol{x}_Z)$ 和各特征函数 $\lambda_i(s,\boldsymbol{x}_{\lambda_i})$ 两个部分．其中 $Z(\boldsymbol{x}_Z)$ 由于选为正交矩阵，因而使 $Q(s)$ 成为正规矩阵，由此保证了系统具有最佳的鲁棒性．对 $\lambda_i(s,\boldsymbol{x}_{\lambda_i})$ 而言，通过选择适当的模型及确定相应的性能等级可以满足系统对动静态性能的要求．而通过对参数向量 $\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{x}_Z^T,\boldsymbol{x}_{\lambda_1}^T,\cdots,\boldsymbol{x}_{\lambda_m}^T)^T$ 的寻优，可以获得阶次尽可能低的控制器．因此 OPNORM 方法设计的控制系统可以全面地满足本文第一节中对理想鲁棒控制系统的基本要求．这就为多变量鲁棒控制系统的设计开辟了新的途径．

4　设计举例

下面对文献[5]中的汽车燃气轮机模型 AUTM 进行设计．AUTM 系统具有 2 个输入，2 个输出，12 个状态，它的状态空间模型见文[5]的附录 C．

首先，由状态空间模型求得其传递函数矩阵 $G(s)$，$G(s)$ 为 12 阶的有理函数矩阵（略)．选用图 2 所示的模型，将性能等级定为"优"，选 $\omega_{c1}=1,\omega_{c2}=1.2$．由计算机完成必要的计算，得出最优的开环特征函数的两组参数为

$$\lambda_1(s):\ d=1,T_{N1}=2.5,T_{D1}=5,T_{D2}=0.34,T_{D3}=0.034,$$

$$\lambda_2(s):\ d=1,T_{N1}=2.5,T_{D1}=5.5,T_{D2}=0.3,T_{D3}=0.03.$$

即

$$\lambda_1(s)=\frac{2(2.5s+1)}{s(5s+1)(0.34s+1)(0.034s+1)},$$

$$\lambda_2(s)=\frac{2.64(2.5s+1)}{s(5.5s+1)(0.3s+1)(0.03s+1)}.$$

由此求得一个 2 阶控制器为

$$K(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{0.5}{s} & \dfrac{0.11(0.28s+1)}{s}\\[2ex] \dfrac{0.062(0.25s+1)}{s} & \dfrac{0.5(18.5s+1)}{s(4.5s+1)}\end{bmatrix},$$

相应的拟合误差为 $E=0.1401$．

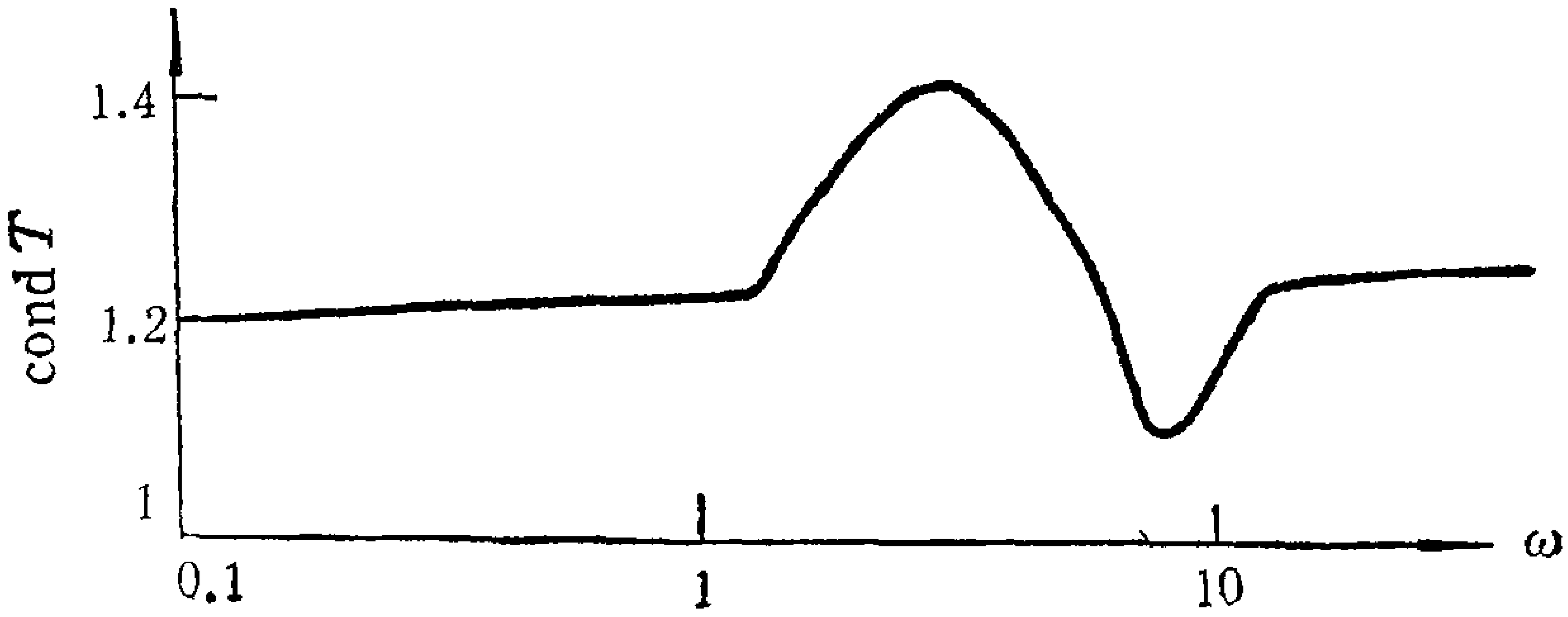


图 3

$G(s)K(s)$ 的特征向量矩阵的条件数曲线见图 3. 从图中可见，在整个频段上条件数都很小，这预示着系统的鲁棒性较好.

进而，对图 1 所示乘性摄动，分析该控制系统的鲁棒性. 将 $\Delta(s)$ 取为 $\Delta(s)=\begin{bmatrix} l & \\ & -l \end{bmatrix}$，$l$ 为实数，令 l 从 0 开始逐渐增大，同时用 Routh 判据判断闭环系统的稳定性. 最后得出该系统鲁棒稳定所允许的最大摄动达到 $l=1.73$.

可以想象，如果用 H^∞ 方法设计，所得的控制器的阶要比本例高很多，而且未必能保证很好的系统动态性能.

5 结语

本文利用正规传递函数矩阵在鲁棒性方面所具有的特殊性质，提出一种正规矩阵参数优化（OPNORM）设计方法. 该方法将系统开环传递函数矩阵的标架矩阵在所有正交矩阵集合中寻优，这样既保证了系统的开环传递函数矩阵为正规矩阵，因而具有最佳的鲁棒性，又扩大了设计的自由度，从而使控制器的简单性得到改善；另外，通过对开环特征函数的优选，使得控制器的简单性进一步得到改善，同时还保证了系统的动态静态性能.

参 考 文 献

[1] Wilkinson J H. The Algebraic Eigenvalue Problem. Clarendon Press, 1965.
[2] Rosenbrock H H. Computer Aided Control System Design. London, Academic Press, 1974.
[3] 吴麒，高黛陵，孙增圻. 估计一类反馈控制系统动态指标的经验公式. 清华大学学报，1979，**19**(2).
[4] 张霖，吴麒. 主导特征向量配正鲁棒控制器在二维系统中的低阶拟合. 信息与控制，1992，**21**(6).
[5] Hung Y S, MacFarlane A G J. Multivariable Feedback: A Quasi-classical Approach. Springer-Verlag, 1982.

THE NORMAL MATRIX APPROACH TO THE DESIGN OF MULTIVARIABLE ROBUST SYSTEM

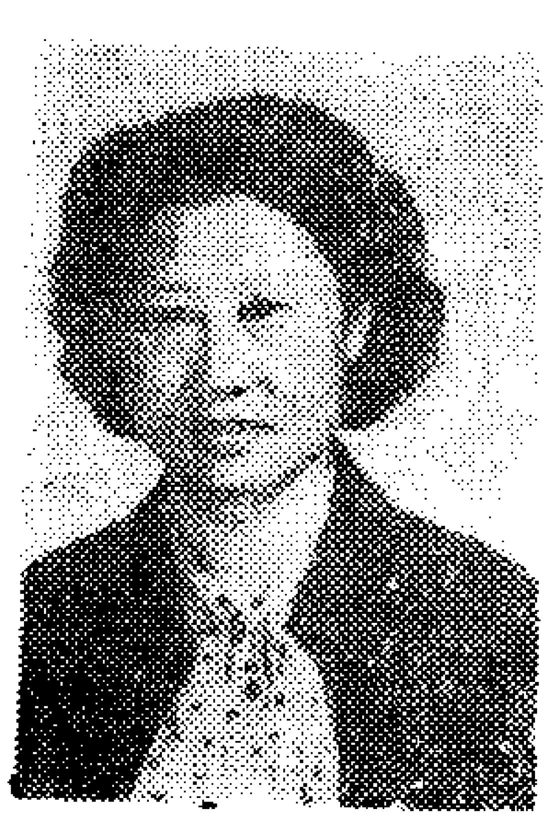
ZHANG LIN　WU QI　GAO DAILING

(Department of Automation, Tsinghua University Beijing 100084)

ABSTRACT

This paper ~~systematically~~ studies the Normal Matrix Approach to the design of multivariable robust control systems. It can be proved ~~theoretically~~ that the normal transfer-function matrix is a sufficient condition that optimizes the H^∞ norm. So that, the Normal Matrix Approach can achieve the same good robustness as the H^∞ approach. ~~Moreover~~ on the basis of normal matrix theory, a design method called Optimization of Parametrized Normal Matrix is proposed. This method is able to give comprehensive consideration to the robustness, dynamic and static performance, and obtain a simple controller.

Key words: multivariable control system; normal matrix; robust control; H^∞ control theory.



张　霖　照片、简介见本刊第 17 卷第 1 期.

吴　麒　照片、简介见本刊第 17 卷第 1 期.

高黛陵　清华大学自动化系副教授. 1961 年毕业于清华大学自动控制系. 曾多年从事反应堆控制工程和理论的科研和教学工作，计算机科学的教学和科研工作. 近十年来一直从事多变量频域控制理论，控制系统的计算机辅助设计，人工智能及应用的教学和科研工作.