第 20 卷 第 2 期 1994 年 3 月
自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA
Vol. 20, No. 2 Mar., 1994

短 文

非平稳 ARMA 信号自校正去卷滤波器[1)]

邓 自 立
（黑龙江大学应用数学研究所 哈尔滨 150080）
张 焕 水
（泰安师范专科学校数学系 271000）

摘 要

本文用现代时间序列分析方法[1]，对于通过已知线性系统被观测的未知非平稳 ARMA 输入信号，提出了一种新的自校正递推去卷滤波器，它可用 ARMA 新息滤波器形式表示，适用于非最小相位和不稳定的线性观测系统. 仿真例子说明了其有效性.

关键词：非平稳 ARMA 信号，去卷，输入估计，自校正递推去卷滤波器.

1 引言

去卷 (Deconvolution)，也称反卷积或输入估计，是信号处理领域的重要课题，广泛应用于通讯、信号处理、反射地震学等领域. ARMA 信号去卷问题可阐述为[2,3]：由如下已知的线性观测系统的输出信号 $y(t)$ 估计未知的输入信号 $u(t)$：

$$P(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t) + R(q^{-1})v(t), \tag{1}$$

其中假定输入信号 $u(t)$ 服从非平稳或平稳 ARMA 模型

$$A(q^{-1})u(t) = C(q^{-1})\xi(t), \tag{2}$$

式中 $v(t)$ 和 $\xi(t)$ 是零均值、方差分别为 σ_v^2 和 σ_ξ^2 的独立的白噪声，q^{-1} 是单位滞后算子，$q^{-1}x(t) = x(t-1)$，$P(q^{-1}), B(q^{-1}), \cdots, C(q^{-1})$ 是形如

$$X(q^{-1}) = x_0 + x_1 q^{-1} + \cdots + x_{n_x} q^{-n_x} \tag{3}$$

的算子多项式，其中 $p_0 = 1$，$r_0 = 1$，$a_0 = 1, a_n \neq 0$，$b_0 = 0, c_0 = 0$，$n_p = n_b = m, n_a = n_c = n$. 本文假定观测模型(1)式已知，即 $P(q^{-1}), B(q^{-1}), R(q^{-1}), \sigma_v^2, m$ 是已知的，但输入信号模型(2)式未知，即 $A(q^{-1}), C(q^{-1}), \sigma_\xi^2, n$ 是未知的. 自校正去卷滤波问题是：基于观测数据 $(y(0), y(1), \cdots, y(t))$，求输入信号 $u(t)$ 的渐近最优滤波器 $\hat{u}(t/t)$.

本文方法特点是基于状态空间模型和 ARMA 新息模型设计去卷滤波器，不同于 Ahlen 和 Sternad[3] 的频域方法，且克服了文[3]要求输入信号模型已知和文[2]要求输入信号平稳、观测系统是稳定的和最小相位的局限性.

1) 国家自然科学基金资助课题.
本文于 1991 年 8 月23日收到

2 稳态最优去卷滤波器

观测模型(1)的状态空间模型为[1]

$$\boldsymbol{x}(t+1)=P\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{b}u(t)+\boldsymbol{r}v(t),\ y(t)=\boldsymbol{h}_1\boldsymbol{x}(t)+v(t), \tag{4),(5}$$

其中 I_{m-1} 是 $(m-1)\times(m-1)$ 单位阵，且

$$P=\begin{bmatrix}-p_1 & \\ -p_2 & I_{m-1} \\ \vdots & \\ -p_m & 0\cdots 0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m\end{bmatrix},\ \boldsymbol{r}=\begin{bmatrix}r_1-p_1\\ r_2-p_2\\ \vdots\\ r_m-p_m\end{bmatrix},\ \boldsymbol{h}_1=(10\cdots0). \tag{6}$$

输入信号模型(2)的状态空间模型为[1]

$$\boldsymbol{\eta}(t+1)=A\boldsymbol{\eta}(t)+\boldsymbol{c}\xi(t),\ u(t)=\boldsymbol{h}_2\boldsymbol{\eta}(t), \tag{7),(8}$$

其中

$$A=\begin{bmatrix}-a_1 & \\ -a_2 & I_{n-1} \\ \vdots & \\ -a_n & 0\cdots 0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{c}=\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\\ \vdots\\ c_n\end{bmatrix},\ \boldsymbol{h}_2=(10\cdots0). \tag{9}$$

合并(4),(5),(7),(8)式有增广系统

$$\boldsymbol{z}(t+1)=F\boldsymbol{z}(t)+\Gamma\boldsymbol{w}(t),\ y(t)=\boldsymbol{h}\boldsymbol{z}(t)+v(t), \tag{10),(11}$$

其中 $\boldsymbol{h}=(\boldsymbol{h}_1,\boldsymbol{0})$，且 F 为 $n_f\times n_f$ 阵，$n_f=n+m$，

$$\boldsymbol{z}(t)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)\\ \boldsymbol{\eta}(t)\end{bmatrix},\quad F=\begin{bmatrix}P & \boldsymbol{b}\boldsymbol{h}_2\\ O & A\end{bmatrix},\ \Gamma=\begin{bmatrix}\boldsymbol{r} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{c}\end{bmatrix},\ \boldsymbol{w}(t)=\begin{bmatrix}v(t)\\ \xi(t)\end{bmatrix}. \tag{12}$$

假设增广系统是完全可观、完全可控的，则有稳态 Kalman 滤波为[4]

$$\hat{\boldsymbol{z}}(t+1/t)=F\hat{\boldsymbol{z}}(t/t)+K_c e(t), \tag{13}$$

$$\hat{\boldsymbol{z}}(t/t)=\hat{\boldsymbol{z}}(t/t-1)+K_f e(t), \tag{14}$$

$$y(t)=\boldsymbol{h}\hat{\boldsymbol{z}}(t/t-1)+e(t), \tag{15}$$

其中 K_c 是相关增益，它由 $w(t)$ 与 $v(t)$ 的相关性产生，K_f 是滤波增益，$e(t)$ 是新息过程，它是带零均值的白噪声．将(14)式代入(13)式有稳态预报器

$$\hat{\boldsymbol{z}}(t+1/t)=F\hat{\boldsymbol{z}}(t/t-1)+K_p e(t), \tag{16}$$

其中 K_p 是预报增益，且有关系

$$K_p=K_c+FK_f. \tag{17}$$

由(15),(16)式有观测信号 $y(t)$ 的新息模型

$$y(t)=\boldsymbol{h}(I-q^{-1}F)^{-1}K_p e(t-1)+e(t). \tag{18}$$

利用矩阵求逆的 Fadeeva 公式[1]

$$(I-q^{-1}F)^{-1}=F(q^{-1})/f(q^{-1})\triangleq\sum_{i=0}^{n_f-1}F_i q^{-i}\Big/\sum_{i=0}^{n_f}f_i q^{-i}, \tag{19}$$

其中 $F(q^{-1})=\mathrm{adj}(I-q^{-1}F)$，$f(q^{-1})=\det(I-q^{-1}F)$，且系数 f_i 和系数阵 F_i 可递推计算为

$$f_i = -(1/i)\mathrm{trace}(FF_{i-1}), f_0 = 1, i = 1,2,\cdots,n_f, \tag{20}$$

$$F_i = FF_{i-1} + f_i I, F_0 = I, i = 1,2,\cdots,n_f - 1. \tag{21}$$

将(19)式代入(18)式有 ARMA 新息模型

$$f(q^{-1})y(t) = D(q^{-1})e(t), \tag{22}$$

其中 $D(q^{-1}) = 1 + d_1 q^{-1} + \cdots + d_{n_f} q^{-n_f}$ 是稳定的[5],且有关系

$$\boldsymbol{h}F_{i-1}K_p + f_i = d_i,\ i = 1,2,\cdots,n_f, \tag{23}$$

这引出预报增益公式

$$K_p = \begin{bmatrix} \boldsymbol{h} \\ \boldsymbol{h}F_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{h}F_{n_f-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} d_1 - f_1 \\ d_2 - f_2 \\ \vdots \\ d_{n_f} - f_{n_f} \end{bmatrix}. \tag{24}$$

引入分解

$$K_p = \begin{bmatrix} K_{px} \\ K_{p\eta} \end{bmatrix},\quad K_f = \begin{bmatrix} K_{fx} \\ K_{f\eta} \end{bmatrix},\ K_{f\eta} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix},\ K_c = \begin{bmatrix} K_{cx} \\ K_{c\eta} \end{bmatrix}, \tag{25}$$

其中 K_{px}, K_{fx}, K_{cx} 为 $m \times 1$ 向量, $K_{p\eta}$. $K_{f\eta}, K_{c\eta}$ 为 $n \times 1$ 向量, k_i 为常数. 由 $\xi(t)$ 与 $v(t)$的独立性及(17)式有

$$K_{c\eta} = \mathbf{0},\ K_{f\eta} = A^{-1}K_{p\eta}, \tag{26}$$

再由(8),(13)和(14)式有最优去卷滤波器 $\hat{u}(t/t)$ 为

$$\hat{\boldsymbol{\eta}}(t/t) = A\hat{\boldsymbol{\eta}}(t-1/t-1) + K_{f\eta}e(t),\ \hat{u}(t/t) = \boldsymbol{h}_2\hat{\boldsymbol{\eta}}(t/t), \tag{27),(28}$$

(27)和(28)式等价于如下 ARMA 模型[1]:

$$A(q^{-1})\hat{u}(t/t) = K_{f\eta}(q^{-1})e(t), \tag{29}$$

其中 $K_{f\eta}(q^{-1}) = k_1 + k_2 q^{-1} + \cdots + k_n q^{-(n-1)}$. (29) 式为最优递推去卷滤波器 $\hat{u}(t/t)$, 它是一种 ARMA 新息滤波器.

3 自校正去卷滤波器

为了实现去卷滤波器 (29) 式, 要求得到 a_i, k_i 和 $e(t)$ 的估值, 这可由如下三步实现: (i) 易知在(22)式中, $f(q^{-1}) = A(q^{-1})P(q^{-1})$, 引入新的观测信号 $m(t) = P(q^{-1})y(t)$, 则有 ARMA 新息模型 $A(q^{-1})m(t) = D(q^{-1})e(t)$. 用递推增广最小二乘法 (RELS)[6] 可得在时刻 t 的估值 $\hat{a}_i(t), \hat{d}_i(t)$ 和 $\hat{e}(t)$. (ii) 将有关估值代入 (24), (26)式可得估值 $\hat{k}_i(t)$. (iii) 将有关估值代入(29)式得自校正去卷滤波器 $\hat{u}(t/t)$.

Ljung 证明了[6]当 $D(q^{-1})$ 满足正实性条件时,若 $t \to \infty$,则 $\hat{a}_i(t) \to a_i$, $\hat{d}_i(t) \to d_i$, 则自校正去卷滤波器 $\hat{u}(t/t)$ 将渐近于最优去卷滤波器(29)式.

4 仿真例子

考虑不稳定和非最小相位观测系统

$$y(t)-y(t-2)=u(t-1)+2.2u(t-2)+v(t)$$
$$+0.2v(t-1)+0.1v(t-2), \tag{30}$$

其中已知 $\sigma_v^2=0.25$. 输入 $u(t)$ 为非平稳 ARMA 信号

$$u(t)=au(t-1)+c\xi(t-1), \tag{31}$$

其中 $a=1, c=0.8$ 和 $\sigma_\xi^2=4$ 是末知的. ARMA 新息模型为

$$(1-aq^{-1})(1-q^{-2})y(t)=(1+d_1q^{-1}+d_2q^{-2}+d_3q^{-3})e(t). \tag{32}$$

经计算有最优递推去卷滤波器为

$$\hat{u}(t/t)=a\hat{u}(t-1/t-1)+K_{f\eta}e(t), \tag{33}$$

$$K_{f\eta}=(d_3+ad_2+a^2d_1+a^3)/a(a+2.2), \tag{34}$$

再将有关估值代入(33),(34)式得自校正去卷滤波器. 仿真结果如图1、图 2 所示.

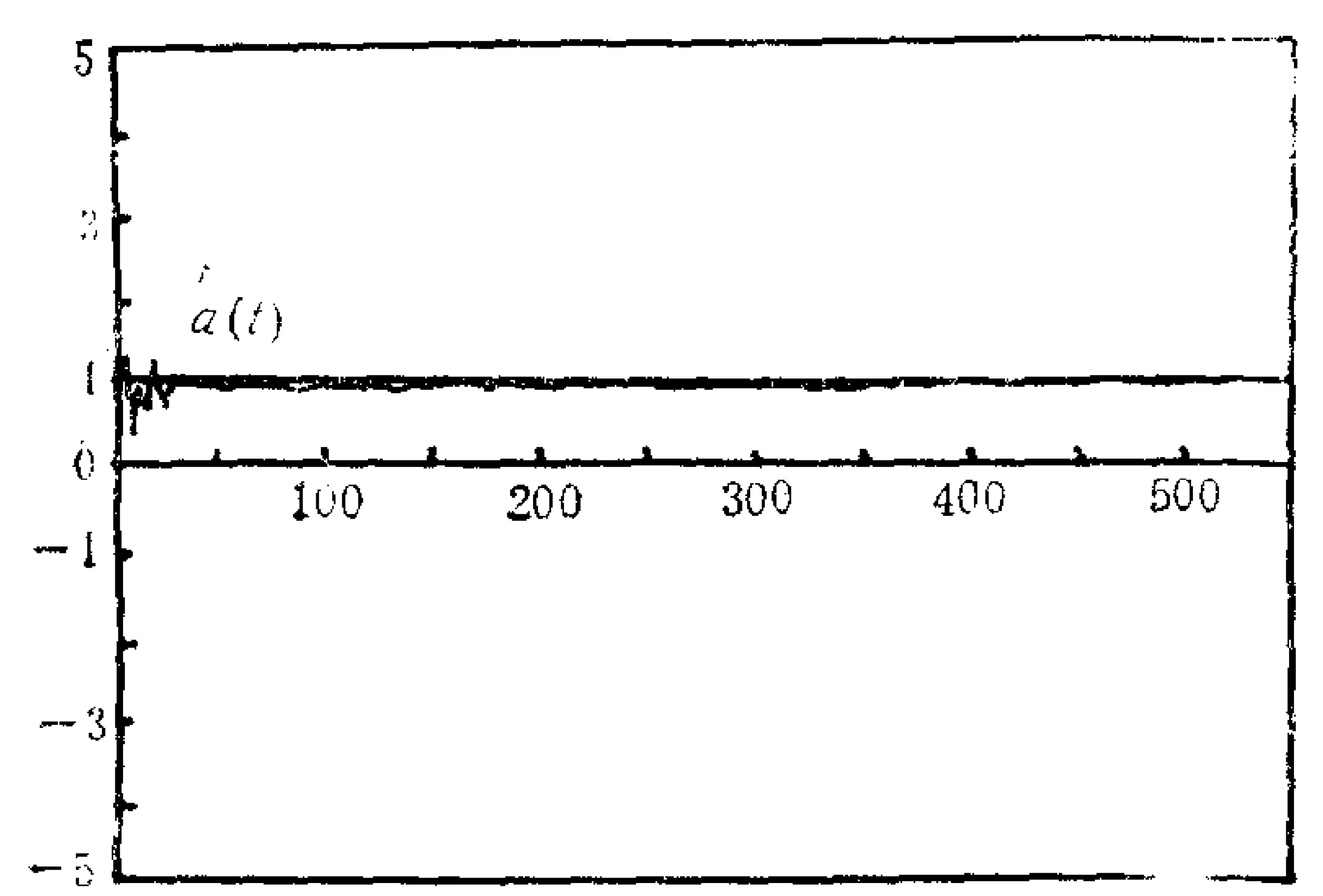

图 1 RELS 参数估值 $\hat{a}(t)$ 的收敛性

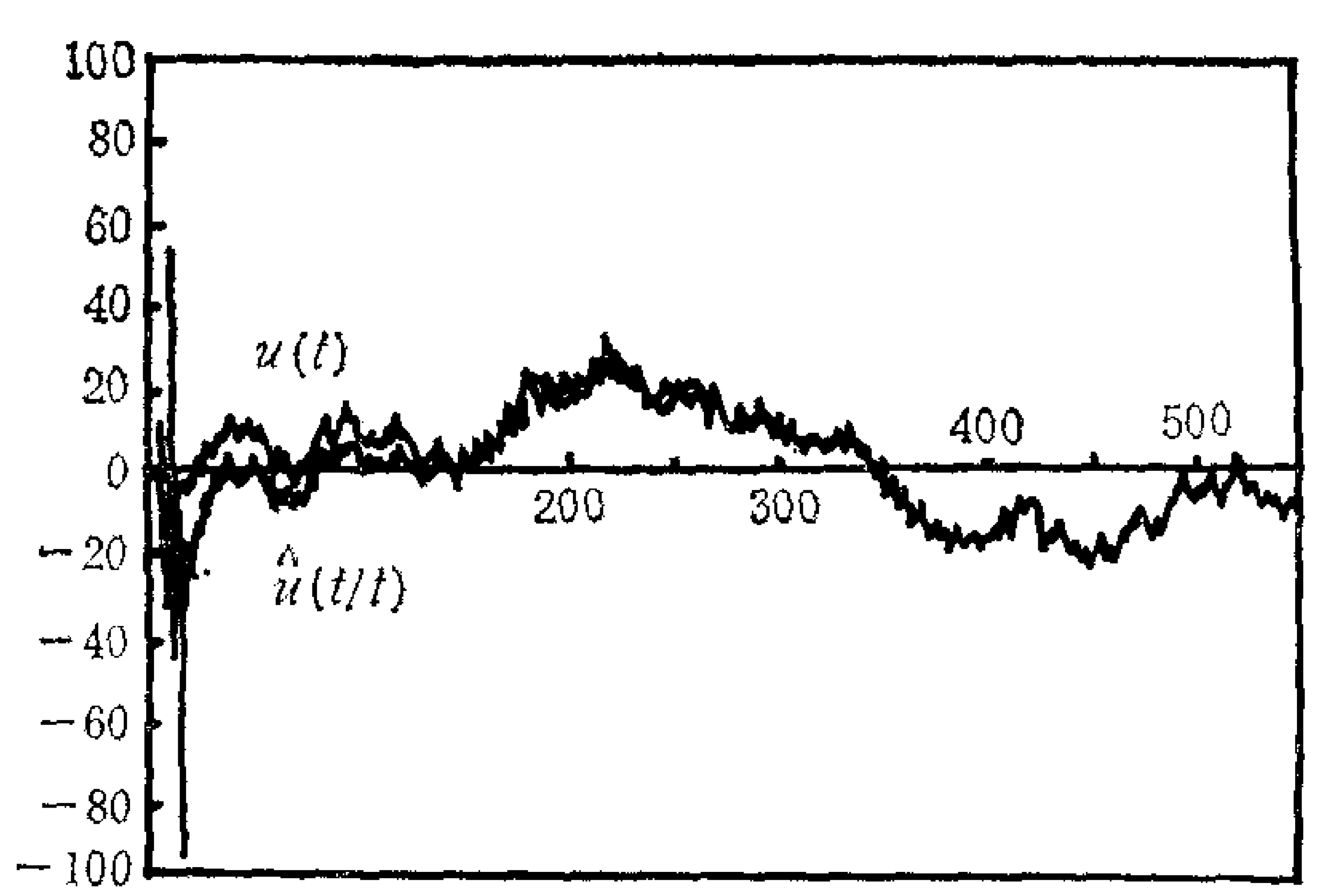

图 输入 $u(t)$ 和自校正去卷滤波器 $\hat{u}(t/t)$

参 考 文 献

[1] 邓自立,郭一新. 现代时间序列分析及其应用——建模、滤波、去卷、预报和控制. 知识出版社, 1989.

[2] 邓自立. ARMA 信号的自校正去卷平滑器. 自动化学报,1989,**15**(6): 523—530.

[3] Ahlen A and Sternad M. Optimal Deconvolution Based on Polynomial Method. *IEEE Trans. Acoust, Speech and Signal Processing*, 1989, **ASSP-37**: 217—226.

[4] 陈建国等. Kalman 滤波理论的推广. 控制理论与应用,1990,**7**;108—112.

[5] 邓自立,李北新. 非平稳 ARMA 信号自校正滤波器及其应用. 自动化学报,1992,**18**(1): 80—86.

[6] Ljung L. On Positive Real Transfer Function and the Convergence of Some Recursive Schemes, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1977, **AC-22**: 539—551.

SELF-TUNING DECONVOLUTION FILTER FOR NONSTATIONARY ARMA SIGNALS

DENG ZILI

(*Institute of Applied Mathematics. Heilongjiang University Harbin* 150080)

ZHANG HUANSHUI

(*Dept. of Mathematics. Taian Teacher's College* 271000)

ABSTRACT

Using the modern time series analysis, this paper presents a new self-tuning recursive deconvolution filter for unknown nonstationary ARMA input signal observed through a known linear system. It can be expressed by an ARMA innovation filter, and can be used to handle the nonminimum phase and unstable observation Systems. A Simulation example shows its effectiveness.

Key words: Nonstationary ARMA signals; deconvolution; input estimation; self-tuning recursive deconvolution filter.