第20卷 第2期 自 动 化 学 报 Vol. 20, No. 2
1994 年 3 月 ACTA AUTOMATICA SINICA Mar., 1994

短 文

舰载声纳对运动声源跟踪定位中的病态问题

贾 沛 璋
(中国科学院系统科学所 北京 100080)

摘 要

本文讨论舰载无源声纳对运动声源跟踪定位中的病态问题，提出了一种最小二乘的简单修改形式，不增加计算量，就可显著提高估计精度，并证明了这种修改算法理论上的合理性，得出了关于如何减轻病态，提高估计精度的更一般的结论.

关键词: 病态，被动定位跟踪，线性阵.

1 引言

舰载无源声纳对运动声源的跟踪定位是实际应用中的一个重要问题[1,2]. 假定在舰头或两舷安置阵元构成声纳阵，此时阵的尺寸远小于舰与声源之距离. 通过阵上各阵元接受信号之时间差仅能量测出声源相对阵的方位角 $\theta(t)$，如果舰与声源都作匀速直线运动，则由量测 $\theta(t)$ 仅能估计出 $\dot{\theta}$，而对舰与声源之距离参数 ρ 与 $\dot{\rho}$ 几乎是不能观的. 为了对运动声源跟踪定位，舰自身需转弯，当声源短时间内作匀速直线运动时，此时原则上对运动声源的各参数 $\dot{\theta}$、ρ、$\dot{\rho}$ 是能观的. 但若转弯角 β 较小时，最小二乘估计将出现病态. 这种病态严重影响了估计精度，实际工作者在长期工作中发现，只要对通常的最小二乘估计作小的修改，不增加任何计算量，就可减轻病态，显著提高估计精度. 作者受这一实际经验的启发，从理论上分析了最小二乘的病态问题，证明了实际经验的合理性，并通过理论分析，得出了关于如何减轻病态、提高估计精度的更一般的结论.

2 动态模型

为简化讨论，假定在舰的两舷各配置一个阵元构成线性声纳阵，且假定线性阵的法向始终与舰的航行速度方向一致. 设 t_0 时刻舰处于一个拐弯点，(t_0-T_1,t_0)时间区间内沿某一航向、以速度 V 航行，而 (t_0,t_0+T_2) 时间区间内沿一转弯 β 角后的航向，仍以速度

本文于 1991 年 2 月 2 日收到

V 航行.

选取 t_0 时刻线性阵中点位置为直角坐标系的原点,坐标系的 x、y 轴在水平面内,其中 x 轴与 (t_0-T_1,t_0) 时间区间内舰的航向一致, y 轴指向声源所在舷侧. 假定在 (t_0-T_1,t_0+T_2) 时间区间内声源作匀速直线运动. 记声源相对线性阵的方位角为 $\theta(t)$,它是 t 时刻声源相对阵中点到达方向与线性阵指向(在 (t_0-T_1,t_0) 时间区间内平行 y 轴)之间的夹角. 记 t_0 时刻声源与阵中点之间距离为 ρ_0; 由于 t_0 时刻舰转弯, 记 t_0 时刻的前一瞬时声源方位角为 θ_0, 则 t_0 时刻的后一瞬时声源方位角为 $\theta_0+\beta$; 记 t_0 时刻的前一瞬时声源的斜距速率、方位角速率分别为 $\dot\rho_0$ 和 $\dot\theta_0$, 则 t_0 时刻的后一瞬时声源的斜距速率、方位角速率分别为 $\dot\rho_0+V(\sin\theta_0-\sin(\theta_0+\beta))$ 和 $\dot\theta_0+V(\cos\theta_0-\cos(\theta_0+\beta))/\rho_0$.

现在量测值是 $\theta(t)$, 要估计的声源运动参数为 $(\rho_0,\theta_0,\dot\rho_0,\dot\theta_0)$, 量测方程可写出如下:

当 $t_0-T_1<t<t_0$ 时,有

$$\operatorname{tg}\theta(t)=\frac{\rho_0\sin\theta_0+[\dot\rho_0\sin\theta_0+\rho_0\dot\theta_0\cos\theta_0](t-t_0)}{\rho_0\cos\theta_0+[\dot\rho_0\cos\theta_0-\rho_0\dot\theta_0\sin\theta_0](t-t_0)}, \tag{1}$$

当 $t_0<t<t_0+T_2$ 时,有

$$\operatorname{tg}\theta(t)=\frac{\rho_0\sin(\theta_0+\beta)+[\dot\rho_0\sin(\theta_0+\beta)+\rho_0\dot\theta_0\cos(\theta_0+\beta)+V(\cos\beta-1)](t-t_0)}{\rho_0\cos(\theta_0+\beta)+[\dot\rho_0\cos(\theta_0+\beta)-\rho_0\dot\theta_0\sin(\theta_0+\beta)-V\sin\beta](t-t_0)}. \tag{2}$$

3 最小二乘估计的病态分析

现在的问题是,当由声纳阵获得一系列的量测值 $(\theta_i,t_i)(t_0-T_1<t_i<t_0+T_2)$后,要求(1),(2)式中的 ρ_0、$\dot\rho_0$ 和 $\rho_0\dot\theta_0$ 的最小二乘估计,这里假定 θ_0 不参加联合估计,它的估计可由线性平滑预先求得.

通常的最小二乘估计 $\hat\rho_0$、$\hat{\dot\rho}_0$ 和 $\hat\rho_0\hat{\dot\theta}_0$ 满足下述方程组:

$$\begin{pmatrix}
\sum_i\left(\frac{\partial\theta_i}{\partial\rho_0}\right)^2 & \frac{1}{T}\sum_i\left(\frac{\partial\theta_i}{\partial\rho_0}\right)\left(\frac{\partial\theta_i}{\partial\dot\rho_0}\right) & \frac{1}{T}\sum_i\left(\frac{\partial\theta_i}{\partial\rho_0}\right)\left(\frac{\partial\theta_i}{\partial\rho_0\dot\theta_0}\right)\\
\frac{1}{T}\sum_i\left(\frac{\partial\theta_i}{\partial\dot\rho_0}\right)\left(\frac{\partial\theta_i}{\partial\rho_0}\right) & \frac{1}{T^2}\sum_i\left(\frac{\partial\theta_i}{\partial\dot\rho_0}\right)^2 & \frac{1}{T^2}\sum_i\left(\frac{\partial\theta_i}{\partial\dot\rho_0}\right)\left(\frac{\partial\theta_i}{\partial\rho_0\dot\theta_0}\right)\\
\frac{1}{T}\sum_i\left(\frac{\partial\theta_i}{\partial\rho_0\dot\theta_0}\right)\left(\frac{\partial\theta_i}{\partial\rho_0}\right) & \frac{1}{T^2}\sum_i\left(\frac{\partial\theta_i}{\partial\rho_0\dot\theta_0}\right)\left(\frac{\partial\theta_i}{\partial\dot\rho_0}\right) & \frac{1}{T^2}\sum_i\left(\frac{\partial\theta_i}{\partial\rho_0\dot\theta_0}\right)^2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
(\hat\rho_0-\rho_0^*)\\
(\hat{\dot\rho}_0-\dot\rho_0^*)T\\
(\hat\rho_0\hat{\dot\theta}_0-\rho_0^*\dot\theta_0^*)T
\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}
\sum_i\left(\frac{\partial\theta_i}{\partial\rho_0}\right)(\theta_i-\theta_i^*)\\
\frac{1}{T}\sum_i\left(\frac{\partial\theta_i}{\partial\dot\rho_0}\right)(\theta_i-\theta_i^*)\\
\frac{1}{T}\sum_i\left(\frac{\partial\theta_i}{\partial\rho_0\dot\theta_0}\right)(\theta_i-\theta_i^*)
\end{pmatrix}. \tag{3}$$

式中 ρ_0^*, $\dot{\rho}_0^*$ 和 $\rho_0^*\dot{\theta}_0^*$ 表示参考值，θ_i^* 与 $\rho_0^*,\dot{\rho}_0^*$ 和 $\rho_0^*\dot{\theta}_0^*$ 满足(1)式或(2)式. $T=\max(T_1,T_2)$,(3)式中增加了因子 $\frac{1}{T}$ 或 $\frac{1}{T^2}$，是为了使系数矩阵各元为同量纲的量.

最小二乘估计的病态问题是指(3)式左边的系数矩阵呈现病态，这种病态的程度由该矩阵的条件数量度，这里条件数定义为矩阵的最大本征值与最小本征值之比. 记

$$\bar{V}=\sqrt{\dot{\rho}_0^2+\rho_0^2\dot{\theta}_0^2},\ \varepsilon=\bar{V}\ T/\rho_0. \tag{4}$$

通常 $\bar{V}T\ll\rho_0$，从而 ε 亦为小量. 再记

$$A_k=\sum_{t_0<t_i<t_0+T_2}\left(\frac{t_i-t_0}{T}\right)^k,\quad B_k=\sum_{t_0-T_1<t_i<t_0}\left(\frac{t_i-t_0}{T}\right)^k,\ k=2,3,4.$$

$$C=-\frac{\rho_0\dot{\theta}_0}{\bar{V}}+\frac{V}{\bar{V}}(\cos(\theta_0+\beta)-\cos\theta_0), \tag{5}$$

$$D=-\frac{\rho_0\dot{\theta}_0}{\bar{V}}.$$

可以证明，系数矩阵的特征方程为

$$\lambda^3-\lambda^2[(A_2+B_2)+O(\varepsilon)]+\lambda[\mu_1\cdot\varepsilon^2+O(\varepsilon^3)]-\mu_0=0, \tag{6}$$

其中 μ_1 为零阶量.

$$\mu_0=(C-D)^2[C^2B_2(A_2A_4-A_3^2)+D^2A_2(B_2B_4-B_3^2)]\varepsilon^4+O(\beta\varepsilon^5). \tag{7}$$

由于 $(C-D)$ 与 β 同阶，从而 μ_0 将是 $O(\beta^2\varepsilon^4)$ 或 $O(\beta\varepsilon^5)$ 阶的小量.

由(6)式可得出最大、最小本征值分别为

$$\begin{aligned}\lambda_{\max}&=(A_2+B_2)+O(\varepsilon)+O(\beta),\\ \lambda_{\min}&=\mu_0/(\mu_1\varepsilon^2)+O(\beta\varepsilon^4)+O(\beta^2\varepsilon^3),\end{aligned} \tag{8}$$

这里 $\lambda_{\max}$ 为零阶量，$\lambda_{\min}$ 为 $O(\beta^2\varepsilon^2)$ 或 $O(\beta\varepsilon^3)$ 阶小量，从而系数矩阵的条件数为 $O(\beta^{-2}\varepsilon^{-2})$ 或 $O(\beta^{-1}\varepsilon^{-3})$ 阶.

4 修改的最小二乘估计

考虑最小二乘估计的修改形式，现把(3)式的方程组改写为

$$\begin{pmatrix}\sum_i{}'\left(\frac{\partial\theta_i}{\partial\rho_0}\right)^2 & \frac{1}{T}\sum_i{}'\left(\frac{\partial\theta_i}{\partial\rho_0}\right)\left(\frac{\partial\theta_i}{\partial\dot{\rho}_0}\right) & \frac{1}{T}\sum_i{}'\left(\frac{\partial\theta_i}{\partial\rho_0}\right)\left(\frac{\partial\theta_i}{\partial\rho_0\dot{\theta}_0}\right)\\ \frac{1}{T}\sum_i{}''\left(\frac{\partial\theta_i}{\partial\dot{\rho}_0}\right)\left(\frac{\partial\theta_i}{\partial\rho_0}\right) & \frac{1}{T^2}\sum_i{}''\left(\frac{\partial\theta_i}{\partial\dot{\rho}_0}\right)^2 & \frac{1}{T^2}\sum_i{}''\left(\frac{\partial\theta_i}{\partial\dot{\rho}_0}\right)\left(\frac{\partial\theta_i}{\partial\rho_0\dot{\theta}_0}\right)\\ \frac{1}{T}\sum_i{}'''\left(\frac{\partial\theta_i}{\partial\rho_0\dot{\theta}_0}\right)\left(\frac{\partial\theta_i}{\partial\rho_0}\right) & \frac{1}{T^2}\sum_i{}'''\left(\frac{\partial\theta_i}{\partial\rho_0\dot{\theta}_0}\right)\left(\frac{\partial\theta_i}{\partial\dot{\rho}_0}\right) & \frac{1}{T^2}\sum_i{}'''\left(\frac{\partial\theta_i}{\partial\rho_0\dot{\theta}_0}\right)^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(\hat{\rho}_0-\rho_0^*)\\ (\hat{\dot{\rho}}_0-\dot{\rho}_0^*)T\\ (\hat{\rho}_0\hat{\dot{\theta}}_0-\rho_0^*\dot{\theta}_0^*)T\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\sum_i{}'\left(\frac{\partial\theta_i}{\partial\rho_0}\right)(\theta_i-\theta_i^*)\\ \frac{1}{T}\sum_i{}''\left(\frac{\partial\theta_i}{\partial\dot{\rho}_0}\right)(\theta_i-\theta_i^*)\\ \frac{1}{T}\sum_i{}'''\left(\frac{\partial\theta_i}{\partial\rho_0\dot{\theta}_0}\right)(\theta_i-\theta_i^*)\end{pmatrix}. \tag{9}$$

式中 $\sum_i{}'$、$\sum_i{}''$、$\sum_i{}'''$ 表示它们可以取 (t_0-T_1,t_0+T_2) 中的所有 t_i 求全部和，也可以取 (t_0-T_1,t_0+T_2) 中的不同子集求 t_i 的部分和. 实际经验表明，取 $\sum_i{}''$、$\sum_i{}'''$ 为全部和，而 $\sum_i{}'$ 为适当选取的部分和，可减轻病态，明显提高估计精度. 这里讨论一般情形. 记

$$A'_k=\sum_{t_0<t_i<t_0+T_2}{}'\left(\frac{t_i-t_0}{T}\right)^k,\quad B'_k=\sum_{t_0-T_1<t_i<t_0}{}'\left(\frac{t_i-t_0}{T}\right)^k,\quad k=2,3,4. \tag{10}$$

类似地定义 A''_k、B''_k 和 A'''_k、$B'''_k(k=2,3,4)$. 此时(9)式系数矩阵的特征方程为

$$\lambda^3-\lambda^2[(A'''_2+B'''_2)+O(\varepsilon)]+\lambda[\mu'_1\varepsilon^2+O(\varepsilon^3)]-\mu'_0=0, \tag{11}$$

式中 μ'_1 为零阶量.

$$\begin{aligned}\mu'_0=(C-D)[&(C^2A''_4+D^2B''_4)(CA'_2B'''_2-DB'_2A'''_2)\\&+C^2D(A'_3A'''_2-A'''_3A'_2)B''_3+CD^2(B'''_3B'_2-B'_3B'''_2)A''_3\\&+C^2(DA'''_3B'_2-CA'_3B'''_2)A''_3+D^2(DB'_3A'''_2-CB'''_3A'_2)B''_3]\varepsilon^4\\&+O(\beta\varepsilon^5).\end{aligned} \tag{12}$$

不难看出，当 $A'_k=A'''_k$，$B'_k=B'''_k(k=2,3,4)$ 时，上式右端方括号中将可抽出因子 $(C-D)$，使 μ'_0 与(7)式的 μ_0 同阶. 现在只要 $\sum_i{}'$ 与 $\sum_i{}'''$ 取 (t_0-T_1,t_0+T_2) 中的不同子集求和，μ'_0 将是 $O(\beta\varepsilon^4)$ 阶小量. 此时系数矩阵的最大本征值 $\lambda_{\max}$ 仍为零阶量，而最小本征值 $\lambda_{\min}$ 为 $O(\beta\varepsilon^2)$ 阶小量，如记(9)式系数矩阵为 R，容易证明，矩阵 $(R^\tau R)$ 的最大本征值与 $\lambda^2_{\max}$ 同阶，最小本征值与 $\lambda^2_{\min}$ 同阶，从而系数矩阵的条件数为 $O(\beta^{-1}\varepsilon^{-2})$ 阶.

由 μ'_0 的表达式，可得出关于如何减轻病态，提高估计精度的几点结论.

1）始终可取 $\sum_i{}''$ 为全部和. 关于 $\sum_i{}'$ 与 $\sum_i{}'''$ 有两种选择，一种是取 $\sum_i{}'$ 为适当选取的部分和，而取 $\sum_i{}'''$ 为全部和；另一种是取 $\sum_i{}'$ 为全部和，而取 $\sum_i{}'''$ 为适当选取的部分和.

2）舰转弯点的选择，应使 $\rho_0\dot{\theta}_0/\sqrt{\dot{\rho}_0^2+(\rho_0\dot{\theta}_0)^2}$ 不接近零.

3）舰航向与转弯点的选择，应使 θ_0 不接近零.

4）当声纳阵作等间隔跟踪测量，且 T_1 接近 T_2 时，$\sum_i{}'$ 或 $\sum_i{}'''$ 的部分和应选择为对 t_0 时刻前后是非对称的，使 A'_k、A'''_k 不接近 $(-1)^kB'_k$、$(-1)^kB'''_k(k=2,3,4)$.

参 考 文 献

[1] Moose R L. Passive Range Estimation of an Underwater Maneuvering Target, *IEEE Trans.* 1987, **ASSP-35**(3):274—285.

[2] Allen M R and King. L A. An Adaptive Two Stage Kalman Structure for Passive Undersea Tracking. *IEEE Trans.* 1988, **ASSP-36**(1): 3—9.

ON THE ILL-CONDITION IN LOCATING AND TRACKING A MOVING SOURCE FROM PASSIVE SENSORS ON BOARD

Jia Peizhang

(Institute of Systems Science, Academia Sinica 100080)

Abstract

The ill-condition in locating and tracking a moving source from the passive sensors on board is discussed- A simple modified form of Least Square without additional computation, which can improve the estimation accuracy evidently, has been discovered by engineers. In this paper the justification of this modified form of least square is proved. Moreover, through the theoretical analysis on the ill-condition of least square, more general results are presented. These results can be used to ease the ill-condition and improve the estimation accuracy.

Key words: Abnormality; passive localization and tracking; a linear array.