

# 基于 OBE 算法的自适应集员状态估计<sup>1)</sup>

何 青 王耀南 姜 燕 童调生

(湖南大学电气与信息工程学院 长沙 410082)

(E-mail: heqinghnun@yahoo.com.cn)

**摘 要** 研究了具有椭球集合描述的离散时间动态线性系统的状态估计问题. 从提高计算的有效性和可实现性的角度出发, 通过在不同的更新阶段采用优化定界椭球(OBE)算法, 提出了一种新颖的解决状态估计的方法. 通过与 ROBP (recursive state bounding by parallelotopes) 算法和 Kalman 滤波的仿真比较, 验证了本方法的性能.

**关键词** OBE 算法, UBB 误差, 状态估计, 集员估计, 状态定界

**中图分类号** TP13

## Adaptive Set-Membership State Estimation with Optimal Bounding Ellipsoid

HE Qing WANG Yao-Nan JIANG Yan TONG Tiao-Sheng

(College of Electrical & Information Engineering, Hunan University, Changsha 410082)

(E-mail: heqinghnun@yahoo.com.cn)

**Abstract** The problem for recursive estimation of state bounding of a discrete-time linear dynamic system in ellipsoidal sets is addressed. A novel method based on optimal bounding ellipsoid (OBE) algorithmic procedure at each stage of updating is presented to improve computational efficiency and practicability. Simulation results and performance comparisons with ROBP algorithm and Kalman filter are also given.

**Key words** OBE algorithm, unknown but bounded error, state estimation, set-membership estimation, state bounding

## 1 引言

传统的状态估计一般都假定系统和测量噪声是随机过程并且满足某种分布条件, 但在

1) 国家自然科学基金(60272051, 60075008)及高校博士点基金资助

Supported by the National Natural Science Foundation of P. R. China(60272051, 60075008) and Research Fund for the Doctoral Program of Higher Education

收稿日期 2001-04-14 收修改稿日期 2001-08-31

Received April 14, 2001; in revised form August 31, 2001

很多实际过程中噪声的统计分布特性是未知的,这直接影响了估计的效果.为了解决这种矛盾,具有未知但有界(UBB)误差系统的状态估计及参数辨识问题开始引起人们的极大关注.集员估计理论成为处理这类问题的有效方法,它是通过传感器测量和噪声界计算来得到关于状态信息的一个可实现集合,这个可实现集合包含了系统状态的真值.目前已开始应用

在多传感器信息融合处理、软测量技术、通讯、信号处理以及控制工程等方面.

集员状态估计的早期工作来源于 Schweppe<sup>[1]</sup>及 Bertsekas<sup>[2]</sup>的研究成果,他们提出可以利用外定界椭球集合来包含系统的真实状态,但当时并没有考虑到椭球集合的最优化问题;在此基础上 Fogel<sup>[3]</sup>, Fogel 和 Huang<sup>[4]</sup>给出了 OBE 算法,得到了最小容积和最小迹椭球集合,并用于系统辨识当中;Maksarov<sup>[5]</sup>研究了系统的状态定界问题,得到了相应的椭球集合描述,但是其计算量很大;Chisci<sup>[6]</sup>等人提出了用平行多面体来估计状态的 ROBP 算法,缺点是算法本身过于复杂,且收敛性欠佳;此后还提出了许多相关的改进算法,主要都集中于参数辨识,而在状态或波形估计等方面少有报道,这影响了集员估计理论的推广和应用.为此,本文研究了未知但有界输入和噪声线性系统的状态估计问题,提出了基于 OBE 算法的自适应集员状态估计新方法.

## 2 自适应集员状态估计算法

### 2.1 系统模型描述

考虑以下形式的线性离散时间动态系统模型

$$\mathbf{x}_k = A_{k-1} \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1} \quad (1)$$

$$\mathbf{y}_k = C_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \quad (2)$$

其中状态  $\mathbf{x}_k \in R^n$ , 观测  $\mathbf{y}_k \in R^m$ ,  $A_k \in R^{n \times n}$  是状态转移矩阵,  $C_k \in R^{m \times n}$  为测量矩阵,  $\mathbf{w}_k \in R^n$  和  $\mathbf{v}_k \in R^m$  分别为过程和测量噪声向量,该噪声的统计特性未知,但有界.

假定过程及观测噪声包含在下述的椭球集合中

$$W_k = \{\mathbf{w}_k \in R^n : \mathbf{w}_k^T M_k^{-1} \mathbf{w}_k \leq 1\} \quad (3)$$

$$V_k = \{\mathbf{v}_k \in R^m : \mathbf{v}_k^T \mathbf{v}_k \leq \gamma_k^2\} \quad (4)$$

其中  $M_k \in R^{n \times n}$  为已知正定矩阵,  $\gamma_k^2 > 0$ , 除此以外再无其它相关信息.同时已知系统初始状态属于以下椭球集合

$$E_0 \equiv \{\mathbf{x} : (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_0)^T P_0^{-1} (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_0) \leq \sigma_0\} \quad (5)$$

这里  $P_0 \in R^{n \times n}$  是正定对称矩阵,  $\hat{\mathbf{x}}_0$  是椭球集合中心, 且有  $\sigma_0 > 0$ .

### 2.2 OBE 状态估计算法

包含状态向量  $\mathbf{x}_{k-1}$  的椭球集合在  $k-1$  时刻可描述为以下形式

$$E_{k-1} = \{\mathbf{x} : (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1})^T P_{k-1}^{-1} (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1}) \leq \sigma_{k-1}\} \quad (6)$$

其中  $P_{k-1} \in R^{n \times n}$  是正定对称矩阵,  $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}$  为椭球的几何中心,  $\sigma_{k-1} > 0$ .

#### 2.2.1 时间更新

**定义 1.** 如果椭球  $E_{k-1}$  已知,由状态方程(1)有

$$\mathbf{x}_k \in \{A_{k-1} E_{k-1} \oplus W_{k-1}\} = \{\mathbf{x} + \mathbf{w} : \mathbf{x} \in A_{k-1} E_{k-1}, \mathbf{w} \in W_{k-1}\} \quad (7)$$

$$A_{k-1} E_{k-1} = \{A_{k-1} \mathbf{x} : \mathbf{x} \in E_{k-1}\} = \{\mathbf{x} : (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}_{k-1})^T \tilde{P}_{k-1}^{-1} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}_{k-1}) \leq \sigma_{k-1}\} \quad (8)$$

$$\bar{\mathbf{x}}_{k-1} = A_{k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1}, \quad \sigma_{k-1} = \sigma_{k-1}, \quad \tilde{P}_{k-1} = A_{k-1} P_{k-1} A_{k-1}^T \quad (9)$$

其中运算符  $\oplus$  表示矢量和,称  $A_{k-1} E_{k-1}$  为方程(1)的状态转移矩阵椭球集合.

**定理 1.** 已知状态转移矩阵椭球集合  $A_{k-1}E_{k-1}$  以及过程噪声椭球集合  $W_{k-1}$ , 采用如下递推算法

$$\hat{x}_{k|k-1} = \bar{x}_{k-1} \quad (10)$$

$$\sigma_{k|k-1} = \sigma_{k-1} \quad (11)$$

$$P_{k|k-1} = (1 + p_k^{-1})A_{k-1}P_{k-1}A_{k-1}^T + \frac{1 + p_k}{\sigma_{k|k-1}}M_{k-1} \quad (12)$$

可以使  $E_{k|k-1} \supset A_{k-1}E_{k-1} \oplus W_{k-1}$  成立. 这里  $E_{k|k-1} = \{x: (x - \hat{x}_{k|k-1})^T P_{k|k-1}^{-1} (x - \hat{x}_{k|k-1}) \leq \sigma_{k|k-1}\}$  为可行时间更新椭球集合, 其中  $P_{k|k-1} \in R^{n \times n}$ , 标量  $p_k, \sigma_{k|k-1} > 0$ .

**证明.** 考虑到式(7)为两椭球的向量和, 而一般情况下  $A_{k-1}E_{k-1} \oplus W_{k-1}$  并不能直接形成一个椭球; 又因为任何包含  $A_{k-1}E_{k-1} \oplus W_{k-1}$  的外定界椭球  $E_{k|k-1}$  均可以用支持函数<sup>[1]</sup>来描述, 即  $\eta(E_{k|k-1}(y)) = \max_{x \in E_{k|k-1}} x^T y$ ,  $\eta(E_{k|k-1}(y)) \geq \eta(A_{k-1}E_{k-1}(y)) + \eta(W_{k-1}(y))$ ,  $\forall y \in R^n$ , 故可以利用支持函数来寻找包含  $A_{k-1}E_{k-1} \oplus W_{k-1}$  的椭球  $E_{k|k-1}$  作为所需的可行时间更新椭球集合. 考虑两椭球  $E(a_1, G_1) = \{x: (x - a_1)^T G_1^{-1} (x - a_1) \leq \sigma\}$  与  $E(a_2, G_2) = \{x: (x - a_2)^T G_2^{-1} (x - a_2) \leq \xi\}$ , 其中  $G_i (i=1, 2)$  为正定对称矩阵, 标量  $\sigma, \xi$  均大于零; 其向量和所构成的椭球  $E(a, G) = \{x: (x - a)^T G^{-1} (x - a) \leq \rho\}$  (标量  $\rho > 0$ ) 应满足式

$$z^T a + (\rho z^T G z)^{1/2} \geq z^T a_1 + (\sigma z^T G_1 z)^{1/2} + z^T a_2 + (\xi z^T G_2 z)^{1/2}, \quad z \in R^n \quad (13)$$

选取  $a$  为  $a_1$  与  $a_2$  的向量和  $a_1 + a_2$ , 定义  $G = \alpha G_1 + \beta G_2$ , 其中标量  $\alpha > 0, \beta > 0$ , 可以得到不等式

$$\rho z^T \alpha G_1 z + \rho z^T \beta G_2 z \geq \sigma z^T G_1 z + 2(\sigma z^T G_1 z)^{1/2} (\xi z^T G_2 z)^{1/2} + \xi z^T G_2 z \quad (14)$$

当满足  $(\alpha - \sigma \rho^{-1})(\beta - \xi \rho^{-1}) \geq \sigma \xi \rho^{-2}$  的条件时, 可以推出

$$\left( \left( \alpha - \frac{\sigma}{\rho} \right) (z^T G_1 z)^{1/2} - \frac{\sqrt{\sigma \xi}}{\rho} (z^T G_2 z)^{1/2} \right)^2 + \left( \left( \alpha - \frac{\sigma}{\rho} \right) \left( \beta - \frac{\xi}{\rho} \right) - \frac{\sigma \xi}{\rho^2} \right) z^T G_2 z \geq 0 \quad (15)$$

因此对于标量  $p > 0$ , 如果  $\alpha \rho \sigma^{-1} - 1 = p^{-1}, \beta \rho \xi^{-1} - 1 \geq p$ , 则  $G$  可表示为

$$G = (1 + p^{-1}) \sigma \rho^{-1} G_1 + (1 + p) \xi \rho^{-1} G_2 \quad (16)$$

将  $G_1 = A_{k-1} P_{k-1} A_{k-1}^T, G_2 = M_{k-1}, \sigma = \sigma_{k|k-1}, \rho = \sigma$  和  $\xi = 1$  代入式(16), 即可得到递推等式(12). 证毕.

根据文献[5, 7]的方法, 下面给出参数  $p$  的公式以满足时间更新时的最小容积和最小迹椭球  $E_{k|k-1}$ .

最小容积椭球

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_{k|k-1} \zeta_i^{(p)} + p} = \frac{n}{p(p+1)} \quad (17)$$

其中  $\zeta_i^{(p)} = \zeta_i(A_{k-1} P_{k-1} A_{k-1}^T W_{k-1}^{-1})$  为相应矩阵的特征值,  $n$  为状态的维数;

最小迹椭球

$$p = \left[ \frac{\sigma_{k|k-1} \text{tr}(A_{k-1} P_{k-1} A_{k-1}^T)}{\text{tr}(W_{k-1})} \right]^{1/2} \quad (18)$$

### 2.2.2 测量更新

由上面推导可知, 因为  $E_{k|k-1} \supset A_{k-1}E_{k-1} \oplus W_{k-1}$ , 确保了  $x_k \in E_{k|k-1}$ . 从测量方程式(2)有  $x_k \in S_k = \{x: \|y_k - C_k x\|^2 \leq \gamma^2\}$ ,  $S_k$  称之为观测集合,  $\|\cdot\|$  表示为 2 范数.

**定义 2.** 测量更新的结果为  $E_k = \{E_{k|k-1} \cap S_k\}$ , 通过  $E_{k|k-1}$  与  $S_k$  的线性组合来得到更新椭球  $E_k$ <sup>[8,9]</sup>

$$E_k = \{E_{k|k-1} \cap S_k\} = \{x: (x - \hat{x}_k)^T P_k^{-1} (x - \hat{x}_k) \leq \sigma_k\} = \quad (19)$$

$$\{x: (x - \hat{x}_{k|k-1})^T P_{k|k-1}^{-1} (x - \hat{x}_{k|k-1}) + \lambda \|y_k - C_k x\|^2 \leq \sigma_{k|k-1} + \lambda \gamma^2\} \quad (20)$$

其中  $\lambda \geq 0$ ,  $P_k \in R^{n \times n}$  为正定对称矩阵,  $\sigma_k > 0$ ,  $\hat{x}_k$  为椭球  $E_k$  的中心.

**定理 2.** 已知观测集合  $S_k$  及椭球  $E_{k|k-1}$ , 状态  $x \in E_k$ , 即  $x$  包含在更新椭球  $E_k$  中. 由定义 2 可得到下面的递推算法

$$P_k^{-1} = P_{k|k-1}^{-1} + \lambda C_k^T C_k \quad (21)$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{k|k-1} + \lambda P_k C_k^T \delta_k \quad (22)$$

$$\sigma_k = \sigma_{k|k-1} + \lambda \gamma^2 - \lambda \delta_k^T Q_k^{-1} \delta_k \quad (23)$$

其中  $Q_k = I_m + \lambda C_k P_{k|k-1} C_k^T$ ,  $\delta_k = y_k - C_k \hat{x}_{k|k-1}$ , 这里  $\delta_k$  表示预测误差.

**证明.** 利用矩阵求逆公式, 有下式成立

$$\begin{aligned} & P_k [P_{k|k-1}^{-1} \hat{x}_{k|k-1} + \lambda C_k^T y_k] = \\ & [P_{k|k-1} - \lambda P_{k|k-1} C_k^T (I_m + \lambda C_k P_{k|k-1} C_k^T)^{-1} C_k P_{k|k-1}] \cdot [P_{k|k-1}^{-1} \hat{x}_{k|k-1} + \lambda C_k^T y_k] = \\ & \hat{x}_{k|k-1} + \lambda P_{k|k-1} C_k^T (I_m + \lambda G_k)^{-1} \delta_k \end{aligned} \quad (24)$$

这里  $G_k = C_k P_{k|k-1} C_k^T$ . 同时通过式(22)有

$$\begin{aligned} \hat{x}_k &= \hat{x}_{k|k-1} + \lambda [P_{k|k-1} - \lambda P_{k|k-1} C_k^T (I_m + \lambda C_k P_{k|k-1} C_k^T)^{-1} C_k P_{k|k-1}] C_k^T \delta_k = \\ & P_k [P_{k|k-1}^{-1} \hat{x}_{k|k-1} + \lambda C_k^T y_k] \end{aligned} \quad (25)$$

考虑式(20)的左部

$$\begin{aligned} & x^T P_{k|k-1}^{-1} x + \lambda \|C_k x\|^2 - 2x^T [P_{k|k-1}^{-1} \hat{x}_{k|k-1} + \lambda C_k^T y_k + \hat{x}_{k|k-1}^T P_{k|k-1}^{-1} \hat{x}_{k|k-1} + \lambda \|y_k\|^2] = \\ & (x - \hat{x}_k)^T P_k^{-1} (x - \hat{x}_k) - \hat{x}_k^T P_k^{-1} \hat{x}_k + \hat{x}_{k|k-1}^T P_{k|k-1}^{-1} \hat{x}_{k|k-1} + \lambda \|y_k\|^2, \end{aligned}$$

因此式(20)变成

$$(x - \hat{x}_k)^T P_k^{-1} (x - \hat{x}_k) \leq \sigma_{k|k-1} + \lambda \gamma^2 - [\lambda \|y_k\|^2 - \hat{x}_k^T P_k^{-1} \hat{x}_k + \hat{x}_{k|k-1}^T P_{k|k-1}^{-1} \hat{x}_{k|k-1}].$$

经过代数推导即可得上面的结果.

证毕.

不同的  $\lambda$  值会产生不同的更新椭球  $E_k$ , 椭球的中心  $\hat{x}_k$  可作为状态的有效点估计. 因为通过优化  $\lambda$  来计算最小化  $\sigma_k$  的值时显得过于复杂, 作为一种可行的替代方式, 本文采用优化  $\lambda$  来最小化  $\sigma$  的上界值, 以减少计算量.

$$\sigma_k = \sigma_{k|k-1} + \lambda \gamma^2 - \lambda \frac{\|\delta_k\|^2}{q_k} \geq \sigma_k \quad (26)$$

$$q_k = 1 + \lambda g_k \quad (27)$$

其中  $q_k$  和  $g_k$  分别为  $Q_k$  和  $G_k$  的最大奇异值.

**定理 3.** 考虑不等式(23),  $\lambda_k$  表示  $\lambda$  的优化值, 可以得到下面的结果

$$\lambda_k = \begin{cases} 0, & \|\delta_k\| \leq \gamma \\ \frac{1}{g_k} \left( \frac{\|\delta_k\|}{\gamma} - 1 \right), & \|\delta_k\| > \gamma \end{cases} \quad (28)$$

**证明.** 对式(26)求关于  $\lambda$  的一阶和二阶导数

$$\frac{d\sigma_k}{d\lambda} = \gamma^2 - \frac{\|\delta_k\|^2}{(1 + \lambda g_k)^2}, \quad \frac{d^2\sigma_k}{d^2\lambda} = \frac{2\|\delta_k\|^2 g_k}{(1 + \lambda g_k)^3} \quad (29)$$

如果  $\|\delta_k\|^2 g_k \neq 0$ , 则  $d^2\sigma_k/d^2\lambda$  与  $(1 + \lambda g_k)$  同号, 又因为  $1 + \lambda g_k \geq 1$ , 故  $d^2\sigma_k/d^2\lambda > 0$ . 当  $\|\delta_k\| \leq \gamma$  时, 很明显有  $d\sigma_k/d\lambda \geq 0, \forall \lambda \geq 0$ , 即  $\sigma_k$  在  $\lambda$  非负时是  $\lambda$  的单调递增函数, 故  $\lambda = 0$  是最优值; 当  $\|\delta_k\| > \gamma$  时, 只有取  $\lambda = [(\|\delta_k\|/\gamma) - 1]/g_k$  才能使  $d\sigma_k/d\lambda = 0$  成立, 即  $\sigma_k = \min$ . 证毕.

### 3 仿真实验

考虑下面的离散时间线性系统来检验算法的有效性和性能.

$$\text{设 } x_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.2 & -0.9 & 1.3 \end{pmatrix} x_{k-1} + u_k, y_k = \begin{pmatrix} 1.2 & 1.5 & -0.9 \\ -1 & 0.8 & 1.1 \end{pmatrix} x_k + v_k.$$

考虑以下两种均匀分布噪声的情况. 设过程噪声向量  $\{u_k\}$  和观测噪声向量  $\{v_k\}$  的元素都为  $(-2, 2)$  之间均匀分布的噪声, 用椭球  $E_k$  的几何中心  $\hat{x}_k$  作为  $k$  时刻的状态点估计. 分别用文献[6]的 ROBP 方法和本文提出的 OBE1(min-volume), OBE2(min-trace) 及 kalman 滤波处理. 仿真结果如表 1 所示. 其中  $(\bar{e}_i)$  和  $MSE(e_i)$  分别代表状态估计的误差均值和均方误差. 图 1(a), (b), (c) 给出了均方误差随时间变化的曲线; 图 1(d) 为 OBE2 情况下椭球容积变化曲线. 可见本文算法明显好于 ROBP 方法, 与 kalman 滤波非常接近.

表 1 过程及观测噪声均为均匀分布时的状态估计结果比较  
Table 1 Comparison of state estimation results for the case of uniformly distributed process and measurement noise

估计算法	$\bar{e}_1$	$\bar{e}_2$	$\bar{e}_3$	$MSE(e_1)$	$MSE(e_2)$	$MSE(e_3)$
ROBP	0.2345	0.1857	0.2273	1.5417	0.7985	1.7546
OBE1	0.0916	-0.0058	0.0208	1.0085	0.5011	1.0827
OBE2	0.0612	-0.0297	0.0004	0.9910	0.4938	1.0665
Kalman filter	0.0511	-0.0366	-0.0167	0.9837	0.4827	1.0582

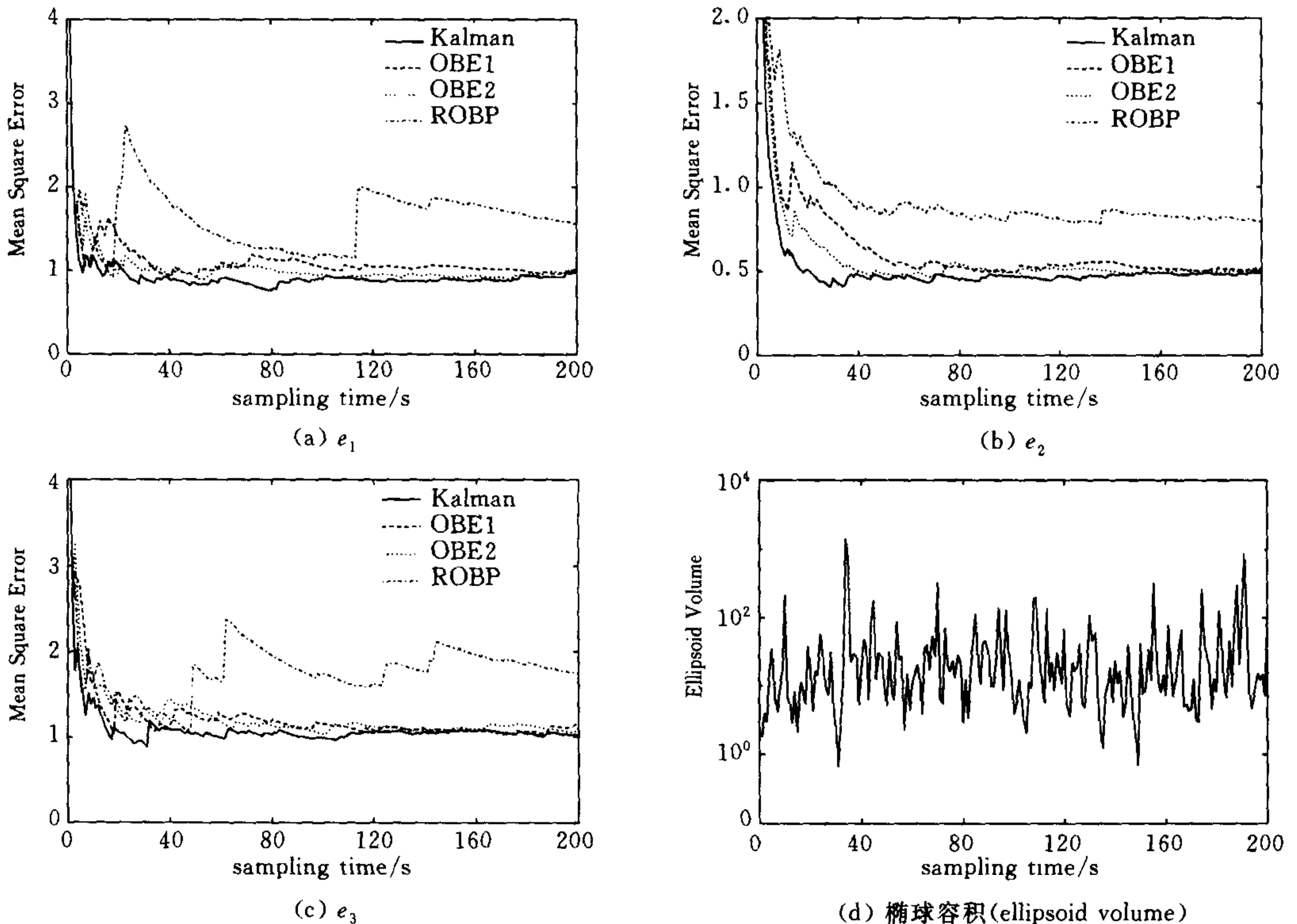


图 1 过程及观测噪声均为均匀分布时的状态估计均方误差及椭球容积变化曲线  
Fig.1 Mean square error of state estimation and ellipsoid volume with uniformly distributed process and measurement noise

## 4 结论

目前的状态估计一般所考虑的是具有高斯分布噪声的情况,这限制了它的推广和应用.本文提出了一种基于 OBE 算法的椭球状态定界(state bounding)迭代方法,通过对椭球集合的两步优化得到了状态的集员估计.对于系统和测量噪声有界但未知分布情况的状态估计是非常有效的,与其它几种方法相比较,本算法适应性很强、计算方便,结果令人满意.另外,此方法还可以推广到故障检测及鲁棒控制等相关领域.

## References

- 1 Schweppe F C. Recursive state estimation; unknown but bounded errors and system inputs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1968, **13**(1): 22~28
- 2 Bertsekas D P, Rhodes I B. Recursive state estimation for a set-membership description of uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1971, **16**(2): 117~128
- 3 Fogel E. System identification via membership set constraints with energy constrained noise. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1979, **24**(5): 752~758
- 4 Fogel E, Huang Y F. On the value of information in system identification — bounded noise case. *Automatica*, 1982, **18**(2): 229~238
- 5 Maksarov D G, Norton J P. State bounding with ellipsoidal set description of uncertainty *International Journal Control*, 1996, **65**(5): 847~866
- 6 Chisci L, Garulli A, Zappa G. Recursive state bounding by parallelotopes. *Automatica*. 1996, **32**(7): 1049~1055
- 7 Chernous'ko F L. Optimal guaranteed estimates of indeterminacies with the aid of ellipsoids Part I. *Engineering Cybernetics*, 1980, **18**(3): 1~9
- 8 Nagaraj S, Gollamudi S, Kapoor S, Huang Y F. Beacon: an adaptive set-membership filtering technique with sparse updates. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1999, **47**(11): 2928~2941
- 9 Dasgupta S, Huang Y F. Asymptotically convergent modified recursive least-squares with data-dependent updating and forgetting factor for systems with bounded noise. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1987, **33**(3): 383~392

**何 青** 博士研究生. 主要研究领域为智能控制理论与应用、集员理论、多传感器数据融合.

(**HE Qing** Ph. D. candidate, his research interests include intelligent control theory and application, set membership theory and mutisensor data fusion.)

**王耀南** 教授,博士生导师. 主要研究领域为智能控制理论与应用、计算机视觉、计算机 CIMS.

(**WANG Yao-Nan** Professor, his research interests include intelligent control theory and application, computer vision and CIMS.)

**姜 燕** 博士研究生,讲师. 主要研究领域为智能控制理论与应用、模式识别、信号处理.

(**JIANG Yan** Lecture, Ph. D. candidate, her research interests include intelligent control theory and application, pattern recognition and signal processing.)

**童调生** 教授,博士生导师. 主要研究领域为智能控制理论与应用、多传感器数据融合、遗传算法、最优控制.

(**TONG Tiao-Sheng** Professor, her research interests include intelligent control theory and application, mutisensor data fusion, genetic algorithm, and optimal control.)