第 20 卷 第 3 期　　自 动 化 学 报　　Vol. 20, No. 3
1994 年 5 月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　May, 1994

一种新的机器人模型及其控制算法[1)]

霍 伟　高为炳　程 勉

(北京航空航天大学第七研究室　北京　100083)

摘　　要

机器人模型通常写为 $H(q)\ddot{q}+C(q,\dot{q})\dot{q}+G(q)=\tau$,其中可适当定义矩阵 $C(q,\dot{q})$ 使得 $\dot{H}-2C$ 是反对称阵,这一性质对机器人控制设计十分有用. 目前文献中认为这样的 C 是唯一确定的. 本文采用数学力学工具 Spatial Notation 推导出一种新形式的机器人模型,证明了上述 C 并非唯一确定的. 文中还以 Slotine, Li 的著名自适应控制方案为例说明，若用本文的新模型替换传统模型,将会设计出实时计算量少得多的控制算法.

关键词: 机器人动力学,机器人控制,实时控制算法.

1、引言

不接触环境的 n 自由度机器人模型常写为[1]

$$H(q)\ddot{q}+C(q,\dot{q})\dot{q}+G(q)=\tau, \tag{1}$$

式中 $q=[q_1,\cdots,q_n]^T$ 为关节变量; $H(q)=[h_{ij}]$ 为惯性矩阵; $C(q,\dot{q})\dot{q}$ 为离心力与哥氏力向量; $G(q)$ 反映重力的影响; $\tau=[\tau_1,\cdots,\tau_n]^T$ 为加在关节轴上的力(矩).

众所周知,机器人模型(1)中 $C(q,\dot{q})$ 的表达式不是唯一确定的. 通过适当定义 C，可使 $\dot{H}-2C$ 是反对称阵. 这一性质对简化机器人控制策略的设计和分析极为有用. 然而长期以来,在模型(1)中满足 $\dot{H}-2C$ 是反对称阵的 C 都是按下式定义的:

$$C(q,\dot{q})=[c_{ij}(q,\dot{q})],\ c_{ij}(q,\dot{q})=\sum_{k=1}^{n}c_{ijk}(q)\dot{q}_k,$$

$$c_{ijk}(q)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial h_{ij}}{\partial q_k}+\frac{\partial h_{ik}}{\partial q_j}-\frac{\partial h_{jk}}{\partial q_i}\right). \tag{2}$$

这就使许多人发生一种误解，认为满足 $\dot{H}-2C$ 是反对称阵的 C 是由（2）式唯一确定的[2].

本文通过构造新的 C 证明了：当机器人自由度 $n>2$ 时，满足 $\dot{H}-2C$ 是反对称阵的 C 不是由(2)式唯一确定的. 这一方面纠正了关于机器人模型的一个错误概念,另一方

本文于 1991 年 11 月 6 日收到.

1) 航空科研基金及教委高校博士点基金资助项目,本文曾在 1991 年全国控制理论及应用年会上宣读.

面也构造出一个与传统模型(1),(2)不同的新模型. 文中还以 Slotine, Li 的著名控制方案为例说明,若用新模型替代传统模型,可导出比现今算法的计算量少得多的递推控制算法.

2、预备知识——Spatial Notation

自由刚体有 3 个移动和 3 个转动自由度，Featherstone 引入的 Spatial Notation 用一个量统一地表示刚体的移动和转动[3]. 一 spatial 向量 $\boldsymbol{r}=[\boldsymbol{r}^T,\boldsymbol{r}_o^T]^T$，其中 3 维向量 $\boldsymbol{r}$ 与参考点 O 的选取无关;而 3 维向量 $\boldsymbol{r}_o$ 与 O 点选择有关,当参考点由 O 变为 P 时，$\boldsymbol{r}_o$ 变为 $\boldsymbol{r}_p=\boldsymbol{r}_o+\overrightarrow{PO}\times\boldsymbol{r}$. 一刚体的 spatial 速度定义为 $\boldsymbol{v}=[\omega^T,\ v_o^T]^T$，其中 ω 为刚体角速度，v_0 为将参考点 O 视为与刚体固连时的速度. 一力系可用一 spatial 力 $\boldsymbol{f}=[f^T,n_o^T]^T$ 表示，其中 f 为力系主矢，n_o 为力系对 O 点的主矩. 由力学知识知 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{f}$ 是 spatial 向量.

定义 spatial 向量 $\boldsymbol{a}$ 的 spatial 转置 $\boldsymbol{a}'$，6×6 矩阵 A 的 spatial 转置 A' 分别为

$$\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}a\\a_o\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{a}'=[a_o^T,a^T];\quad A=\begin{bmatrix}A_1&A_2\\A_3&A_4\end{bmatrix},\quad A'=\begin{bmatrix}A_4^T&A_2^T\\A_3^T&A_1^T\end{bmatrix};$$

式中 $A_i(i=1,\cdots,4)$ 均为 3×3 阵. 若 A 满足 $A'=A$,则称 A 为 spatial 对称阵. 两 spatial 向量 $\boldsymbol{a}=[a^T,a_o^T]^T$ 和 $\boldsymbol{b}=[b^T,b_o^T]^T$ 的点积和叉积分别定义为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}'\boldsymbol{b}=a_o^Tb+a^Tb_o;\quad \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=[(a\times b)^T,(a_o\times b+a\times b_o)^T]^T.$$

在上述定义下，spatial 向量及其与 6×6 矩阵间的运算在形式上与通常的向量和矩阵运算规则完全一致. 例如对任意 spatial 向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 和 6×6 矩阵 A 有

$$\boldsymbol{a}'\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}'\boldsymbol{a},\quad (A\boldsymbol{a})'=\boldsymbol{a}'A',\quad \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a},\quad \boldsymbol{a}'(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}'(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}).$$

研究 n 个杆的不接触环境的机器人. 记基座为杆 0，单自由度关节 i 连接杆 $i-1$ 和杆 i. 取与杆 0 固连坐标系的原点为参考点,机器人方程可用 Spatial Notation 写为[4]

$$\boldsymbol{v}_i=\boldsymbol{v}_{i-1}+\boldsymbol{d}_i\dot{q}_i,(\boldsymbol{v}_0=0);\qquad \boldsymbol{a}_i=\boldsymbol{a}_{i-1}+\boldsymbol{d}_i\ddot{q}_i+\boldsymbol{v}_i\times\boldsymbol{d}_i\dot{q}_i,(\boldsymbol{a}_0=-\boldsymbol{g});\tag{3}$$

$$\boldsymbol{f}_i=\boldsymbol{I}_i\boldsymbol{a}_i+\boldsymbol{v}_i\times\boldsymbol{I}_i\boldsymbol{v}_i+\boldsymbol{f}_{i+1},\ (\boldsymbol{f}_{n+1}=0);\qquad \tau_i=\boldsymbol{d}_i'\boldsymbol{f}_i.\tag{4}$$

式中 $\boldsymbol{v}_i$ 为杆 i 的 spatial 速度; $\boldsymbol{d}_i$ 为描述关节 i 轴向的单位 spatial 向量; $\boldsymbol{a}_i=\dot{\boldsymbol{v}}_i-\boldsymbol{g}$,$\boldsymbol{g}$ 为 spatial 重力向量; $\boldsymbol{f}_i$ 为杆 $i-1$ 作用于杆 i 的 spatial 力; $\boldsymbol{I}_i$ 为杆 i 的 spatial 惯性张量,它是一 spatial 对称阵.

3、新模型的推导

由(3)式知

$$\boldsymbol{v}_k=\sum_{j=1}^{k}\boldsymbol{d}_j\dot{q}_j,\qquad \boldsymbol{a}_k=\sum_{j=1}^{k}\boldsymbol{d}_j\ddot{q}_j+\sum_{j=1}^{k}\boldsymbol{v}_j\times\boldsymbol{d}_j\dot{q}_j-\boldsymbol{g}.\tag{5}$$

再由(4)式可得

$$\tau_i=\boldsymbol{d}_i'\sum_{k=i}^{n}(\boldsymbol{I}_k\boldsymbol{a}_k+\boldsymbol{v}_k\times\boldsymbol{I}_k\boldsymbol{v}_k)$$

$$= d_i' \left\{ \sum_{k=i}^{n} \sum_{j=1}^{k} I_k d_j \ddot{q}_j + \sum_{k=i}^{n} \sum_{j=1}^{k} [I_k(v_j \times d_j) + v_k \times I_k d_j] \dot{q}_j - \sum_{k=i}^{n} I_k g \right\}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} I_{ij}^c d_j \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^{n} d_i' \sum_{k=\max\{i,j\}}^{n} [I_k(v_j \times d_j) + v_k \times I_k d_j] \dot{q}_j - d_i' I_{ii}^c g, \tag{6}$$

式中

$$I_{ij}^c = \sum_{k=\max\{i,j\}}^{n} I_k. \tag{7}$$

定义

$$H = [h_{ij}], \quad h_{ij} = d_i' I_{ij}^c d_j; \quad G = [g_1, \cdots g_n]^T, g_i = d_i' I_{ii}^c g; \tag{8}$$

$$C^* = [c_{ij}^*], \quad c_{ij}^* = d_i' \sum_{k=\max\{i,j\}}^{n} [I_k(v_j \times d_j) + v_k \times I_k d_j], \tag{9}$$

则由(6)式可得以下机器人动力学模型:

$$H(q)\ddot{q} + C^*(q,\dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau. \tag{10}$$

对本文导出的模型(10),可证明以下两命题.

命题 1. 当 $n > 2$ 时, $C^* \not\equiv C$.

证明. 文献[5]中已证明了,用(8)式中 h_{ij} 的表达式和(2)式可算出:

$$c_{ij} = d_i' \sum_{k=\max\{i,j\}}^{n} \left\{ I_k(v_j \times d_j) + \frac{1}{2} [v_k \times I_k d_j + d_j \times I_k v_k + I_k(d_j \times v_k)] \right\}. \tag{11}$$

再利用(7)及(5)式得

$$\begin{aligned} c_{ij} &= d_i' I_{ij}^c \left[\left(\sum_{t=1}^{j} d_t \dot{q}_t \right) \times d_j \right] + \frac{1}{2} \sum_{k=\max\{i,j\}}^{n} d_i' \left\{ \left(\sum_{t=1}^{k} d_t \dot{q}_t \right) \times I_k d_j \right. \\ &\quad \left. + d_j \times I_k \left(\sum_{t=1}^{k} d_t \dot{q}_t \right) + I_k \left[d_j \times \left(\sum_{t=1}^{k} d_t \dot{q}_t \right) \right] \right\} \\ &= \sum_{t=1}^{j} d_i' I_{ij}^c (d_t \times d_j) \dot{q}_t + \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{n} \left\{ d_i' \left[d_t \times \left(\sum_{k=\max\{i,j,t\}}^{n} I_k \right) d_j \right] \right. \\ &\quad \left. + d_i' \left[d_j \times \left(\sum_{k=\max\{i,j,t\}}^{n} I_k \right) d_t \right] + d_i' \left(\sum_{k=\max\{i,j,t\}}^{n} I_k \right) (d_j \times d_t) \right\} \dot{q}_t \\ &= \sum_{t=1}^{j} \frac{1}{2} [d_i' I_{ij}^c (d_t \times d_j) + d_i' (d_t \times I_{ij}^c d_j) + d_i' (d_j \times I_{ij}^c d_t)] \dot{q}_t \\ &\quad + \sum_{t=j+1}^{n} \frac{1}{2} [d_i' (d_t \times I_{it}^c d_j) + d_i' (d_j \times I_{it}^c d_t) + d_i' I_{it}^c (d_j \times d_t)] \dot{q}_t \\ &= \sum_{k=1}^{n} c_{ijk} \dot{q}_k, \end{aligned} \tag{12}$$

式中

$$c_{ijk}=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\left[d_i'(d_j\times I_{ij}^c d_k)+d_i'(d_k\times I_{ij}^c d_j)+d_k'(d_j\times I_{ij}^c d_i)\right] & \text{当 } k\leqslant j,\\[2ex] \dfrac{1}{2}\left[d_i'(d_j\times I_{ik}^c d_k)+d_i'(d_k\times I_{ik}^c d_j)+d_j'(d_k\times I_{ik}^c d_i)\right] & \text{当 } k>j.\end{cases}\tag{13}$$

另一方面，由(9)，(5)及(7)式可得

$$\begin{aligned}c_{ij}^*&=d_i'\sum_{k=\max\{i,j\}}^{n}\left\{I_k\left[\left(\sum_{t=1}^{j}d_t\dot{q}_t\right)\times d_j\right]+\left(\sum_{t=1}^{k}d_t\dot{q}_t\right)\times I_k d_j\right\}\\&=d_i'\sum_{t=1}^{j}\sum_{k=\max\{i,j\}}^{n}I_k(d_t\times d_j)\dot{q}_t+d_i'\sum_{t=1}^{n}\sum_{k=\max\{i,j,t\}}^{n}(d_t\times I_k d_j)\dot{q}_t\\&=\sum_{t=1}^{j}\left[d_i'I_{ij}^c(d_t\times d_j)+d_i'(d_t\times I_{ij}^c d_j)\right]\dot{q}_t+\sum_{t=j+1}^{n}d_i'(d_t\times I_{it}^c d_j)\dot{q}_t\\&\triangleq\sum_{k=1}^{n}c_{ijk}^*\dot{q}_k,\end{aligned}\tag{14}$$

式中

$$c_{ijk}^*=\begin{cases}d_i'(d_k\times I_{ij}^c d_j)+d_k'(d_j\times I_{ij}^c d_i) & \text{当 } k\leqslant j,\\ d_i'(d_k\times I_{ik}^c d_j) & \text{当 } k>j.\end{cases}\tag{15}$$

用(13)和(15)式很容易验证：

$$c_{ijk}^*\begin{cases}\neq c_{ijk} & \text{当 } i,j,k \text{ 取彼此不同数值时},\\ =c_{ijk} & \text{当 } i,j,k \text{ 中有相同者}.\end{cases}\tag{16}$$

显然，若 $n>2$，(16) 式中 i,j,k 可以取不同数值，故由(16)，(12)，(14)式及 $\dot{q}$ 各分量的独立性知，这时对所有 $i\neq j$ 均有 $c_{ij}^*\neq c_{ij}$。这表明 $n>2$ 时 $C^*\neq C$. 证毕.

命题 2. $\dot{H}-2C^*$ 是反对称阵.

证明. 由(11)及(9)式知：

$$\begin{aligned}c_{ij}+c_{ji}&=d_i'\sum_{k=\max\{i,j\}}^{n}\left\{I_k(v_j\times d_j)+\frac{1}{2}\left[v_k\times I_k d_j+d_j\times I_k v_k+I_k(d_j\times v_k)\right]\right\}\\&\quad+d_j'\sum_{k=\max\{i,j\}}^{n}\left\{I_k(v_i\times d_i)+\frac{1}{2}\left[v_k\times I_k d_i+d_i\times I_k v_k+I_k(d_i\times v_k)\right]\right\}\\&=\sum_{k=\max\{i,j\}}^{n}\Big[d_i'I_k(v_j\times d_j)+\frac{1}{2}d_i'(v_k\times I_k d_j)+\frac{1}{2}d_i'(d_j\times I_k v_k)\\&\quad+\frac{1}{2}d_j'(v_k\times I_k d_i)+d_j'I_k(v_i\times d_i)+\frac{1}{2}d_j'(v_k\times I_k d_i)\\&\quad-\frac{1}{2}d_i'(d_j\times I_k v_k)+\frac{1}{2}d_i'(v_k\times I_k d_j)\Big]\\&=d_i'\sum_{k=\max\{i,j\}}^{n}\left[I_k(v_j\times d_j)+(v_k\times I_k d_j)\right]\\&\quad+d_j'\sum_{k=\max\{i,j\}}^{n}\left[I_k(v_i\times d_i)+(v_k\times I_k d_i)\right]\\&=c_{ij}^*+c_{ji}^*,\end{aligned}$$

故 $c_{ij}-c_{ij}^*=-(c_{ji}-c_{ji}^*)$. 因此若定义 $b_{ij}=c_{ij}-c_{ij}^*$, 则 $B=[b_{ij}]\triangleq C-C^*$ 是反对称阵. 因 $\dot H-2C$ 是反对称阵，而 $\dot H-2C^*=2(C-C^*)+(\dot H-2C)=2B+(\dot H-2C)$ 是两反对称阵之和,故它也必为反对称阵. 证毕.

命题 1,2 表明: 1) 当 $n>2$ 时,在形如(1)式的模型中,满足 $\dot H-2C$ 是反对称阵的 C 不是由(2)式唯一确定的. 这就纠正了某些人关于机器人模型的一个错误概念; 2) 因 $C^*\neq C$,故本文实际上是构造出一个有别于传统模型(1),(2)的新模型，且此新模型保持了传统模型最有用的性质——$\dot H-2C^*$ 是反对称阵.

4、采用新模型的控制算法

若记杆 i 质量为 m_i,杆 i 质心在与杆 i 固连的坐标系 i 中的矢径为 c_i,杆 i 对坐标系 i 原点的惯性张量在系 i 中表达式为 J_i,则称常值 m_i, m_ic_i 的三个分量及 J_i 中 6 个独立分量为杆 i 的惯性参数,记为 $a_i=[a_1^i,\cdots,a_{10}^i]^T$. 按此定义,机器人杆 i 的 spatial 惯性张量 $\boldsymbol{I}_i$ 是其惯性参数 a_i 的线性函数,即有

$$\boldsymbol{I}_i=\sum_{j=1}^{10}\boldsymbol{R}_ja_j^i. \tag{17}$$

而整个机器人的惯性参数用 $10n$ 维向量 $\boldsymbol{a}=[a_1^T,\cdots,a_n^T]^T$ 来表示.

1987 年 Slotine, Li 研究了惯性参数 $\boldsymbol{a}$ 未知时控制机器人跟踪轨迹 $q_d(t)$ 的问题,基于模型(1),(2)设计出一自适应控制方案[1]. 其控制规律为

$$\tau=\hat H(q)\ddot q_r+\hat C(q,\dot q)\dot q_r+\hat G(q)-K_ds; \tag{18}$$

式中 $\hat H,\hat C,\hat G$ 为用惯性参数 $\boldsymbol{a}$ 的当前估计值 $\hat{\boldsymbol{a}}$ 得到的 H,C,G 的估计值; $s\triangleq q-\dot q_r$; $\dot q_r\triangleq\dot q_d-K_p(q-q_d)$; K_p 和 K_d 均为正定阵(常取为对角阵). 其参数估计规律为

$$\dot{\hat{\boldsymbol{a}}}=-PY^T(q,\dot q,\dot q_r,\ddot q_r)s, \tag{19}$$

式中 P 为正定阵(常取对角阵), $Y(q,\dot q,\dot q_r,\ddot q_r)$ 满足

$$\hat H(q)\ddot q_r+\hat C(q,\dot q)\dot q_r+\hat G(q)=Y(q,\dot q,\dot q_r,\ddot q_r)\hat{\boldsymbol{a}}. \tag{20}$$

为实现实时控制,需要找到计算控制规律(18)式和参数估计规律(19)式的有效算法. 1988 年 Niemeyer, Slotine 找到以下计算(18)和(19)式的递推算法[5].

控制算法:

$$\boldsymbol{v}_i=\boldsymbol{v}_{i-1}+\boldsymbol{d}_i\dot q_i,\ (\boldsymbol{v}_0=0);\ \boldsymbol{u}_i=\boldsymbol{u}_{i-1}+\boldsymbol{d}_i\dot q_i^r,\ (\boldsymbol{u}_0=0); \tag{21}$$

$$\boldsymbol{w}_i=\boldsymbol{w}_{i-1}+\boldsymbol{d}_i\ddot q_i^r+\boldsymbol{v}_i\times\boldsymbol{d}_i\dot q_i^r,(\boldsymbol{w}_0=-\boldsymbol{g}); \tag{22}$$

$$\hat{\boldsymbol{f}}_i=\hat{\boldsymbol{I}}_i\boldsymbol{w}_i+\frac{1}{2}[(\boldsymbol{v}_i\times\hat{\boldsymbol{I}}_i\boldsymbol{u}_i+\boldsymbol{u}_i\times\hat{\boldsymbol{I}}_i\boldsymbol{v}_i+\hat{\boldsymbol{I}}_i(\boldsymbol{u}_i\times\boldsymbol{v}_i)]+\hat{\boldsymbol{f}}_{i+1},(\hat{\boldsymbol{f}}_{n+1}=0); \tag{23}$$

$$\tau_i=\boldsymbol{d}_i'\hat{\boldsymbol{f}}_i-k_is_i; \tag{24}$$

式中 $q_r=[q_1^r,\cdots,q_n^r]^T$, $K_d=\mathrm{diag}[k_1,\cdots,k_n]$, $s=[s_1,\cdots,s_n]^T$.

参数估计算法:

$$\boldsymbol{e}_i=\boldsymbol{v}_i-\boldsymbol{u}_i; \tag{25}$$

$$\hat{\boldsymbol{f}}_j^i=\boldsymbol{R}_j\boldsymbol{w}_i+\frac{1}{2}[(\boldsymbol{v}_i\times\boldsymbol{R}_j\boldsymbol{u}_i+\boldsymbol{u}_i\times\boldsymbol{R}_j\boldsymbol{v}_i+\boldsymbol{R}_j(\boldsymbol{u}_i\times\boldsymbol{v}_i)]; \tag{26}$$

$$\dot{\hat{a}}_j^i = -p_j^i e_i' \hat{f}_i^i; \tag{27}$$

式中 p_j^i 是对角阵 P 中第 $10(i-1)+j$ 个对角元.

以下我们将证明：若在上述自适应控制方案中用本文提出的新模型(10)替代传统模型，则用与文献 [1,5] 中完全相同的推导方法会得出比(21)—(27)式计算量少得多的算法.

首先，因为自适应控制规律(18),(19)是依据机器人模型(1),(2)满足 $\dot{H}-2C$ 是反对称阵及机器人动态特性与惯性参数 $\boldsymbol{a}$ 间的线性关系而导出的[1]. 对新模型(10)，由命题 2 知 $\dot{H}-2C^*$ 是反对称阵，又由(8),(9)及(17)式知 $H(q)\ddot{q}+C^*(q,\dot{q})\dot{q}+G(q)$ 也是惯性参数 $\boldsymbol{a}$ 的线性函数，即存在矩阵 $Y^*(q,\dot{q},\dot{q},\ddot{q})$ 满足

$$H(q)\ddot{q}+C^*(q,\dot{q})\dot{q}+G(q)=Y^*(q,\dot{q},\dot{q},\ddot{q})\boldsymbol{a}. \tag{28}$$

因此如果从新模型(10)出发，用与文献[1]完全相同的方法可导出以下自适应控制方案，

控制规律：　$\tau=\hat{H}(q)\ddot{q}_r+\hat{C}^*(q,\dot{q})\dot{q}_r+\hat{G}(q)-K_d s;$　(29)

参数估计规律：　$\dot{\hat{\boldsymbol{a}}}=-PY^{*T}(q,\dot{q},\dot{q}_r,\ddot{q}_r)s;$　(30)

式中 $\hat{C}^*$ 是 C^* 的当前估计值，Y^* 由(28)式所定义.

若记惯性参数 a_t^k 的当前估计值为 $\hat{a}_t^k$，spatial 惯性张量 $\boldsymbol{I}_k$ 的当前估计值为 $\hat{\boldsymbol{I}}_k=\sum_{t=1}^{10}\boldsymbol{R}_t\hat{a}_t^k$，则利用(29)及(7)—(9)式可得到

$$\begin{aligned}
\tau_i &= \sum_{j=1}^n \hat{h}_{ij}\ddot{q}_j^r+\sum_{j=1}^n \hat{c}_{ij}\dot{q}_j^r+\hat{g}_i-k_i s_i \\
&= \sum_{j=1}^n \boldsymbol{d}_i' \sum_{k=\max\{i,j\}}^n \hat{\boldsymbol{I}}_k \boldsymbol{d}_j \ddot{q}_j^r+\sum_{j=1}^n \boldsymbol{d}_i' \sum_{k=\max\{i,j\}}^n [\hat{\boldsymbol{I}}_k(\boldsymbol{v}_j\times \boldsymbol{d}_j) \\
&\quad +\boldsymbol{v}_k\times \hat{\boldsymbol{I}}_k\boldsymbol{d}_j]\dot{q}_j^r-\boldsymbol{d}_i'\sum_{k=i}^n \hat{\boldsymbol{I}}_k\boldsymbol{g}-k_i s_i \\
&= \boldsymbol{d}_i'\sum_{k=i}^n\sum_{j=1}^k \hat{\boldsymbol{I}}_k\boldsymbol{d}_j\ddot{q}_j^r+\boldsymbol{d}_i'\sum_{k=i}^n\sum_{j=1}^k[\hat{\boldsymbol{I}}_k(\boldsymbol{v}_j\times\boldsymbol{d}_j) \\
&\quad +\boldsymbol{v}_k\times\hat{\boldsymbol{I}}_k\boldsymbol{d}_j]\dot{q}_j^r-\boldsymbol{d}_i'\sum_{k=i}^n\hat{\boldsymbol{I}}_k\boldsymbol{g}-k_i s_i \\
&= \boldsymbol{d}_i'\sum_{k=i}^n\left\{\hat{\boldsymbol{I}}_k\left[\sum_{j=1}^k(\boldsymbol{d}_j\ddot{q}_j^r+\boldsymbol{v}_j\times\boldsymbol{d}_j\dot{q}_j^r)-\boldsymbol{g}\right]\right. \\
&\quad \left.+\left[\boldsymbol{v}_k\times\hat{\boldsymbol{I}}_k\left(\sum_{j=1}^k\boldsymbol{d}_j\dot{q}_j^r\right)\right]\right\}-k_i s_i.
\end{aligned} \tag{31}$$

定义

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{u}_k=\sum_{j=1}^k\boldsymbol{d}_j\dot{q}_j^r,\ \boldsymbol{w}_k=\sum_{j=1}^k(\boldsymbol{d}_j\ddot{q}_j^r+\boldsymbol{v}_j\times\boldsymbol{d}_j\dot{q}_j^r)-\boldsymbol{g}, \\
&\hat{\boldsymbol{f}}_i=\sum_{k=i}^n\{\hat{\boldsymbol{I}}_k\boldsymbol{w}_k+\boldsymbol{v}_k\times\hat{\boldsymbol{I}}_k\boldsymbol{u}_k\},
\end{aligned} \tag{32}$$

代人(31)式后得到

$$\tau_i = \boldsymbol{d}'_i \sum_{k=i}^{n} \{\hat{\boldsymbol{I}}_k \boldsymbol{w}_k + \boldsymbol{v}_k \times \hat{\boldsymbol{I}}_k \boldsymbol{u}_k\} - k_i s_i = \boldsymbol{d}'_i \hat{\boldsymbol{f}}_i - k_i s_i. \tag{33}$$

再由(3),(32),(33)式立即可得出计算控制规律(29)式的递推算法如下:

$$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_{i-1} + \boldsymbol{d}_i \dot{q}_i, \quad (\boldsymbol{v}_0 = 0); \quad \boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{u}_{i-1} + \boldsymbol{d}_i \dot{q}_i^r, \quad (\boldsymbol{u}_0 = 0); \tag{34}$$

$$\boldsymbol{w}_i = \boldsymbol{w}_{i-1} + \boldsymbol{d}_i \ddot{q}_i^r + \boldsymbol{v}_i \times \boldsymbol{d}_i \dot{q}_i^r, \ (\boldsymbol{w}_0 = -\boldsymbol{g}); \tag{35}$$

$$\hat{\boldsymbol{f}}_i = \hat{\boldsymbol{I}}_i \boldsymbol{w}_i + \boldsymbol{v}_i \times \hat{\boldsymbol{I}}_i \boldsymbol{u}_i + \hat{\boldsymbol{f}}_{i+1}, \ (\hat{\boldsymbol{f}}_{n+1} = 0); \tag{36}$$

$$\tau_i = \boldsymbol{d}'_i \hat{\boldsymbol{f}}_i - k_i s_i. \tag{37}$$

另外,由(37)及(32)式知

$$\tau_i + k_i s_i = \boldsymbol{d}'_i \sum_{j=i}^{n} (\hat{\boldsymbol{I}}_j \boldsymbol{w}_j + \boldsymbol{v}_j \times \hat{\boldsymbol{I}}_j \boldsymbol{u}_j)$$

$$= \sum_{j=i}^{n} \sum_{k=1}^{10} \boldsymbol{d}'_i (\boldsymbol{R}_k \boldsymbol{w}_k + \boldsymbol{v}_j \times \boldsymbol{R}_k \boldsymbol{u}_j) \hat{a}_k^j. \tag{38}$$

又由(29)和(28)式知

$$\tau_i + k_i s_i = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{10} Y^*_{ijk} \hat{a}_k^j, \tag{39}$$

式中 Y^*_{ijk} 为 $Y^*(q, \dot{q}, \dot{q}_r, \ddot{q}_r)$ 的第 i 行,第 $10(j-1)+k$ 列. 比较(38),(39)式后知

$$Y^*_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{当 } i > j, \\ \boldsymbol{d}'_i (\boldsymbol{R}_k \boldsymbol{w}_j + \boldsymbol{v}_j \times \boldsymbol{R}_k \boldsymbol{u}_j) = \boldsymbol{d}'_i \hat{\boldsymbol{f}}_k^j & \text{当 } i \leqslant j. \end{cases}$$

又由(34)式知 $\boldsymbol{v}_j - \boldsymbol{u}_j = \sum_{i=1}^{j} \boldsymbol{d}_i \dot{q}_i - \sum_{i=1}^{j} \boldsymbol{d}_i \dot{q}_i^r = \sum_{i=1}^{j} \boldsymbol{d}_i s_i \triangleq \boldsymbol{e}_j$,故 $Y^{*T} s$ 的第 $10(j-1)+k$ 行为 $\sum_{i=1}^{n} s_i Y^*_{ijk} = \sum_{i=1}^{j} s_i \boldsymbol{d}'_i \hat{\boldsymbol{f}}_k^j = \boldsymbol{e}'_j \hat{\boldsymbol{f}}_k^j$. 由此得到计算参数估计规律(30)式的递推算法为:

$$\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{u}_i; \tag{40}$$

$$\hat{\boldsymbol{f}}_j^i = \boldsymbol{R}_j \boldsymbol{w}_i + \boldsymbol{v}_i \times \boldsymbol{R}_j \boldsymbol{u}_i; \tag{41}$$

$$\hat{a}_j^i = -p_j^i \boldsymbol{e}'_i \hat{\boldsymbol{f}}_j^i. \tag{42}$$

将(34)—(37),(40)—(42)式与(21)—(28)式比较即知,本文导出的算法与原算法的差别仅是将(24)式中的 $\frac{1}{2}[(\boldsymbol{v}_i \times \hat{\boldsymbol{I}}_i \boldsymbol{u}_i + \boldsymbol{u}_i \times \hat{\boldsymbol{I}}_i \boldsymbol{v}_i + \hat{\boldsymbol{I}}_i(\boldsymbol{u}_i \times \boldsymbol{v}_i)]$ 简化为(36)式中的 $\boldsymbol{v}_i \times \hat{\boldsymbol{I}}_i \boldsymbol{u}_i$;将(27)式中的 $\frac{1}{2}[(\boldsymbol{v}_i \times \boldsymbol{R}_j \boldsymbol{u}_i + \boldsymbol{u}_i \times \boldsymbol{R}_j \boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{R}_j(\boldsymbol{u}_i \times \boldsymbol{v}_i)]$ 简化为(41)式中的 $\boldsymbol{v}_i \times \boldsymbol{R}_j \boldsymbol{u}_i$. 因原算法中计算量主要在(24)和(27)两式,故本文导出的算法要比文献[5]中算法简单得多.

5、结论

本文用 Spatial Notation 从递推机器人模型(3)和(4)导出一个新的非递推形式的模型(10). 在理论上,新模型的提出纠正了认为传统模型(1)中满足 $\dot{H} - 2C$ 是反对称阵

的 C 是唯一确定的错误概念．在实用上，新模型不仅保持了传统模型最有用的性质，便于分析和设计；更重要的是，使用新模型设计控制方案时可导出更有效的递推控制算法．

参　考　文　献

[1] Slotine JJE, Li W. On the adaptive control of robot manipulators. *Int. J. Robotics Research*, 1987, **6**:49—59.

[2] Ortega R, Spong MW. Adaptive Motion Control of Rigid Robots: A Tutorial. Proc. 27th Conf. on Decision and Control, 1988: 1575—1583.

[3] Featherstone R. Robot Dynamics Algorithms. Kluwer Academic Publisher, Norwell, USA, 1987.

[4] Walker MW. A unified approach to Manipulator Modelling. Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, 1985: 729—736.

[5] Niemeyer G, Slotine JJE. Performance in Adaptive Manipulator Control. Proc 27th Conf. on Decision and Control, 1988: 1585—1591.

A NEW ROBOT MODEL AND ASSOCIATED CONTROL ALGORITHM

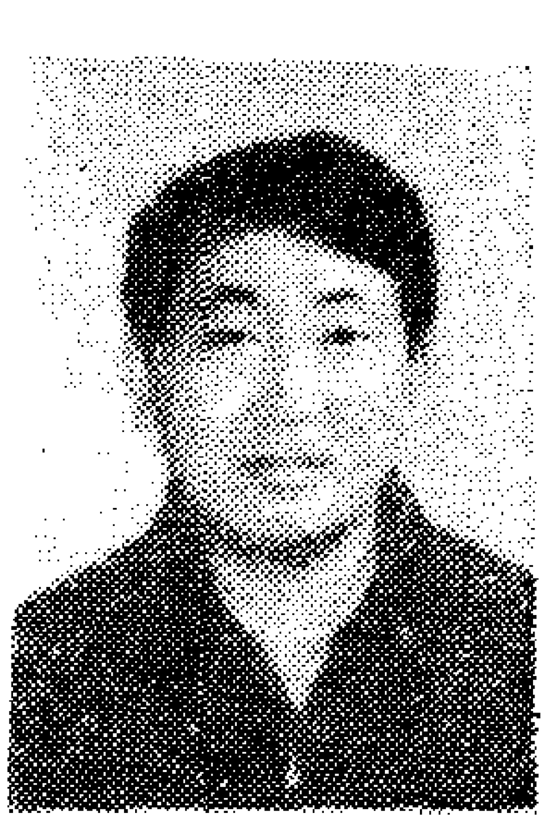
HUO WEI　GAO WEIBING　CHENG MIAN

(7th Research Division Beijing Univ of Aero. & Astro. Beijing 100083)

ABSTRACT

Robot dynamic model is usually written as $H(q)\ddot{q}+C(q,\dot{q})\dot{q}+G(q)=\tau$, where the matrix C can be properly defined so that $\dot{H}-2C$ is skew-symmetric. This property greatly facilitates robot controller design. It is believed that such C is uniquely determined. In this paper a new expression for robot the model is derived with the *spatial notation* developed in recent years, which shows that the matrix C with above property is not uniquely defined. Furthermore, the well-known robot adaptive control strategy proposed by Slotine and Li is taken as an example to demonstrate that replaced the traditional model with the new model presented in this paper, a much more computationally efficient adaptive control algorithm than the existing one can be obtained.

Key words: robot dynamics; robot control; real time control algorithm.



霍　伟　1951 年生于北京市．1977 年于北京航空学院自动控制系毕业后留校任教，1983 年获该校应用数理系自动控制理论及应用专业硕士学位，1990 年获同专业博士学位．1987 年 3 月至 1988 年 4 月曾在美国密执安大学机器人系统部作访问学者．现为北京航空航天大学第七研究室主任、教授．主要研究方向为：机器人动力学与控制，大系统稳定性与分散控制，用图论方法研究线性系统结构性质．

高为炳，程　勉　简介见本刊第 17 卷第 6 期．