第20卷 第3期
1994年5月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 20, No. 3
May, 1994

短 文

基于 H^∞ 理论的关联大系统分散鲁棒控制[1)]

胡寿松　范存海
(南京航空航天大学　南京　210016)

胡维礼　王执铨
(南京理工大学　南京　210014)

摘　　要

基于 H^∞ 理论提出了关联大系统分散鲁棒控制的一种新的设计方法. 得到的控制器不但使闭环系统渐近稳定，而且能使闭环系统从扰动输入到被控输出的传递矩阵的 H^∞ 范数小于某个给定的扰动变小常数，并对系统参数的不确定性具有鲁棒性.

关键词: 关联大系统，分散控制，鲁棒性，H^∞ 范数.

1、引言

众所周知，用 H^∞ 方法设计的控制器，比用 LQG 或 H^2 方法设计的控制器有更好的鲁棒性. 文献[1]在频域内讨论了 H^∞ 理论在分散控制中的应用，但方法复杂，且未涉及参数鲁棒性研究.

本文在时域中，基于 H^∞ 理论对关联大系统提出了一种简便的局部状态反馈分散控制器的设计方法. 利用此法求出的分散控制律，不仅保证闭环系统渐近稳定，而且能使从扰动输入到被控输出的闭环传递矩阵的 H^∞ 范数小于给定的扰动变小常数，并对系统参数的不确定性具有鲁棒性.

2、分散鲁棒控制问题

考虑由N个子系统

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}_i &= A_i\boldsymbol{x}_i + \sum_{\substack{j=1\\(j\neq i)}}^{N} A_{ij}\boldsymbol{x}_j + B_i\boldsymbol{u}_i + D_i\boldsymbol{w}_i,\\ \boldsymbol{z}_i &= C_i\boldsymbol{x}_i\end{aligned}\tag{1}$$

本文于1992年10月8日收到.
1) 国家自然科学基金资助项目.

组成的关联大系统

$$\dot{x} = Ax + Bu + Dw,$$
$$z = Cx. \tag{2}$$

其中 $x_i \in R^{n_i}$，$u_i \in R^{m_i}$，$w_i \in R^{l_i}$ 为扰动输入；$z_i \in R^{k_i}$ 为被控输出；$\sum_{i=1}^{N} n_i = n$，$\sum_{i=1}^{N} m_i = m$，$\sum_{i=1}^{N} l_i = l$，$\sum_{i=1}^{N} k_i = k$，B, C 和 D 为分块对角阵.

假设矩阵三元组 (A, B, C) 可稳可观，且 $\delta > 0$ 为一给定扰动变小常数.

问题 1. 要求设计分散控制律

$$u = Kx. \tag{3}$$

其中 $K = \mathrm{diag}\{K_1, K_2, \cdots, K_N\}$，使得系统（2）式闭环渐近稳定，且 $\|C(sI - A - BK)^{-1}D\|_\infty < \delta$.

问题 2. 设有参数不确定性关联大系统

$$\dot{x} = (A + \Delta A)x + Bu + Dw,$$
$$z = Cx. \tag{4}$$

假定 ΔA 未知但有界，且可表示为

$$\Delta A = \sum_{j=1}^{M} a_j \Delta A_j. \tag{5}$$

其中 ΔA_j 为已知常阵，a_j 为不确定参数. 不失一般性，设 $|a_j| < 1$，$j = 1, 2, \cdots, M$. 要求设计分散控制律

$$u = Kx. \tag{6}$$

对于所有满足式（5）的 ΔA，使得系统（4）式闭环渐近稳定，且 $\|C(sI - A - \Delta A - BK)^{-1}D\|_\infty < \delta$.

3、主要结果

考虑问题 1，令 $A = \tilde{A} + \Delta\tilde{A}$，
其中

$$\tilde{A} = \mathrm{diag}\{A_1, A_2, \cdots, A_N\}, \quad \Delta\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & A_{12} \cdots & A_{1N} \\ A_{21} & 0 \cdots & A_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{N1} & A_{N2} \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

利用奇异值分解法，使 $\Delta\tilde{A} = ST^T$，这里 S 和 T 为加权酉矩阵. 将式(3)代入式(2)，得闭环系统

$$\dot{x} = (\tilde{A} + \Delta\tilde{A} + BK)x + Dw,$$
$$z = Cx. \tag{7}$$

定理 1. 设矩阵 E 和 $\bar{E}$ 为实对称阵，且

$$E=\mathrm{diag}\{E_1,E_2,\cdots,E_N\},\quad \bar{E}=\begin{bmatrix}\bar{E}_1 & \bar{E}_{12}\cdots\bar{E}_{1N}\\ \bar{E}_{21} & \bar{E}_2\cdots\bar{E}_{2N}\\ \vdots & \vdots \qquad \vdots\\ \bar{E}_{N1} & \bar{E}_{N2}\cdots\bar{E}_N\end{bmatrix},$$

其中各分块矩阵维数适当，则 $E>\bar{E}$，当且仅当

$$E_1>\bar{E}_1, \tag{8}$$

$$E_i>\bar{E}_i+[\bar{E}_{i1}\cdots\bar{E}_{i,i-1}]\begin{bmatrix}E_1-\bar{E}_1 & -\bar{E}_{12} & \cdots & -\bar{E}_{1,i-1}\\ -\bar{E}_{21} & E_2-\bar{E}_2 & \cdots & -\bar{E}_{2,i-1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -\bar{E}_{i-1,1} & -\bar{E}_{i-1,2} & \cdots & E_{i-1}-\bar{E}_{i-1}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\bar{E}_{1i}\\ \bar{E}_{2i}\\ \vdots\\ \bar{E}_{i-1,i}\end{bmatrix}$$

$$(i=2,3,\cdots,N). \tag{9}$$

定理 2.[2] 设 $\bar{A},\bar{B},\bar{C}$ 为维数适当的矩阵. 若对于 $\delta>0$，存在一个正标量 ε 和对称正定阵 P，使得

$$\bar{A}^TP+P\bar{A}+\frac{\varepsilon}{\delta}P\bar{B}\bar{B}^TP+\frac{1}{\varepsilon\delta}\bar{C}^T\bar{C}<0, \tag{10}$$

则 $\bar{A}$ 渐近稳定，且 $\|\bar{H}(s)\|_\infty=\|\bar{C}(sI-\bar{A})^{-1}\bar{B}\|_\infty<\delta$.

定理 3. 考虑闭环大系统(7)式，令 $\delta>0$ 为扰动变小常数. 若存在正标量 ε 和 $\hat{\varepsilon}$ 及正定分块对角阵 Q_c，使 Riccati 方程

$$\tilde{A}^TP_c+P_c\tilde{A}+\varepsilon P_c\tilde{S}P_c+\varepsilon^{-1}\tilde{T}+\hat{\varepsilon}\delta^{-1}P_cDD^TP_c+(\hat{\varepsilon}\delta)^{-1}C^TC-P_cBB^TP_c+Q_c=0$$

存在一个对称正定解 P_c，其中分块对角阵 $\tilde{S}\geqslant SS^T$，$\tilde{T}\geqslant TT^T$. 则

1) $P_c=\mathrm{diag}\{P_{c1},P_{c2},\cdots,P_{cN}\}$，$P_{ci}\in R^{n_i\times n_i}$，$i=1,2,\cdots,N$.

2) 当 $K=\mathrm{diag}\{K_1,K_2,\cdots,K_N\}=-\gamma_cB^TP_c$，$\gamma_c\geqslant 1/2$ 时，闭环大系统(7)式渐近稳定，且 $\|C(sI-\tilde{A}-\Delta\tilde{A}-BK)^{-1}D\|_\infty<\delta$.

定理 4. 取 $\tilde{S}$ 和 $\tilde{T}$ 同定理 3. 令 $\delta>0$ 为扰动变小常数. 考虑子系统 (1) 式及控制律 $\boldsymbol{u}_i=K_i\boldsymbol{x}_i$，若存在正标量 ε 和 $\hat{\varepsilon}$ 及正定矩阵 $Q_{ci}(i=1,2,\cdots,N)$，使 Riccati 方程

$$A_i^TP_{ci}+P_{ci}A_i+\varepsilon P_{ci}\tilde{S}_iP_{ci}+\varepsilon^{-1}\tilde{T}_i+\hat{\varepsilon}\delta^{-1}P_{ci}D_iD_i^TP_{ci}$$
$$+(\hat{\varepsilon}\delta)^{-1}C_i^TC_i-P_{ci}B_iB_i^TP_{ci}+Q_{ci}=0\ (i=1,2,\cdots,N).$$

存在对称正定解 P_{ci}，则当 $K_i=-\gamma_cB_i^TP_{ci}$，$\gamma_c\geqslant 1/2$，$K=\mathrm{diag}\{K_1,K_2,\cdots,K_N\}$ 时，闭环大系统(7)式渐近稳定，且 $\|C(sI-A-BK)^{-1}D\|_\infty<\delta$.

上述定理表明：一旦正标量 ε 和 $\hat{\varepsilon}$ 选定，即可确定各子系统在无参数摄动情况下的分散状态反馈控制律.

现在考虑问题 2. 利用奇异值分解法，使 $\Delta A_j=G_jH_j^T$ $(j=1,2,\cdots,M)$，其中 G_j 和 H_j 为加权酉矩阵. 则闭环不确定性大系统为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=(\tilde{A}+\Delta\tilde{A}+\Delta A+BK)\boldsymbol{x}+D\boldsymbol{w},$$
$$\boldsymbol{z}=C\boldsymbol{x}. \tag{11}$$

定理 5. 考虑闭环大系统(11)式，令 $\delta>0$ 为扰动变小常数. 若存在正标量 $\varepsilon,\hat{\varepsilon}$ 和 $\varepsilon_j(j=1,2,\cdots,M)$，以及正定分块对角阵 Q_c，使 Riccati 方程

$$\tilde{A}^T P_c + P_c \tilde{A} + \sum_{j=1}^{M} (\varepsilon_j P_c \tilde{G}_j P_c + \varepsilon_j^{-1} \tilde{H}_j) + \varepsilon P_c \tilde{S} P_c + \varepsilon^{-1} \tilde{T} + \hat{\varepsilon}\delta^{-1} P_c D D^T P_c$$
$$+ (\hat{\varepsilon}\delta)^{-1} C^T C - P_c B B^T P_c + Q_c = 0.$$

存在一个对称正定解 P_c，其中分块对角矩阵 $\tilde{G}_j \geqslant G_j G_j^T$，$\tilde{H}_j \geqslant H_j H_j^T$，$\tilde{S} \geqslant SS^T$，$\tilde{T} \geqslant TT^T$，$j = 1,2,\cdots,M$. 则对于所有满足式(5)的 ΔA，以下结论成立:

1) $P_c = \mathrm{diag}\{P_{c1}, P_{c2}, \cdots, P_{cN}\}, P_{ci} \in R^{n_i \times n_i}$，$i = 1,2,\cdots,N$.

2) 当 $K = \mathrm{diag}\{K_1, K_2, \cdots, K_N\} = -\gamma_c B^T P_c$，$\gamma_c \geqslant 1/2$ 时，闭环大系统(11)式渐近稳定，且 $\|C(sI - A - \Delta A - BK)^{-1} D\|_\infty < \delta$.

同理，对定理 5 而言，也有类似于定理 4 那样用于子系统存在不确定性时的推理.

限于篇幅，文中所有定理的证明及算例均略.

参　考　文　献

[1] Wu QH, Mansour M. An Application of H$^\infty$ Theory in Decentralized Control. IEEE Proceedings of the 27th Conference on Decision and Control 1988: 1335—1340.

[2] Wang YJ, Shich LS. Observer-Based Robust H$^\infty$ Control Laws for Uncertain Linear Systems. *AIAA Journal of Guidance Control and Dynamics*, 1991: 741—751.

DECENTRALIZED ROBUST CONTROL OF INTERCONNECTED LARGE-SCALE SYSTEM BASED ON H$^\infty$ THEORY

Hu Shousong　Fan Cunhai

(*Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing* 210016)

Hu Weili　Wang Zhiqian

(*Nanjing University of Science and Technolongy, Nanjing* 210014)

Abstract

In this paper, a new design method for decentralized robust control of large-scale interconnected system by H$^\infty$ theory is presented. The controller obtained not only asymptotically stabilizes the closed-loop system but also makes the H$^\infty$ norm of the closed-loop transfer function matrix from disturbance input to controlled outputs be less than a given disturbance-attenuation constant and is robust for plant parameter uncertainty.

Key words: interconnected large-scale system; decentralized control; robustness; H$^\infty$ norm.