第 20 卷 第 4 期　　自 动 化 学 报　　Vol. 20, No. 4
1994 年 7 月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　July, 1994

一般模型 2-D 系统的观测器设计理论[1)]

邹　云　孙建中　杨成梧
(南京理工大学　动力工程学院　南京　210014)

摘　　要

该文讨论了 2-D 一般模型 (2DGM) 在标准边界条件下的渐近观测器的存在性条件及其设计问题. 为此，首先将由 Bisiacco 等人在 1985 年发展起来的相应于对角边界条件的 2-D 渐近稳定性理论推广到了具有标准边界条件的 2-D 一般模型. 在此基础上，借助于局部能控性概念，建立了一系列十分类似于 1-D 情形的观测器的存在条件，从这些存在条件出发也可以得到相应的观测器设计算法，最后还得出了 2DGM 的分离性定理.

关键词: 2-D 系统，观测器，渐近稳定性，局部能控性，分离性定理.

1　引言

2-D 系统理论近来越来越受到重视，得到了广泛的研究. 作为系统理论重要课题之一的观测器理论和设计问题，自然也在 2-D 的领域内得到了提出和研究. 但是，由于2-D 系统的复杂性，现有的关于 2-D 观测器的讨论都只是初步的，大都是在一些特殊条件 (如特征多项式可分等) 下的直接的设计方法，对如分离性质等更深入的问题几乎没有涉及. 本文针对这些情况，对 2-D 系统的观测器理论和设计问题进行了更全面和深入的研究.

2　渐近稳定性

考虑如下 2DGM[1].

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(i+1,j+1) &= A_0\boldsymbol{x}(i,j) + A_1\boldsymbol{x}(i+1,j) + A_2\boldsymbol{x}(i,j+1) + B_0\boldsymbol{u}(i,j)\\ &\quad + B_1\boldsymbol{u}(i+1,j) + B_2\boldsymbol{u}(i,j+1),\end{aligned} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{y}(i,j) = C\boldsymbol{x}(i,j). \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^p$, A_i, B_i, C 为适当维的实阵，边界条件为

$$\boldsymbol{x}(i,0),\boldsymbol{x}(0,j),\ i=0,1,2,\cdots;\ j=1,2,\cdots. \tag{3}$$

引理 1.[2]　2DGM 的状态方程(1)的解为

$$\boldsymbol{x}(i,j) = \phi(i-1,j-1)[A_0,B_0]\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(0,0)\\ \boldsymbol{u}(0,0)\end{bmatrix}$$

1) 国家自然科学基金资助项目.
本文于 1992 年 5 月 22 日收到

$$+\sum_{k=1}^{i}(\phi(i-k,j-1)\cdot[A_1,B_1]+\phi(i-k-1,j-1)\cdot[A_0,B_0])\begin{bmatrix}x(k,0)\\u(k,0)\end{bmatrix}$$

$$+\sum_{k=1}^{j}(\phi(i-1,j-k)\cdot[A_2,B_2]+\phi(i-1,j-k-1)\cdot[A_0,B_0])\begin{bmatrix}x(0,k)\\u(0,k)\end{bmatrix}$$

$$+\sum_{k=1}^{i}\sum_{l=1}^{j}(\phi(i-k-1,j-l-1)B_0+\phi(i-k,j-l-1)B_1$$

$$+\phi(i-k-1,j-l)B_2)u(k,l), \tag{4}$$

其中状态转移矩阵 $\phi(i,j)$ 定义为

$$\phi(i,j)=A_0\phi(i-1,j-1)+A_1\phi(i,j-1)+A_2\phi(i-1,j), \tag{5}$$

$$\phi(0,0)=I,\ \phi(i,j)=0,\ i<0 \text{ 或 } j<0. \tag{6}$$

定义 1. 称 2DGM 是渐近稳定的,系指对零输入及有界的 $\sup_i\|x(i,0)\|$、$\sup_j\|x(0,j)\|$,均有 $\sup\|x(i,j)\|$ 有界且 $\lim_{i,j\to\infty}x(i,j)=0$.

定理 1. 2DGM 为渐近稳定的充要条件是

$$\det(I-A_1z_1-A_2z_2-A_0z_1z_2)\neq 0,\ |z_1|\leqslant 1,\ |z_2|\leqslant 1. \tag{7}$$

证. 参见附录,有关(7)式的一些新判据亦可参见文献[6].

3 观测器理论和设计

考虑如下 2-D 系统:

$$\begin{aligned}z(i+1,j+1)=&F_0z(i,j)+F_1z(i+1,j)+F_2z(i,j+1)+G_0u(i,j)\\&+G_1u(i+1,j)+G_2u(i,j+1)+H_0y(i,j)\\&+H_1y(i+1,j)+H_2y(i,j+1)\end{aligned} \tag{8}$$

$$w(i,j)=Lz(i,j)+Ky(i,j), \tag{9}$$

其中 $z\in\mathbb{R}^{n_1}$, $w\in\mathbb{R}^{n_2}$ 边界条件为

$$z(i,0),\ z(0,j),\ i=0,1,\cdots,\ j=1,2,\cdots. \tag{10}$$

定义 2. 称由(8),(9)式描述的 2-D 系统为 2DGM 的 K_0x 观测器,如果

$$\lim_{i,j\to\infty}(w(i,j)-K_0x(i,j))=0,$$

且此收敛与输入及边界条件(3)均无关. 特别地, 当 $K_0=I$ 时称(8),(9)为 2DGM 的渐近观测器.

定理 2. 设 2DGM 在 $[(0,0),(n,n)]$ 中局部能控[5], 则存在矩阵 T, 对任意的输入及边界条件(3),(10),均有 $\lim_{i,j\to\infty}(z(i,j)-Tx(i,j))=0$ 的充要条件是

i) $\det(I-F_1z_1-F_2z_2-F_0z_1z_2)\neq 0,\ |z_1|\leqslant 1,\ |z_2|\leqslant 1.$

ii) $TA_i=F_iT+H_iC,\ G_i=TB_i,\ i=0,1,2.$

证. 观测器误差为 $e(i,j)=z(i,j)-Tx(i,j)$. 先证充分性. 显然有

$$e(i+1,j+1)=F_0e(i,j)+F_1e(i+1,j)+F_2e(i,j+1).$$

再由定理 1 知 $\lim_{i,j\to\infty}e(i+1,j+1)=0$.

再证必要性. 记 $M_i = F_iT + H_iC - TA_i$, $N_i = G_i - TB_i (i = 0,1,2)$, 易得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}(i+1,j+1) = {} & F_0\boldsymbol{e}(i,j) + F_1\boldsymbol{e}(i+1,j) + F_2\boldsymbol{e}(i,j+1) + M_0\boldsymbol{x}(i,j) \\ & + M_1\boldsymbol{x}(i+1,j) + M_2\boldsymbol{x}(i,j+1) + N_0\boldsymbol{u}(i,j) \\ & + N_1\boldsymbol{u}(i+1,j) + N_2\boldsymbol{u}(i,j+1). \end{aligned} \tag{11}$$

取 $\boldsymbol{u}(i,j) \equiv 0, \boldsymbol{x}(i,0) = \boldsymbol{x}(0,j) \equiv 0$,则显然有 $\boldsymbol{x}(i,j) \equiv 0$. 从而由定理 1 知 i) 成立.

对(11)式取极限可得

$$\begin{aligned} \lim_{i,j\to\infty} [& M_0\boldsymbol{x}(i,j) + M_1\boldsymbol{x}(i+1,j) + M_2\boldsymbol{x}(i,j+1) + N_0\boldsymbol{u}(i,j) \\ & + N_1\boldsymbol{u}(i+1,j) + N_2\boldsymbol{u}(i,j+1)] = 0. \end{aligned} \tag{12}$$

由引理 1 易见 $\boldsymbol{x}(i,j)$, $\boldsymbol{x}(i+1,j)$, $\boldsymbol{x}(i,j+1)$ 不受 $\boldsymbol{u}(i+1,j)$, $\boldsymbol{u}(i,j+1)$ 的影响,而后者又具有任意性,故得 $N_1 = 0$, $N_2 = 0$.

由于 i) 成立,定义

$$V \triangleq \{(z_1,z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1| \leqslant 1, |z_2| \leqslant 1\},$$

$$V_1 \triangleq \{(z_1,z_2) \in \mathbb{C}^2 : \det(I - F_1z_1 - F_2z_2 - F_0z_1z_2) = 0\},$$

易证 V_1 为闭集,故 $\operatorname{dist}(V, V_1) > 0$, 其中 $\operatorname{dist}(V_1, V_2) = \inf\{((z_1 - z_2)(z_1 - z_2)^H)^{1/2}, \forall z_1, z_2 \in V_1 \times V_2\}$,从而 $\exists r_0 > 0$,使得 $\det(I - F_1z_1 - F_2z_2 - F_0z_1z_2) \neq 0, |z_1| \leqslant 1 + r_0, |z_2| \leqslant 1 + r_0$. 这样,对 $|z_1| \leqslant 1 + \frac{r_0}{2}$, $|z_2| \leqslant 1 + \frac{r_0}{2}$ 成立

$$\operatorname{adj}(I - F_1z_1 - F_2z_2 - F_0z_1z_2)\det(I - F_1z_1 - F_2z_2 - F_0z_1z_2) = \sum_{i\geqslant 0, j\geqslant 0} \phi_1(j, i) z_1^i z_2^j,$$ 这里

$$\phi_1(i,j) = F_0\phi_1(i-1,j-1) + F_1\phi_1(i,j-1) + F_2\phi_1(i,j-1)$$

$$\phi_1(0,0) = I, \quad \phi_1(i,j) = 0, \quad i < 0 \text{ 或 } j < 0.$$

从而可知 $\sum_{i,j=0}^{\infty} \|\phi_1(i,j)\|$ 收敛.

改写(11)式为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}(i+1,j+1) = {} & F_0\boldsymbol{e}(i,j) + F_1\boldsymbol{e}(i+1,j) + F_2\boldsymbol{e}(i,j+1) \\ & + [M_0, N_0]\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(i,j) \\ \boldsymbol{u}(i,j) \end{bmatrix} + M_1, 0\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(i+1,j) \\ \boldsymbol{u}(i+1,j) \end{bmatrix} + [M_2, 0]\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(i,j+1) \\ \boldsymbol{u}(i,j+1) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

注意到 $\lim_{i,j\to\infty} \boldsymbol{e}(i,j) = 0$, 从而利用引理 1 及 $\sum_{i,j=0}^{\infty} \|\phi_1(i,j)\|$ 的收敛性可得:

若

$$\sup_{i,j} \{\|\boldsymbol{x}(i,0)\|, \|\boldsymbol{x}(0,j)\|, \|\boldsymbol{u}(i,0)\|, \|\boldsymbol{u}(0,j)\|\} < \infty,$$

则

$$\begin{aligned} \lim_{i,j\to\infty} \sum_{k=1}^{i} \sum_{l=1}^{j} \Big\{ & \phi_1(i-k-1, j-l-1)[M_0, N_0] + \phi_1(i-k, j-l-1)[M_1, 0] \\ & + \phi_1(i-k-1, j-l)[M_2, 0] \Big\} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(k,l) \\ \boldsymbol{u}(k,l) \end{bmatrix} = 0, \end{aligned}$$

由此级数的收敛性[1]考虑 $(i,j-1)$ 这一项有 $\lim\limits_{i,j\to\infty} M_1\boldsymbol{x}(i,j-1)=0$，从而由 2DGM 在 $[(0,0),(n,n)]$ 中局部能控性[2]可知，$M_1=0$；同理，考虑 $(i,j-1)$ 这一项可得 $M_2=0$。这样，(12)式就可化为

$$\lim_{i,j\to\infty}(M_0\boldsymbol{x}(i,j)+N_0\boldsymbol{u}(i,j))=0.$$

再一次由 $\boldsymbol{x}(i,j)$ 不受 $\boldsymbol{u}(i,j)$ 的影响及 $\boldsymbol{u}(i,j)$ 的任意性，得 $N_0=0$。进而由

$$\lim_{i,j\to\infty} M_0\boldsymbol{x}(i,j)=0$$

及局部能控性，得 $M_0=0$。 证毕.

推论 1. 设 2DGM 在 $[(0,0),(n,n)]$ 中局部能控，则 2-D 系统(8)是 2DGM 的渐近观测器的充要条件是

i) $\det(I-F_1z_1-F_2z_2-F_0z_1z_2)\neq 0,\ |z_1|\leqslant 1,\ |z_2|\leqslant 1.$

ii) $F_i=A_i-H_iC,\ G_i=B_i,\ i=0,1,2.$

证. 由定理 2 易知.

定理 3. 若存在矩阵 T，使得

i) 对任意输入及边界条件(3),(10)有 $\lim\limits_{i,j\to\infty}(\boldsymbol{z}(i,j)-T\boldsymbol{x}(i,j))=0$；

ii) $K_0=LT+KC$，

则 2-D 系统(8),(9)是 2DGM 的 $K_0\boldsymbol{x}$ 观测器.

证. 记 $\boldsymbol{e}(i,j)\triangleq\boldsymbol{z}(i,j)-T\boldsymbol{x}(i,j)$，易得 $\boldsymbol{w}(i,j)=L\boldsymbol{e}(i,j)+K_0\boldsymbol{x}(i,j)$，从而

$$\lim_{i,j\to\infty}(\boldsymbol{w}(i,j)-K_0\boldsymbol{x}(i,j))=\lim_{i,j\to\infty}L\boldsymbol{e}(i,j)=0.$$

证毕.

下面给出 $K_0\boldsymbol{x}$ 观测器的设计算法.

算法 1. 第一步：求满足 $LT=K_0-KC$ 的通解 T；

第二步：求满足

$$\begin{cases}F_iT=TA_i-H_iC, & i=0,1,2,\\ \det(I-F_1z_1-F_2z_2-F_0z_1z_2)\neq 0, & (|z_1|\leqslant 1,|z_2|\leqslant 1)\end{cases}$$

的解 F_i,H_i；

第三步：取 $G_i=TB_i,\ i=0,1,2$；

第四步：建立观测器方程(8),(9).

以上得到了 2DGM 的全阶观测器的结果. 下面讨论降阶观测器. 注意到非奇异线性变换显然不改变系统的局部能控性，不妨设 $C=[0,I_{p_1}]$，$p_1=\operatorname{rank}C$. 令 $\boldsymbol{x}(i,j)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1(i,j)\\ \boldsymbol{x}_2(i,j)\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{x}_1\in\mathbb{R}^{n-p_1}$，$\boldsymbol{x}_2\in\mathbb{R}^{p_1}$，并对 2DGM 及(8)式中各系数矩阵作相应分块，有如下结论.

定理 4. 设 2DGM 在 $[(0,0),(n,n)]$ 中局部能控，$C=[0,I_{p_1}]$ 若 2DGM 存在

1) 这里用到了级数收敛则其分量必收敛这一性质.

2) 此即意味着 $\boldsymbol{x}(i,j-1)$ 的某种任意性，即可以取 $\boldsymbol{u}(i,j)$，使得 $\boldsymbol{x}(i,j)\not\to 0$，且有任意预先给定的聚点 $\boldsymbol{x}$.

形如(8)的渐近观测器，且 $\det(I - A_{1,11}z_1 - A_{2,11}z_2 - A_{0,11}z_1z_2) \neq 0, |z_1| \leqslant 1, |z_2| \leqslant 1$，则 2DGM 必存在 $n - p_1$ 阶的降阶渐近观测器.

证. 构造 $n - p_1$ 阶系统如下:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\theta}(i+1,j+1) = & F_{0,11}\boldsymbol{\theta}(i,j) + F_{1,11}\boldsymbol{\theta}(i+1,j) + F_{2,11}\boldsymbol{\theta}(i,j+1) + G_{01}\boldsymbol{u}(i,j) \\ & + G_{11}\boldsymbol{u}(i+1,j) + G_{21}\boldsymbol{u}(i,j+1) + (F_{0,12} + H_{01})\boldsymbol{x}_2(i,j) \\ & + (F_{1,12} + H_{11})\boldsymbol{x}_2(i+1,j) + (F_{2,12} + H_{21})\boldsymbol{x}_2(i,j+1).\end{aligned}$$

由推论 1 知上式可化为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\theta}(i+1,j+1) = & A_{0,11}\boldsymbol{\theta}(i,j) + A_{1,11}\boldsymbol{\theta}(i+1,j) + A_{2,11}\boldsymbol{\theta}(i,j+1) + B_{01}\boldsymbol{u}(i,j) \\ & + B_{11}\boldsymbol{u}(i+1,j) + B_{21}\boldsymbol{u}(i,j+1) + A_{0,12}\boldsymbol{y}(i,j) \\ & + A_{1,12}\boldsymbol{y}(i+1,j) + A_{2,12}\boldsymbol{y}(i,j+1).\end{aligned} \tag{13}$$

令 $\bar{\boldsymbol{e}}(i,j) = \boldsymbol{\theta}(i,j) - \boldsymbol{x}_1(i,j)$，则

$$\bar{\boldsymbol{e}}(i+1,j+1) = A_{0,11}\bar{\boldsymbol{e}}(i,j) + A_{1,11}\bar{\boldsymbol{e}}(i+1,j) + A_{2,11}\bar{\boldsymbol{e}}(i,j+1),$$

再由定理 1 即知 $\lim\limits_{i,j\to\infty}\bar{\boldsymbol{e}}(i,j) = 0$. 证毕.

显然，该定理的证明是构造性的，由此不难得到如下降阶观测器的设计算法.

算法 2.

第一步：若 $C \neq [0, I_{p_1}]$，作变换 $T = \begin{bmatrix} T^* \\ C \end{bmatrix}$，$\operatorname{rank}T = n$，并对 TA_iT^{-1}, TB_i 作相应分块；

第二步：判别 $\det(I - A_{1,11}z_1 - A_{2,11}z_2 - A_{0,11}z_1z_2) \neq 0$，$|z_1| \leqslant 1$，$|z_2| \leqslant 1$ 是否满足；

第三步：通过相应的观测器(8)构造观测器(13).

4 分离性定理

下面的结果表明分离性定理对 2-DGM仍成立.

定理 5. 设 2DGM 在 $[(0,0),(n,n)]$ 中局部能控，且存在矩阵 T，对任意输入及边界条件均有 $\lim\limits_{i,j\to\infty}(\boldsymbol{z}(i,j) - T\boldsymbol{x}(i,j)) = 0$ 及 $LT + KC = I$. 对 2DGM 及观测器(8),(9)作状态反馈 $\boldsymbol{u}(i,j) = -K_1\boldsymbol{w}(i,j) + \boldsymbol{v}(i,j)$，可得

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(i+1,j+1) \\ \boldsymbol{z}(i+1,j+1) \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} A_0 - B_0K_1KC & -B_0K_1L \\ H_0C - G_0K_1KC & F_0 - G_0K_1L \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(i,j) \\ \boldsymbol{z}(i,j) \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} A_1 - B_1K_1KC & -B_1K_1L \\ H_1C - G_1K_1KC & F_1 - G_1K_1L \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(i+1,j) \\ \boldsymbol{z}(i+1,j) \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} A_2 - B_2K_1KC & -B_2K_1L \\ H_2C - G_2K_1KC & F_2 - G_2K_1L \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(i,j+1) \\ \boldsymbol{z}(i,j+1) \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} B_0 \\ G_0 \end{bmatrix}\boldsymbol{v}(i,j) + \begin{bmatrix} B_1 \\ G_1 \end{bmatrix}\boldsymbol{v}(i+1,j) + \begin{bmatrix} B_2 \\ G_2 \end{bmatrix}\boldsymbol{v}(i,j+1),\end{aligned} \tag{14}$$

则

i) 反馈系统(14)的特征多项式具有分离性，即系统(14)从特征多项式为

$$\det(z_1z_2I-(A_1-B_1K_1)z_1-(A_2-B_2K_1)z_2-(A_0-B_0K_1))\cdot\det(z_1z_2I-F_1z_1-F_2z_2-F_0). \tag{15}$$

ii) 观测器的引入不改变原状态反馈系统的传递函数阵，即

$$G_1(z_1,z_2)=C(z_1z_2I-(A_1-B_1K_1)z_1-(A_2-B_2K_1)z_2-(A_0-B_0K_1))^{-1}(B_0+B_1z_1+B_2z_2). \tag{16}$$

证．显然，2DGM 在非奇异线性变换下特征多项式及传递函数阵均保持不变．

对系统(14)作非奇异线性变换

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(i,j)\\ \boldsymbol{e}(i,j)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I & 0\\ -T & \Phi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(i,j)\\ \boldsymbol{z}(i,j)\end{bmatrix},$$

并利用定理 2 的 ii) 可得

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(i+1,j+1)\\ \boldsymbol{e}(i+1,j+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_0-B_0K_1 & -B_0K_1L\\ 0 & F_0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(i,j)\\ \boldsymbol{e}(i,j)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}A_1-B_1K_1 & -B_1KL\\ 0 & F_1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(i+1,j)\\ \boldsymbol{e}(i+1,j)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}A_2-B_2K_1 & -B_2K_1L\\ 0 & F_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(i,j+1)\\ \boldsymbol{e}(i,j+1)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B_0\\ 0\end{bmatrix}\boldsymbol{v}(i,j)+\begin{bmatrix}B_1\\ 0\end{bmatrix}\boldsymbol{v}(i+1,j)+\begin{bmatrix}B_2\\ 0\end{bmatrix}\boldsymbol{v}(i,j+1), \tag{17}$$

$$\boldsymbol{y}(i,j)=[C,0]\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(i,j)\\ \boldsymbol{e}(i,j)\end{bmatrix}. \tag{18}$$

直接计算即知系统 (17)、(18) (从而也是系统 (14)) 的特征多项式及传递函数阵分别由(15),(16)式表示．证毕．

5 算例

设 2DGM 为

$$\boldsymbol{x}(i+1,j+1)=\begin{bmatrix}\frac{1}{6} & -\frac{1}{8} & 1\\ \frac{1}{7} & \frac{1}{10} & 1\\ -1 & 0 & \frac{1}{4}\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(i,j)+\begin{bmatrix}\frac{1}{9} & \frac{1}{7} & 2\\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{11} & 1\\ -1 & -3 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(i+1,j)+\begin{bmatrix}\frac{1}{14} & \frac{1}{9} & 0\\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{14} & 3\\ -1 & -2 & \frac{1}{8}\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(i,j+1)+\begin{bmatrix}1 & 2\\ -3 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}(i,j)+\begin{bmatrix}-4 & -1\\ -1 & 3\\ 1 & -2\end{bmatrix}\boldsymbol{u}(i+1,j)+\begin{bmatrix}3 & 1\\ 2 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}(i,j+1),$$

$$y(i,j)=(0\ \ 0\ \ 1)x(i,j),$$

则其降阶观测器设计如下：

i）记 $\det(I-A_{1,11}z_1-A_{2,11}z_2-A_{0,11}z_1z_2)\triangleq\sum a_{ij}z_1^iz_2^j$，可以验证

$$1=a_{00}\geqslant\sum_{i\neq0,j\neq0}|a_{ij}|+\frac{1}{35},$$

故对 $|z_1|\leqslant1$，$|z_2|\leqslant1$ 有 $\det(I-A_{11}z_1-A_{21}z_2-A_{01}z_1z_2)\neq0$；

ii）由算法 2 可构造此 2DGM 的降阶观测器为

$$\theta(i+1,j+1)=\begin{bmatrix}\frac{1}{6} & -\frac{1}{8}\\ \frac{1}{7} & \frac{1}{10}\end{bmatrix}\theta(i,j)+\begin{bmatrix}\frac{1}{9} & \frac{1}{7}\\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{11}\end{bmatrix}\theta(i+1,j)+\begin{bmatrix}\frac{1}{14} & \frac{1}{9}\\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{14}\end{bmatrix}\theta(i,j+1)$$

$$+\begin{bmatrix}1 & 2\\ -3 & 1\end{bmatrix}u(i,j)+\begin{bmatrix}-4 & -1\\ -1 & 3\end{bmatrix}u(i+1,j)+\begin{bmatrix}3 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix}u(i,j+1)$$

$$+\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}y(i,j)+\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}y(i+1,j)+\begin{bmatrix}0\\ 3\end{bmatrix}y(i,j+1).$$

6 结束语

本文通过对 2DGM 渐近稳定性的讨论，得到了此类系统观测器的存在性、设计算法及含观测器的反馈系统的分离性质等一系列结果，深化了现有的 2-D 系统观测器方面的讨论和研究.

附　　录

定理 1 的证明.

充分性. 参见文献[6]，下证必要性.

必要性. 先证在 $|z_1|<1,|z_2|<1$ 内有 $\det(I-A_1z_1-A_2z_2-A_0z_1z_2)\neq0$.

取初值 $x(0,0)$满足$\|x(0,0)\|=1$，其余皆为 0. 由渐近稳定性定义及引理 1 可知 $\sup\limits_{i,j}\|\phi(i,j)A_0\|$ 有界. 类似地可得 $\sup\|\phi(i,j)A_1+\phi(i-1,j)A_0\|$ 及 $\sup\|\phi(i,j)A_2+\phi(i,j-1)A_0\|$有界，进而 $\sup\limits_{i,j}\|\phi(i,j)A_1\|$，$\sup\limits_{i,j}\|\phi(i,j)A_2\|$ 均有界. 由 $\phi(i,j)$ 的定义知 $\sup\|\phi(i,j)\|$ 有界. 利用 Abel 定理得 $\sum\limits_{i,j=0}^{\infty}\phi(i,j)z_1^iz_2^j$ 在 $|z_1|<1$，$|z_2|<1$ 内内闭一致且绝对收敛，从而由分析运算可知

$$\sum_{i,j=0}^{\infty}\phi(j,i)z_1^iz_2^j=I+\sum_{k=1}^{\infty}(A_1z_1+A_2z_2+A_0z_1z_2)^k$$

在 $|z_1|<1$，$|z_2|<1$ 内内闭一致成立. 由此得谱半径 $\rho(A_1z_1+A_2z_2+A_0z_1z_2)<1$，故

$$\det(I-A_1z_1-A_2z_2-A_0z_1z_2)\neq0$$

在 $|z_1|<1$，$|z_2|<1$ 内内闭成立.

其次再证 $\det(I-A_1z_1-A_2z_2-A_0z_1z_2)\neq0$，在 $\{(z_1,z_2):|z_1|=1,\ |z_2|=1\}$ 成立. 若不然则 $\exists(\mu^{-1},\lambda^{-1})$，$|\mu^{-1}|=1$，$|\lambda^{-1}|=1$，$x_0\neq0$ 使得 $(I-A_1\mu^{-1}-A_2\lambda^{-1}-A_0\mu^{-1}\lambda^{-1})x_0=0$，即 $(\lambda\mu I-A_1\lambda-A_2\mu-A_0)x_0=0$.

由线性迭加原理及定义 1 知在 R^n 渐近稳定的 2DGM 也在 $\mathbb{C}^n$ 渐近稳定,故不妨设 $x(0,0)=x_0$, $x(i,0)=\lambda^i x_0$, $x(0,j)=\mu^j x_0$, $u(i,j)\equiv 0$. 此时易知 $x(i,j)=\lambda^i\mu^j x_0$ 从而 $\|x(i,j)\|=\|x_0\|$, 与渐近稳定性矛盾.

再证 $\det(I-A_1z_1-A_2z_2-A_0z_1z_2)\neq 0$,在$\{(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2:|z_1|=1,|z_2|<1$或$|z_1|<1, |z_2|=1\}$内成立.

若不然,不妨设 (λ_0,μ_0), $|\lambda_0|=1$, $|\mu_0|<1$, 使该行列式为零.

情形 1. 若 $\det(I-A_1z_1-A_2z_2-A_0z_1z_2)$ 与 z_2 无关,显然可取 $z_1=\lambda_0$, $z_2=1$, 这与刚才所证矛盾.

情形 2. $p(z_1,z_2)\triangleq\det(I-A_1z_1-A_2z_2-A_0z_1z_2)$ 与 z_2 有关, 此时显然可设 $p(\lambda_0,z_2)$ 不恒为 0, 令 $f(\lambda,\mu)=p(\lambda+\lambda_0,\mu+\mu_0)$, $\lambda=z_1-\lambda_0$, $\mu=z_2-\mu_0$, 则 $f(0,0)=0$ 且 $f(0,\mu)$ 可表为 $b\mu^d+b_1\mu^{d+1}+b_2\mu^{d+2}+\dots b_{n-d}\mu^n$, 其中 $b\neq 0$, $d\geqslant 1$, 从而由文[4]的引理 4.2 知, 至少存在一点 (λ_1,μ_1), $|\lambda_1|<1$, $|\mu_1|<1$, 使 $\det(I-A_1\lambda_1-A_2\mu_1-A_0\lambda_1\mu_1)=0$, 这与最先证得结果矛盾.

参 考 文 献

[1] 邹云,杨成梧. 2-D 线性离散系统. 国防工业出版社,1994.
[2] Kurek JE. The General State-space Model for a Two-Dimensional Linear Systems. *IEEE*.1985, **T-AC30** (6):600-602.
[3] 钟同德. 多复变函数的积分表示与多维奇异积分方程. 厦门大学出版社,1986.
[4] P.格列菲斯. 代数曲线. 北京大学出版社,1985.
[5] 杨成梧,陈雪如,邹云. 2-D变系数系统在一般模型下的状态响应公式及其能控性. 自动化学报,1991,**17**(5): 551—557.
[6] 杨成梧,孙建中,邹云. 2-D 一般模型的渐近稳定性. 控制理论与应用,1993,**9**(1).
[7] 杨成梧,陈雪如. 2-D 离散系统的观测器. 自动化学报,1991,**17**(5): 601—605.

A THEORY TO THE OBSERVERS DESIGN FOR 2-D SYSTEMS

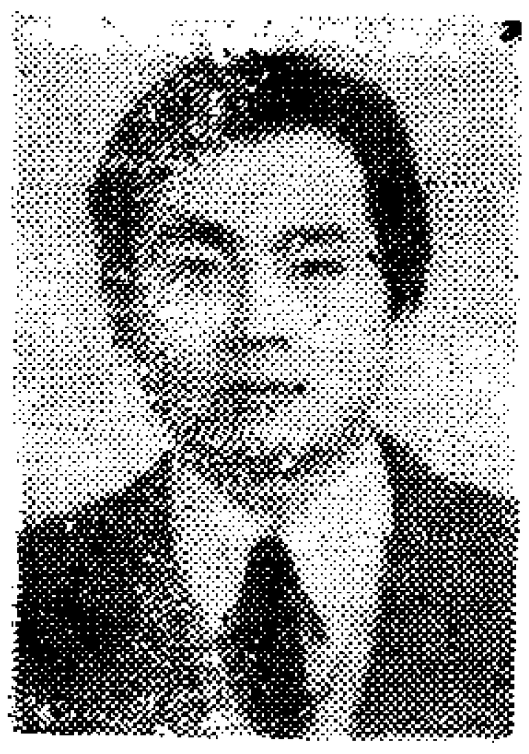
Zou Yun Sun Jianzhong and Yang Chengwu

(*Power Engineering College, Nanjing University of Science and Technology Nanjing* 210014)

Abstract

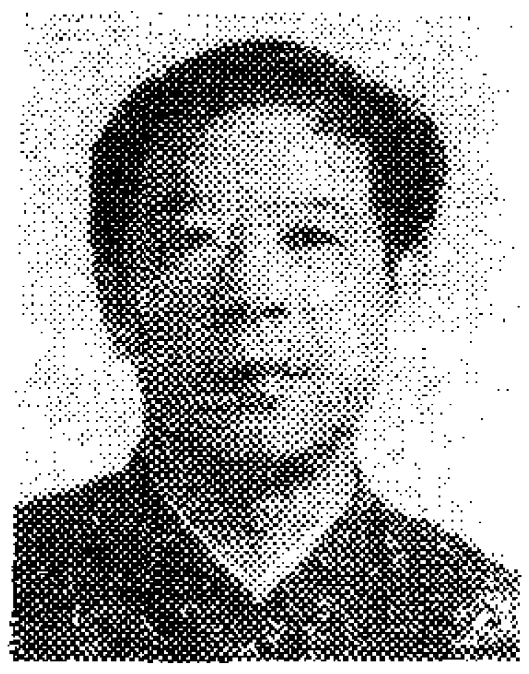
In this paper, we discuss the problems of the existence conditions and the corresponding design approach for the asymptotic state observers of 2-D general state space models (2DGM) with the standard boundary condition (SBC). To this end, we firstly generalize the asymptotic stability theory developed by Bisicco (1985) under the diagonal boundary condition to the 2DGM with SBC. Then based on this theory and the concept of local controllability, a series of existence conditions for the asymptotic state observers of 2DGM are proposed. These conditions are analogous to the corresponding well-known results in 1-D case. Finally the related design methods and the 2-D separation property theorem are also presented.

Key words: 2-D systems, observers, asymptotic stability, local controllability, sparation property theorem.



邹　云　1962 年生，1983 年毕业于西北大学数学系，1987 年和 1990 年在原华东工学院分获工学硕士和博士学位，后留校任教，现任副教授．主要研究兴趣为广义系统理论，H^{∞} 控制，2-D 系统理论和容错控制等。

孙建中　1967 年生，1989 年毕业于浙江大学数学系，1991 年于华东工学院获工学硕士学位，后分配至成都某部基地科研所从事军事通讯技术研究工作，主要研究兴趣为信号处理等。



杨成梧　1936 年生，1961 年毕业于哈尔滨军事工程学院，同年在原华东工学院工作。现任南京理工大学教授，博士导师，研究兴趣主要集中在 2-D 系统理论，广义系统理论，H^{∞} 控制，正交函数在控制理论中的应用以及离散动态事件等领域，并著有《2-D 线性离散系统》等专著。